

Henning Jung

Identifizierung von geschädigten Komponenten an Schienenfahrzeugen basierend auf Beschleunigungs- messungen

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe
für Technische Mechanik
im Institut für Mechanik und Regelungs-
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

Band 22

Impressum

Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

URN: urn:nbn:de:hbz:467-70566

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2024

Identifizierung von geschädigten Komponenten an
Schienenfahrzeugen basierend auf
Beschleunigungsmessungen

genehmigte
DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
M.Sc. Henning Jung

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2024

Betreuer und erster Gutachter
Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen
Universität Siegen

Zweiter Gutachter
Prof. Dr.-Ing. Peter Kraemer
Universität Siegen

Tag der mündlichen Prüfung
09. April 2025

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Regelungstechnik – Mechatronik der Universität Siegen in der Arbeitsgruppe *Technische Mechanik – Labor für experimentelle Mechanik*.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen für seine fachliche Betreuung, seinen Zuspruch und seine stete und verlässliche Unterstützung. Weiter danke ich Prof. Dr.-Ing. Peter Kraemer für die Übernahme des Korreferates. Ebenso herzlich danke ich Prof. Dr.-Ing. Oliver Nelles für die fachlichen Diskussionen und die gemeinsamen Beiträge mit Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Jürgen Christ im Rahmen des Promotionsverfahrens.

Für das angenehme und kollegiale Arbeitsklima am Institut für Mechanik und Regelungstechnik – Mechatronik bedanke ich mich bei allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppen *Technische Mechanik – Labor für experimentelle Mechanik* und *Mess- und Regelungstechnik – Mechatronik*, die in vielfältiger Weise zum Gelingen der vorliegenden Dissertation beigetragen haben. Ein weiteres Dankeschön auch an alle studentischen Hilfskräfte sowie Studierende, die im Rahmen von Abschlussarbeiten die Realisierung dieser Arbeit ermöglichten; allen voran M.Sc. Jonas Kappel und M.Sc. Hermann Klein.

Ein besonderer Dank gilt vor allem meiner ehemaligen Kollegin Prof. Dr.-Ing. Inka Müller für die kritische Durchsicht der Arbeit und die Begleitung auf der langen Zielgeraden zur Promotionsprüfung, meinen beiden langjährigen Bürokollegen Dr.-Ing. Philipp Hilgendorff und Dr.-Ing. Tobias Reitz für die angenehmen Arbeitsstunden in PB-A 205 sowie Dr.-Ing. Tobias Münker für die fachlichen und aufmunternden Diskussionen auch außerhalb der Uni.

Für ihre unermüdliche Unterstützung und die stetige Motivation, den begonnenen Weg bis zum Ende zu gehen, danke ich meiner geliebten Frau Lena von Herzen.

Kurzfassung

Der Fokus der vorliegenden Dissertation lässt sich dem Forschungsfeld *Structural Health Monitoring* (SHM) zuordnen und hat die Entwicklung neuer Methoden zur Diagnose und Prognose von Schädigungen basierend auf Beschleunigungsmessungen zum Ziel. Als Anwendungsbeispiel wird die Überwachung der Fahrwerkskomponenten von Schienenfahrzeugen gewählt.

Schienenfahrzeuge werden meist für eine Nutzungsdauer von 30 Jahren und mehr vorgesehen. Um über diese Zeitspanne einen sicheren und zuverlässigen Betrieb zu gewährleisten, sind regelmäßige Instandhaltungsmaßnahmen durchzuführen, die sich heutzutage nach fest vordefinierten Intervallen richten. Diese Intervalle werden durch eine bestimmte Betriebszeit, oder aber nach Erreichen einer definierten Laufleistung befristet. Strukturelle Schädigungen, die zwischen zwei Instandhaltungsmaßnahmen entstehen lassen sich damit kaum feststellen und führen im extremen Fall zur Entgleisung. Solche Ereignisse sind unplanbar und führen stets zu kostenintensiven korrektiven Maßnahmen. Zur Vermeidung eines solchen Entgleisungsszenarios werden daher die Intervalle nach einem konservativen Ansatz (kurze zeitliche Abstände, wenige Laufleistungskilometer) definiert. Ein Erhöhung der Anzahl an Wartungsmaßnahmen führt zu einem zu steigenden Aufwänden in der Instandhaltung, aber auch zur unwirtschaftlichen Ausnutzung von Komponenten, die dadurch weit vor ihrer technischen Lebensdauer ausgetauscht werden. Eine intelligente, zustandsbasierte Instandhaltungsstrategie unter Verwendung eines SHM-Systems zur Diagnose und Prognose von Schädigungen ist daher ein vielversprechender Ansatz, die Anzahl der Instandhaltungsmaßnahmen zu reduzieren, bei gleichzeitiger Erhöhung der Sicherheit, Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit.

Strukturelle Schädigungen wirken sich auf das Vibrationsverhalten aus. Schienenfahrzeuge sind während des Betriebes ständigen Vibrationen ausgesetzt, die vor allem durch den Rollkontakt zwischen Rad und Schiene angeregt werden. Das Hauptaugenmerk dieser Forschungsarbeit liegt auf der automatisierten Auswertung und Bewertung der Vibrati-

onsmessungen im Hinblick auf schadhafte Komponenten. Hierzu wird eine neue Methode basierend auf der *Stochastic Subspace Identification* (SSI) und der Kerndichteschätzung entwickelt und vorgestellt. Das Herzstück bildet die *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F). Als wesentliche Neuerung ist die Verwendung einer Vielzahl von unterschiedlichen, stochastischen Anregungsszenarien in Kombination mit der Kerndichteschätzung zur Ermittlung der modalen Parameter zu nennen. Dieser Ansatz führt zur Minimierung falscher Identifikationsergebnisse, die durch eine Verletzung der Annahme von weißem Rauschen als Systemanregung – so wie sie bei der Herleitung der SSI verwendet wird – entstehen. Die automatisierte Auswertung und Klassifikation der erzeugten MoDE-F wird mittels der Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik (JSDM) realisiert.

Aufbauend auf dem aktuellen Forschungsstand wird die Wirkungsweise theoretisch analysiert und dargelegt. In numerischen Simulationen wird die generelle Anwendbarkeit an realitätsnahen Betriebsbedingungen gezeigt. Im Anschluss wird die neuartige Methode an einem realen Drehgestell angewendet.

Abstract

The focus of this dissertation relates to the research field of *Structural Health Monitoring* (SHM) with the aim to develop new methods for damage diagnosis and prediction based on acceleration measurements. The monitoring of bogie components of railway vehicles is chosen as an application example.

Railway vehicles are typically designed for an operational service life of 30 years or more. In order to ensure a safe and reliable operation over this period, regular maintenance actions must be carried out, which nowadays are based on fixed, predefined intervals. These intervals are limited by a certain operating time or after a defined mileage has been reached. Structural damages that occur between two maintenance actions are rarely detected and, in extreme cases, can lead to derailment. Such events are unpredictable and always result in costly corrective maintenance activities. To avoid such derailment scenarios, the intervals are therefore defined according to a conservative approach (short time intervals, less mileage). Increasing the number of maintenance activities not only raises maintenance costs but also leads to inefficient utilization of components, which are often replaced before the end of their technical service life. Therefore, an intelligent, condition-based maintenance strategy using an SHM system for damage diagnosis and prediction presents a promising approach to reducing the number of maintenance activities while simultaneously increasing safety, reliability, and cost-effectiveness.

Structural damages affect the vibration behavior. Railway vehicles are exposed to constant vibrations during operation, primarily caused by the rolling contact between wheel and rail. The main focus of this research thesis is on the automated evaluation and assessment of vibration measurements concerning defective components. For this purpose, a new method based on *Stochastic Subspace Identification* (SSI) and kernel density estimation is developed and presented. The core of this method is the *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F). A key innovation is the use of a large number of different stochastic excitation scenarios in combination with kernel density estimation

to determine the modal parameters. This approach leads to the minimization of incorrect identification results that arise from a violation of the white noise assumption for the system excitation – as used in the derivation of the SSI –. The automated evaluation and classification of the generated MoDE-F is realized by using the Jensen-Shannon divergence metric (JSDM).

Based on the current state of research, the mode of operation is theoretically analyzed and presented. Numerical simulations show the general applicability to realistic operating conditions. The new method is then applied to a real bogie.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	IX
1 Einleitung	1
1.1 SHM - Ein Überblick	5
1.2 SHM - Ein Überblick im Eisenbahnwesen	7
1.3 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit	9
2 Grundlagen	13
2.1 Mathematische Modelle technischer Schwingungssysteme	15
2.1.1 Differentialgleichungssystem 2. Ordnung	16
2.1.2 Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (Bi-Modale Zerlegung)	16
2.1.3 Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell	21
2.1.4 Zeitdiskretes Zustandsraummodell	22
2.1.5 Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und -vektoren der ver- schiedenen Darstellungsformen	24
2.2 Stochastic Subspace Identification	29
2.3 Kerndichteschätzung: Parzen-Fenster-Methode	36
2.3.1 Gütekriterien	39
2.3.2 Multivariate Gauß-Verteilung	43
2.3.3 Jensen-Shannon-Divergenz Metrik	45
2.4 Schienenfahrzeuge	48
2.4.1 Grundlegender Aufbau von Fahrwerken	50
2.4.2 Bewegungsverhalten von Schienenfahrzeugen	55
3 Entwicklung einer SHM-Methode basierend auf dem Parzen Estimator	57
3.1 Methode zur Bildung der <i>Modal Parameter Density Estimation Function</i>	60

3.1.1	Signalauswahl	60
3.1.2	Systemidentifikation	61
3.1.3	Merkmalsselektion	63
3.1.4	Bildung der MoDE-F	64
3.2	Health Assessment Strategie	74
3.2.1	Klassifikation mittels Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik	75
3.2.2	Klassifikation mittels Wahrscheinlichkeits-Vergleich	76
3.2.3	Bewertung des Klassifikationsergebnisses	77
4	Anwendung: Analytischer Zwei-Massenschwinger	79
4.1	Versuchsumgebung	80
4.2	Bestimmung eines Zeitsignals aus einer gegebenen Leistungsdichte	81
4.3	Systemidentifikation mit bandbegrenztem weißem Rauschen	83
4.4	Systemidentifikation mit nicht-weißem Rauschen	85
5	Anwendung: Zugmodell in der Simulation	87
5.1	Mehrkörpersimulations-Modell	87
5.1.1	Modellierung des Zug- und Gleismodells	88
5.1.2	Modellierung von Gleisfehlern	91
5.1.3	Modellierung der Schadensszenarien	93
5.2	Analyse der modalen Parameter	93
5.3	Ermittlung der modalen Parameter via MoDE-F	94
5.3.1	Robustheit der MoDE-F Methode	96
5.4	Schadenserkennung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsmethode	98
5.4.1	Sensitivität der Schadenserkennung	98
5.4.2	Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall	99
6	Anwendung: Eisenbahndrehgestell auf einem Rollenprüfstand	101
6.1	Versuchsumgebung	101
6.1.1	Messdatenakquise	103
6.2	Methodik zur Studie	103
6.2.1	Signalauswahl	103
6.2.2	Erzeugen der MoDE-F	107
6.3	Einflussanalyse	108
6.3.1	Einfluss der Anzahl der Anregungsbedingungen N	109

6.3.2	Einfluss der Toleranzklasse ε auf die Abbruch-Ordnung p	112
6.4	Health Assessment eines Eisenbahndrehgestells	113
7	Zusammenfassung und Ausblick	121
A	Anhang	125
A.1	Transformierter Zustandsraum	125
A.2	Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix im transformierten Zustands- raum	126
A.3	Beobachtbarkeitsmatrix im transformierten Zustandsraum	127
A.4	SIMPACK Zugmodell	128
A.5	Rollenprüfstandsexperimente	129
	Literaturverzeichnis	133

Nomenklatur

In der folgenden Liste wird für häufig verwendete Symbole, Indices, Akzente und Abkürzungen deren Bedeutung aufgeführt. Dabei wurde darauf geachtet, dass, wenn möglich, die in der Fachliteratur gängigen und häufig genutzten Formelzeichen Anwendung finden. Aufgrund der unterschiedlichen Fachgebiete kann es jedoch vorkommen, dass einige Formelzeichen doppeldeutig sind. Im Rahmen des jeweiligen Kontextes ist die Bedeutung der Symbole jedoch eindeutig. Die Bedeutung hier nicht aufgeführter Zeichen wird im Text separat erklärt.

Lateinische Symbole

$\mathbf{A}_d$	Systemmatrix des zeitdiskreten Zustandsraummodells
$\mathbf{A}_M$	Koeffizientenmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung
$\mathbf{A}_{ss}$	Systemmatrix des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells
$\mathbf{B}_d$	Eingangsmatrix des zeitdiskreten Zustandsraummodells
$\mathbf{B}_M$	Koeffizientenmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung
$\mathbf{B}_{ss}$	Eingangsmatrix des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells
c	Federkonstante
$\mathbf{C}$	Konfusionsmatrix
$\mathbf{C}_d$	Ausgangsmatrix (Messmatrix) des zeitdiskreten Zustandsraummodells
$\mathbf{C}_{ss}$	Ausgangsmatrix (Messmatrix) des Zustandsraummodells
$\mathbf{C}_q, \mathbf{C}_{\dot{q}}, \mathbf{C}_{\ddot{q}}$	Selektionsmatrizen der Ausgangsmatrix des Zustandsraummodells
d	Dämpfungskonstante
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{D}_{ss}$	Durchgriffsmatrix des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells
$E[\cdot]$	Erwartungswertoperator
f	Kraftanregung (Kap. 2.1), Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Kap. 2.3)
f_0	Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

f_s	Abtastrate
$\mathbf{f}$	Kraftvektor
g	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$\mathbf{g}$	Vektor der rechten Seite des DGL-Systems 1.Ordnung
$\mathbf{G}$	Kreiselmatrix
$\mathbf{h}$	Vektor der rechten Seite des entkoppelten DGL-Systems 1.Ordnung
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
h	Bandbreite des Dichteschätzers
$\mathbf{H}$	Bandbreitenmatrix des multivariaten Dichteschätzers
k	diskreter Zeitpunkt, Anzahl Schadensszenarien (Klassen)
K	Kern des Dichteschätzers
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
l	Anzahl gemessener Sensorsignale
$\bar{\mathbf{l}}$	Links-Eigenvektor
$\mathbf{L}$	Links-Modalmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung, untere Dreiecksmatrix der LQ-Zerlegung
m	Masse
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
n	Anzahl der Realisierungen bei Zufallsprozessen
n_q	Anzahl der generalisierten Koordinaten (Freiheitsgrade)
N	Anzahl unterschiedlicher Anregungsbedingungen, Anzahl an real zu Verfügung stehenden Messwerte
N^*	Anzahl an Hilfsmesswerten
$\mathbf{N}$	Matrix der nicht konservativen Kräfte
p	Systemordnung des Zustandsraummodells
$\hat{p}$	skalare <i>Modal Parameter Density Estimation Function</i>
P	Wahrscheinlichkeit
q	generalisierte Koordinate
$\mathbf{q}$	Vektor der generalisierten Koordinaten
$\mathbf{Q}$	Kovarianz des Prozessrauschens $\mathbf{w}$, orthogonale Matrix der LQ-Zerlegung
r	Prädiktionshorizont
$\mathbf{r}$	Zustandsvektor des DGL-Systems 1. Ordnung
$\bar{\mathbf{r}}$	rechts Eigenvektor
R_k	Matthews Korrelationskoeffizient

R	Rechts-Modalmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung
R	Kovarianz des Messrauschens $\mathbf{v}$
s	Retrodiktionshorizont
S	Kovarianz des Mess- und Prozessrauschens
S	Singulärwertmatrix
t	Zeit
t_{sec}	Signallänge der Messsignale
Δt	Abtastzeit
T	Transformationsmatrix
u	Eingangsvektor des Zustandsraummodells
U	orthonormale Matrix der Singulärwertzerlegung
v	Messrauschen
V	orthonormale Matrix der Singulärwertzerlegung
w	Prozessrauschen
x	Realisierung der Zufallsvariablen X
x	Zustandsvektor des Zustandsraummodells
X	Zufallsvariable
X	Block-Hankel-Matrix von x
y	Ausgangsvektor (Messvektor) des Zustandsraummodells
Y	Block-Hankel-Matrix von y

Griechische Symbole

α	Realteil von λ , normierte Standardabweichung, Vorfaktor
β	Vorfaktor
Γ	untere Block-Dreiecks-Töplitzmatrix
δ_{ij}	Kronecker-Delta
ε_{tol}	Toleranzschwelle zur adaptiven Ordnungsanpassung
ζ	Links-Eigenwert
η	modale Koordinate, Effektivität des Kern des Dichteschätzers
η	Vektor der modalen Koordinaten
Θ_r	erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix
λ	Rechts-Eigenwert
Λ	Diagonalmatrix der Eigenwerte λ_i

μ	Mittelwert
ξ	Dämpfungsgrad
σ	Standardabweichung
Σ	Kovarianzmatrix des Zustandsvektors $\mathbf{x}$, Matrix der Singulärwerte der SVD
ψ	kombinierter Rauschterm
Ψ	Block-Hankel-Matrix von ψ
ω	Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems, Imaginärteil von λ
ω_0	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

Indices und Akzente

$\dot{\square}$	1. zeitliche Ableitung
$\ddot{\square}$	2. zeitliche Ableitung
$\square^*$	konjugiert komplexe Größe
$\bar{\square}$	Eigenvektor, Mittelwert
$\tilde{\square}$	transformierte Größe
$\hat{\square}$	geschätzte Größe
$\check{\square}$	segmentierte Messwerte zu unterschiedlichen Anregungsbedingungen
$\square_i$	Laufindex
$\square_j$	Laufindex
$\square_k$	Größe zum diskreten Zeitpunkt k
$\square_{\text{opt}}$	optimal
$\square_{\text{O}_1}$	DGL-System 1. Ordnung
$\square_{\text{O}_2}$	DGL-System 2. Ordnung
$\square_p$	Größe zugehörig zur Ordnung p
$\square_{\text{ss}}$	zeitkontinuierliches Zustandsraummodell
$\square_{\text{red}}$	reduziert
$\square^T$	Transposition

Abkürzungen

ANN	<i>Artificial Neuronal Network</i>
AAR	<i>Association of American Railroads</i>

AE	<i>Acoustic Emission</i>
AMISE	asymptotisch integrierter mittlerer quadratischer Fehler (engl. <i>Asymptotic Mean Integrated Squared Error</i>)
AMSE	asymptotisch mittlerer quadratischer Fehler (engl. <i>Asymptotic Mean Squared Error</i>)
CBM	<i>Condition Based Maintenance</i>
CM	<i>Condition Monitoring</i>
CoSS-SSI	<i>Correlation Signal Subset-Based Stochastic Subspace Identification</i>
DGL	Differentialgleichung
EMA	Experimentelle Modalanalyse (engl. <i>Experimental Modal Analysis</i>)
EMI	Elektromechanische Impedanzmethode
EOC	<i>Environmental and Operational Condition</i>
FHG	Freiheitsgrad
IEE	<i>Institution of Electrical Engineers</i>
IET	<i>Institution of Engineering and Technology</i>
IMM	<i>Interacting Multiple Model</i>
JSD	Jensen-Shannon-Divergenz
JSDM	Jensen-Shannon-Divergenz Metrik
KF	Kalman Filter
KLD	Kullback-Leibler-Divergenz
LS	<i>Least Squares</i>
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MAD	Median der absoluten Abweichung
MISE	integrierter mittlerer quadratischer Fehler (engl. <i>Mean Integrated Squared Error</i>)
MSE	mittlere quadratische Fehler (engl. <i>Mean Squared Error</i>)
MoDE-F	<i>Modal Parameter Density Estimation Function</i>
OMA	Operationale Modalanalyse (engl. <i>Operational Modal Analysis</i>)
ÖPNV	Öffentlicher Personennahverkehr
PP	<i>Peak-Picking</i>
PCA	<i>Principal Component Analysis</i>
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
RBP	<i>Rao-Blackwellised Particle Filter</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>

SHM	<i>Structural Health Monitoring</i>
SSI	<i>Stochastic Subspace Identification</i>
SVD	Singulärwertzerlegung (engl. <i>Singular Value Decomposition</i>)

Kapitel 1

Einleitung

Der technologische Fortschritt geht einher mit einer zunehmenden Automatisierung mit dem Ziel, den Menschen von der reinen Arbeit zu befreien und ihm mehr Zeit und Raum für die schönen Dinge des Lebens zu lassen. Ob der technologische Fortschritt immer nur Vorteile bringt, oder aber ob neu entwickelte Technologien ein Rückschritt sind, mag Ansichtssache sein. Doch bestimmt kann von einem technologischen Wandel gesprochen werden, der die Menschheit seit jeher begleitet.

War die Geschwindigkeit der Entwicklung neuer Technologien zu Beginn der Menschheit noch sehr langsam, startet mit der ersten industriellen Revolution um ca. 1800, hier sei als Beispiel die Einführung von Webmaschinen oder die Konstruktion von Dampfmaschinen genannt, ein wahrhafter Boom. Web- und Dampfmaschinen erleichterten enorm die Arbeit. Mit Einzug der Elektrizität als einfacher Energieträger zog die zweite Stufe der Industrialisierung ein. Sie ermöglicht die Einführung der Fließbandarbeit und den Schichtbetrieb in Fabrikhallen, wodurch eine erhöhte Produktivität erreicht wurde. Die dritte industrielle Revolution wird der Einführung des Computers zugeschrieben. Es stand die weitere Automatisierung durch Elektrik und IT im Vordergrund. Das Ziel der aktuellen vierten industriellen Revolution ist die Vernetzung und Optimierung von Produktionsprozessen. Mit der stetig rasanten Anwendung der Digitalisierung in allen Lebensbereichen kann die Frage gestellt werden, ob dies nicht bereits der Beginn der fünften Industriellen Revolution ist.

Allen vergangenen und wohl auch zukünftigen Epochen gemein ist, dass das Bedürfnis nach Erhöhung der Sicherheit, Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit technischer Güter steigt. Ein wesentlicher Anteil der Gesamtlebenszykluskosten entsteht bei Investitionsgütern während deren Nutzungsphase. Ein prominentes Beispiel, das all die o.g. Bedürf-

nisse für sich beansprucht, sind Schienenfahrzeuge, die als Anwendungsbeispiel in dieser Arbeit betrachtet werden. Schienenfahrzeuge unterliegen während ihrer gesamten Nutzungsdauer ständigen Instandhaltungsmaßnahmen, die im Instandhaltungsplan festgelegt sind, dessen Erstellung oder Modifikation in DIN EN 17023 normativ verankert ist und beim Bau neuer Fahrzeuge mit der Ausarbeitung eines angemessenen Satzes technischer Instandhaltungs- und Betriebsdokumente einher geht, [DIN EN 17023:2019-07, 2019]. Jede Instandhaltungsmaßnahme bindet bei Schienenfahrzeugen einen erheblichen Anteil personeller und finanzieller Ressourcen. Nach DIN 31051 werden diese in vier Grundmaßnahmen *Wartung*, *Inspektion*, *Instandsetzung* und *Verbesserung der Funktionssicherheit* unterteilt und haben den Erhalt oder die Wiederherstellung der geforderten Funktion des Bauteils zum Ziel, [DIN 31051:2019-07, 2019]. Bei Maßnahmen, die vor einem Funktionsausfall durchgeführt werden – wie z.B. Wartungs- und Inspektionsmaßnahmen –, handelt es sich um sog. präventive Instandhaltungsmaßnahmen, während Maßnahmen zur Instandsetzung, die nach einem Funktionsausfall ergriffen werden, als korrektive Instandhaltungsmaßnahmen bezeichnet werden und nach Möglichkeit zu vermeiden sind. Eine Reduzierung des Instandhaltungsaufwandes, bspw. durch Verringerung oder Optimierung der Instandhaltungsmaßnahmen während der gesamten Nutzungsdauer, von meist 30 Jahren oder mehr, hat daher zwangsläufig eine erhöhte Verfügbarkeit und damit eine direkte Senkung der Gesamtlebenszykluskosten der Schienenfahrzeuge zur Folge.

Um einen sicheren Betriebszustand zu garantieren, werden Instandhaltungsmaßnahmen nach DIN 17023 in festgelegten Zeitabständen oder nach einer festgelegten Zahl an Betriebsstunden/-kilometern – sog. Wartungsintervalle bzw. -fristen – ohne vorherige Zustandsermittlung durchgeführt. Diese Methodik ist der präventiven Instandhaltung nach DIN EN 133306 [DIN EN 13306:2018-02, 2018] zu zuordnen und als konservativer Ansatz zu bewerten, da Bauteile nicht nach ihrem wirklichen Zustand getauscht werden. Dies führt zu einem zu einer unwirtschaftlichen Ausnutzung der Komponenten, wenn diese vor Ablauf ihrer real möglichen Lebensdauer getauscht werden. Bleiben zum anderen funktionsbeeinträchtigende Beschädigungen zwischen zwei Instandhaltungsmaßnahmen unentdeckt, sind zur Behebung außerplanmäßige, kostenintensive korrektive Maßnahmen notwendig. Dies wiederum führt unter dem Aspekt der Steigerung der Sicherheit zu einer Verkürzung der Wartungsintervalle und damit erhöhten Kosten.

Eine Alternative zur Instandhaltung mit festen, vorausbestimmten Wartungsintervallen bietet die zustandsbasierte Instandhaltung (engl. *Condition Based Maintenance*, CBM), mit dem Ziel auf Grundlage des aktuellen Zustands der Komponenten geeigne-

te Instandhaltungsmaßnahmen zu definieren und vorausschauend zu planen, [DIN EN 13306:2018-02, 2018]. Zur Feststellung des technischen Zustandes werden Methoden der Zustandsüberwachung (engl. *Condition Monitoring*, CM) basierend auf technischen Parametern, die im Zusammenhang mit der Funktion, dem Zustand und den vorgegebenen Qualitätskriterien stehen, angewandt, [DIN ISO 17359:2018-05, 2018]. Im Gegensatz zur Inspektion, als direkte Zustandsbestimmung durch Ausbau und Prüfung der betroffenen Komponente, erfolgt die Zustandsermittlung mittels indirekter Beobachtung oder Messung – diese können sowohl manuell oder automatisch durchgeführt werden – des Objektverhaltens ohne Betriebsunterbrechung und Demontage des Überwachungsobjekts, [DIN ISO 17359 Bbl 1:2017-02, 2017]. Typische Parameter sind: Schwingungen, Temperaturen, tribologische Analysen, Verunreinigungen, Leistungen, Drehzahlen.

Die vorgenannten Zusammenhänge und Verknüpfungen lassen sich im S-D-I-P-F Diagramm in Abbildung 1.1 anschaulich darstellen und bilden den Zustand einer Komponente über dessen Lebensdauer ab. Die Buchstaben S(pezifikation), D(esign), I(nstallation), P(otenzieller Ausfall), F(unktionsausfall) kennzeichnen dabei die wesentlichen Phasen in-

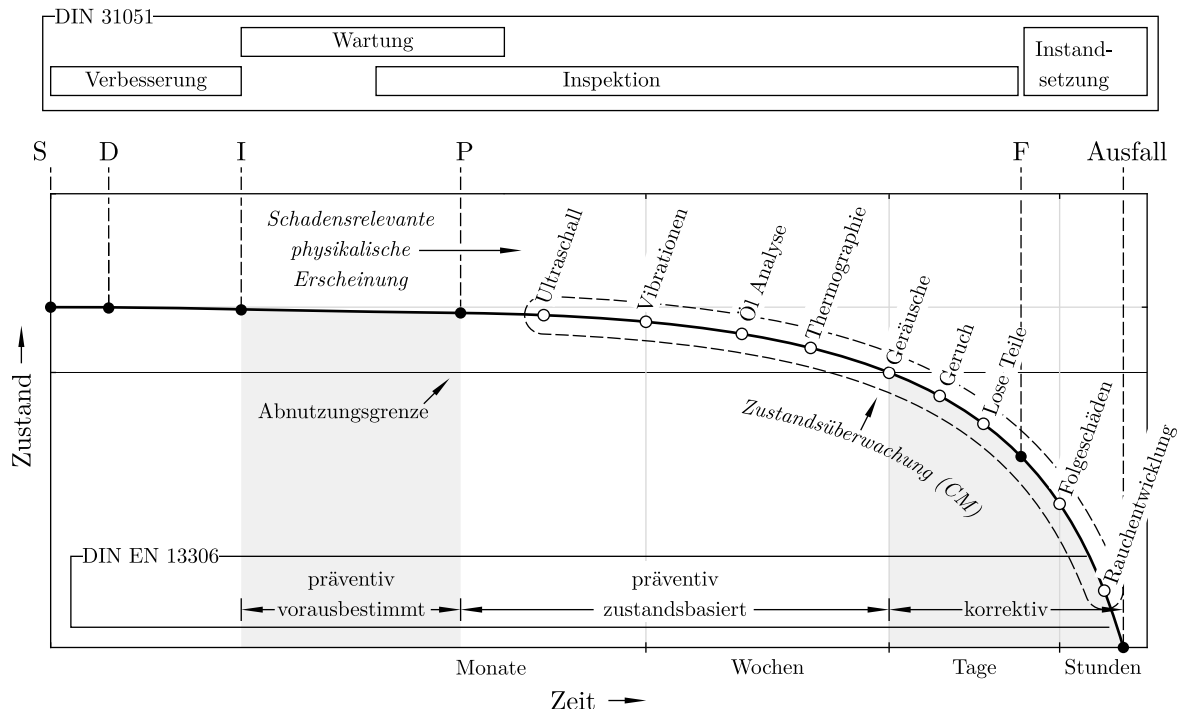


Abbildung 1.1: Darstellung der Zustandsänderung einer Komponente über der Zeit im S-D-I-P-F Diagramm. Gegenüberstellung der Grundinstandhaltungsmaßnahmen nach DIN 31051, der Instandhaltungsstrategien nach DIN EN 13306, sowie den Methoden der Zustandsüberwachung nach DIN ISO 17359.

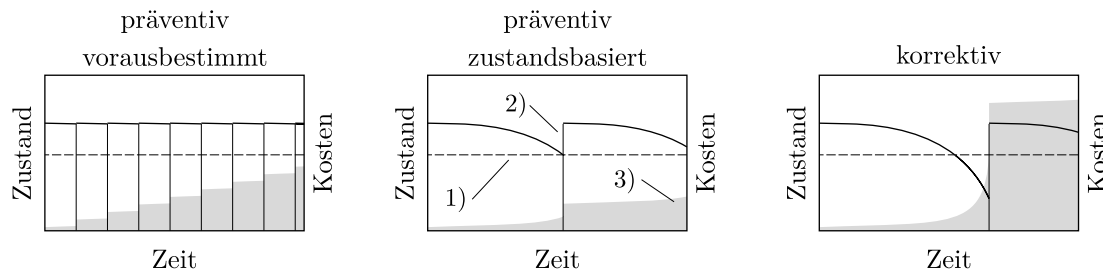


Abbildung 1.2: Vergleich der Kosten unterschiedlicher Instandhaltungsstrategien. 1) Abnutzungsgrenze, 2) Instandhaltungsmaßnahme, 3) Gesamtkosten aller Maßnahmen.

nerhalb des Lebenszyklusses. Das grundlegende P-F Diagramm wurde von [Nowlan & Heap, 1978] erstmalig zur Veranschaulichung der Systemverfügbarkeit und Analyse von Instandhaltungsmaßnahmen bei Flugzeugen verwendet und über die Jahre durch [Plucknette, 2006] zum D-I-P-F und zuletzt durch [O’Hanlon, 2022] zum S-D-I-P-F weiterentwickelt. Anhand des qualitativen Verlaufes des Zustandes einer Komponenten und der zeitlichen Zuordnung der verschiedenen Instandhaltungsstrategien ist ein Vergleich des Instandhaltungsaufwandes möglich, der in Abbildung 1.2 dargestellt ist. Hier wird der unwirtschaftliche Effekt der präventiv vorausbestimmten Instandhaltungsstrategie sichtbar, resultierend aus den häufig anfallenden Wartungsintervallen. Eine präventive zustandsorientierte Strategie reduziert die Anzahl der Wartungsarbeiten, bei gleichzeitiger Reduzierung des Aufwandes. Dieser resultiert aus der geringeren Anzahl der durchzuführen Maßnahmen, hauptsächlich jedoch durch die verbesserte Ausnutzung der betreffenden Komponenten. Der höchste Aufwand entsteht bei der korrektiven Instandhaltung, da hier neben der eigentlichen Komponente i.d.R. auch Folgeschäden ungeplant instandgesetzt werden müssen. Um den Vorteil der zustandsbasierten Instandhaltung zu nutzen, ist eine zuverlässige Zustandsermittlung und Prognose der Restlebensdauer notwendig.

Eine Erweiterung zu den Methoden der Zustandsüberwachung bietet das *Structural Health Monitoring* (SHM). Unter SHM „... wird die kontinuierliche oder periodische und automatisierte Methode zur Bestimmung und Überwachung des Zustandes eines Überwachungsobjektes innerhalb der Zustandsüberwachung (gemäß DIN ISO 17359) verstanden. Dies erfolgt durch Messungen mit permanent installierten bzw. integrierten Aufnehmern und durch Analyse der Messdaten.“, [FA SHM, 2014]. Ein SHM-System zeichnet sich vor allem durch die – auch an schwer zugänglichen und prüfaren Stellen – applizierten Sensoren, als auch durch die verwendeten Auswertelgorithmen des automatisierten Diagnosesystems aus, welches der Hauptfokus dieser Arbeit ist. Allen vorgenannten Konzepten und Methoden zur Zustandsermittlung gemein ist ihr zerstörungsfreier Charakter.

1.1 SHM - Ein Überblick

SHM ist ein interdisziplinärer Ansatz, der die Integrität eines Bauteils, einer Struktur oder einer Komponente – dem Überwachungsobjekt – zu jedem Zeitpunkt während des Betriebes bestimmt. Dabei bedient sich das Forschungsfeld der Methoden der Mechanik, Werkstofftechnik & Materialkunde sowie Signalverarbeitung, Sensortechnik und der Datenanalyse, [Chang, 1999]. Auf Grund der kontinuierlichen Zustandsbewertung des Überwachungsobjektes werden auftretende Schädigungen in einem frühen Stadium identifiziert und Prognosen zur Schadensentwicklung und zur Restlebensdauer ermöglicht, [Balageas *et al.*, 2006]. Somit können frühzeitige – und vor allem planbare – Instandhaltungs- und Wartungsmaßnahmen ergriffen werden. Plötzliche, unerwartete Ausfälle des Überwachungsobjektes, die eine Vielzahl von weiteren unvorhersehbaren und meist kostenintensiven Maßnahmen nach sich ziehen, werden vermieden. SHM-Systeme können nach verschiedenen Gesichtspunkten kategorisiert werden. Nach [Rytter, 1993] wird der Detailgrad des Informationsgehaltes eines SHM-Systems in vier sog. Level unterteilt, wobei mit jedem höheren Level der Informationsgehalt und die Anforderungen an ein SHM-System steigen:

Level I Schadenserkennung – *Qualitative Aussage über eine mögliche Schädigung*

Level II Schadenslokalisierung – *Information zur Position der Schädigung*

Level III Schadensbewertung – *Ausmaß der Schädigung*

Level IV Schadenskonsequenz – *Prognose zur Restlebensdauer*

Zur Prognose der Restlebensdauer in Level IV ist nicht nur das Ausmaß bzw. die Größe des Schadens von elementarer Bedeutung, sondern auch die Kenntnis des Schadentyps, dessen Bewertung als Unterpunkt von Level III angesehen werden kann, [Worden & Dulieu-Barton, 2004; Farrar & Worden, 2012].

Die wenigsten Schädigungen an Bauteilen können direkt gemessen werden; führen aber meist zu einer Änderung der mechanischen Strukturparameter. Diese lassen sich mithilfe der heute verfügbaren Messtechnik ermitteln. Die Schadensermittlung erfolgt somit indirekt. Abhängig von der Überwachungsaufgabe können dabei verschiedene physikalische Prinzipien genutzt werden, wie z.B. die Messungen von Beschleunigungen oder Schwinggeschwindigkeiten, die einen Aufschluss über die Änderung des Schwingverhaltens (Eigenfrequenzen, Eigenmoden) geben, [Fugate *et al.*, 2001; Fritzen, 2006]. Ein weiteres

Prinzip ist die Nutzung von sich im Überwachungsobjekt ausbreitenden Wellen, [Ostachowicz *et al.*, 2013; Giurgiutiu, 2014]. Diese können in zweierlei Hinsicht verwendet werden. Zum einen bei der Schallemissionsprüfung (engl. *Acoustic Emission*, AE), bei der auftretende Schäden, z.B. Risse, zu einer plötzlichen Änderung im Werkstoff und damit zu einer Emission von Schall führen. Aber auch durch geführte Wellen, wobei das Überwachungsobjekt gezielt mit hochfrequenten Wellenpaketen (-formen) aktiv angeregt wird. Diese breiten sich – auch über lange Distanzen – aus und werden an Schadstellen reflektiert. Niederfrequente Dehnungsmessungen mittels Dehnmessstreifen, oder optische Faser-Bragg-Gitter [Güemes & Sierra-Perez, 2013], aber auch Verfahren basierend auf elektromechanischen Prinzipien, wie die elektromechanische Impedanz Methode (EMI) [Park *et al.*, 2003] können zur Messung der mechanischen Strukturparameter genutzt werden. Um Informationen zum Zustand des Überwachungsobjektes zu ermitteln, müssen die Messgrößen unausweichlich von der Schädigung beeinflusst werden. Die genaue Auswahl der Messgröße hängt daher von der genauen Überwachungsaufgabe ab. Neben der Messung der mechanischen Strukturparameter ist es häufig sinnvoll, auch die Umgebungs- und Betriebsbedingungen (engl. *Environmental and Operational Conditions*, EOC) wie, z.B. Temperaturen, Geschwindigkeiten oder Drehzahlen, zu erfassen.

Neben der Kategorisierung im Hinblick auf den Informationsgehalt und das verwendete physikalische Messprinzip können SHM-Systeme in lokale oder globale [Fritzen, 2006; Farrar & Worden, 2012], passive oder aktive [Balageas, 2006; Farrar & Worden, 2012], modellfreie oder modellbasierte [Figueiredo *et al.*, 2009; Worden *et al.*, 2011] und referenzfreie oder referenzbasierte Verfahren [Sohn *et al.*, 2001; Sohn & Park, 2005] unterteilt werden. Lokale Methoden prüfen die zu untersuchende Struktur in nur einem kleinen Teilbereich (an sog. *Hotspots*) und werden dort angewendet, wo Schädigung vorerst keine direkten Einfluss auf das globale Verhalten des Überwachungsobjektes haben. Globale Methoden können dort angewendet werden, wo bereits kleine Schädigungen einen direkten Einfluss auf das Gesamtverhalten des Überwachungsobjekts haben. Bei passiven SHM-Systemen werden bereits vorhandene, aus dem Betrieb resultierende externe Kräfte zur Anregung der Struktur verwendet, wohingegen bei aktiven System eine gezielte Anregung der Struktur durch das SHM-System erfolgt. Bei modellbasierten SHM-Systemen wird bei der Auswertung der Messwerte ein vorher bestimmtes Ersatzmodell zugrunde gelegt, welches bei modellfreien Systemen entfällt. Schlussendlich kann eine Kategorisierung von SHM-Systemen nach dem verwendeten Bewertungsansatz vorgenommen werden. Bei referenzbasierten Verfahren werden die aktuellen Ergebnisse des SHM-Systems mit einer

vorher festgelegten Bewertungsreferenz verglichen. Im Gegensatz dazu, bewerten referenzfreie SHM-System den aktuellen Zustand des Überwachungsobjektes ohne eine im Vorfeld fest definierte Referenz, die in der Literatur weitläufig als Baseline bezeichnet wird.

Unabhängig der vorgenannten Kategorisierungsmöglichkeiten kann der Schadensüberwachungsprozess nach [Farrar & Worden, 2012] in vier elementare Schritte aufteilt werden.

Schritt 1: Operationelle Bewertung – *Definition der Überwachungsgröße*

Schritt 2: Datenerfassung – *Definition des Messsystems und der Messdaten*

Schritt 3: Merkmalsselektion – *Extraktion der relevanten Informationen*

Schritt 4: Statistische Bewertung – *Entscheidung und Klassifizierung*

1.2 SHM - Ein Überblick im Eisenbahnwesen

Der Begriff des *Condition Monitorings* (CM) im Bereich der Schienenverkehrstechnik zog zur Jahrtausendwende ein. Als Beispiel soll hier die Erkennung von Lagerschäden genannt sein. In [Sneed & Smith, 1998] werden erste Messergebnisse zur Detektion von Lagerschäden basierend auf Beschleunigungssensoren, die auf den Lagergehäusen montiert waren, dargestellt. Kurz vorher wurde von der *Association of American Railroads* (AAR) ein schienenseitiges Diagnosesystem zur Lagerüberwachung basierend auf Infrarot Sensoren zur Identifikation von sog. Heißläufern (Radsatzlager mit hohen Temperaturen) vorgestellt. Nachteilig an diesem System war die Abhängigkeit des Sensorabstandes zu den Lagern. War der Sensor zu weit vom Lager entfernt, konnte ein Heißläufer nicht erkannt werden und führte zu ungewollten Stillstandszeiten oder im schlimmsten Fall zu Entgleisungen. Dieser Nachteil kann durch kontinuierliche Überwachung der Lager mit fahrzeugseitig angebrachten Beschleunigungssensoren – die Lagerschäden bereits im Frühstadium erkennen, bevor ein messbarer Temperaturanstieg deutlich wird – kompensiert werden.

Anfang 2004 wird deutlich, dass CM Einzug in den Schienenverkehrssektor erhält. Der Untertitel *Why? What? How?* des *IEE Seminars Railway Condition Monitoring* in Derby, UK ist bezeichnend für die Anfänge einer neuen Forschungsrichtung [Goodall, 2004]. Er verkörpert die Unsicherheit (*What?*), den womöglichen Nutzen (*Why?*) und die Fragen der Umsetzung (*How?*) einer neuartigen Technologie. All diese drei Fragen sind

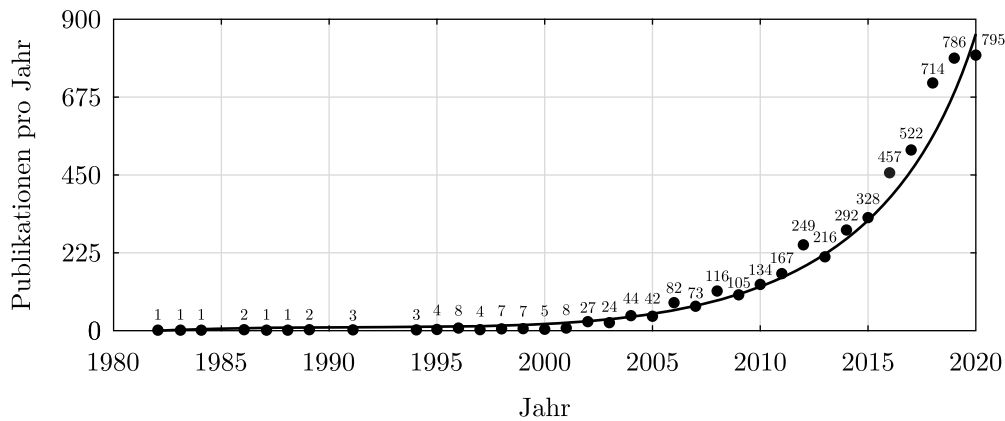


Abbildung 1.3: Anzahl an Publikationen in englischer Sprache pro Jahr zum Thema Zustandsüberwachung im Bereich Schienenverkehrstechnik, [Kostrzewski & Melnik, 2021].

kennzeichnend am Anfang einer neuen Idee. Aus dem anfänglichen Seminar mit 10 Beiträgen wird später die schnellwachsende *IET International Conference on Railway Condition Monitoring*. Ebenso berichtet [Tsunashima, 2018] über einen deutlichen Zuwachs von CM Veröffentlichungen bei dem *Symposium on Speed-up and Sustainable Technology for Railway and Maglev Systems* (STECH). Wurden im Jahr 2003 lediglich 2 Paper vorgestellt, stieg die Anzahl der Beiträge im Jahr 2015 auf 21. Der in Abbildung 1.3 dargestellte exponentielle Zuwachs an Publikationen zum Themengebiet der Zustandsüberwachung im Schienenverkehrssektor wird auch in der Literaturstudie von [Kostrzewski & Melnik, 2021] sichtbar und bekräftigt damit das steigende Interesse und den Forschungsbedarf, der in den Übersichtsartikeln von [Goodall & Roberts, 2006] und [Bruni *et al.*, 2007] aufgegriffen wird. Heutzutage gehört das Themengebiet zum Standardrepertoire einer jeden Fachkonferenz auf dem Gebiet Wartung und Instandhaltung und bedient sich den in Kapitel 1.1 vorgestellten Verfahren und Methodiken. Neben der dort bereits vorgenommenen Klassifizierung der SHM-Methoden kann im Eisenbahnwesen eine zusätzliche Einteilung in Abhängigkeit der Platzierung der Sensoren am Fahrzeug oder der Infrastruktur vorgenommen werden [Lagnebäck, 2007; Li *et al.*, 2017]. Im wesentlichen lassen sich vier Kategorien in Abhängigkeit der Sensorposition und des Überwachungsobjektes ableiten:

1. Infrastrukturbasiertes Infrastrukturmonitoring
2. Infrastrukturbasiertes Fahrzeugmonitoring
3. Fahrzeugbasiertes Infrastrukturmonitoring
4. Fahrzeugbasiertes Fahrzeugmonitoring

Bei den infrastrukturbasierten Monitoringsystemen (vgl. [Ngigi *et al.*, 2012]) werden die Sensoren zur Bewertung der Infrastruktur oder des Fahrzeuges fest im Bereich der Infrastruktur platziert, wohingegen bei den fahrzeuggestützten Monitoringsystemen (vgl. [Ward *et al.*, 2011]) die Sensoren am Fahrzeug angebracht werden.

1.3 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit

In dieser Arbeit wird ein passives SHM-System entwickelt, das basierend auf Beschleunigungsmessungen global und referenzbasiert den Zustand der Primärfederung von Schienenfahrzeugen bewertet, ohne ein detailliertes math. Modell der zu überwachenden Struktur zu berücksichtigen. Die unterschiedlichen Schädigungsgrade und -kombinationen werden in verschiedene Schadensszenarien eingeteilt. Da die Sensoren auf dem Fahrwerk befestigt werden, ist das vorgestellte Verfahren der Gruppe der fahrzeuggestützten Fahrzeugmonitoringsysteme zuzuordnen.

Die Federung bei Schienenfahrzeugen bildet das Bindeglied zum einen zwischen den Radsätzen und dem Fahrwerksrahmen (Primärfederung) und zum anderen zwischen dem Fahrwerksrahmen und dem Wagenkasten (Sekundärfederung). Neben der Erhöhung des Fahrkomforts durch Reduktion von Vibrationen und Stößen, verursacht durch Gleislagefehler, beeinflusst sie maßgeblich die Laufdynamik der Schienenfahrzeuge. Durch Sicherstellung ausreichender Radkräfte hat die Federung einen elementaren Einfluss auf die Entgleisungssicherheit. Entgleisungen gehören zu den dritthäufigsten Unfallursachen im Schienenverkehr, die vor allem auf Gleisfehler (Spurverbreiterung, Schienenverkipfung) und unzureichende Spurführungskräfte (hohe laterale Kräfte bei gleichzeitig geringen vertikalen Kräften) zurückzuführen sind, [Wilson *et al.*, 2020; UIC, 2023]. Unzureichende Spurführungskräfte stellen sich vor allem in Kurvenfahrten, bei hohen Geschwindigkeiten, aber vor allem bei unausgeglichene Radaufstandskräften ein. Diese werden durch die richtige Einstellung der Federung vermieden. Während falschen Einstellungen bei Inbetriebnahme und Wartungsmaßnahmen konstruktiv entgegengewirkt werden kann, verursachen defekte Federungen im Betrieb die o.g. unausgegleichen Radaufstandskräfte. Diese erzeugen, vorerst unbemerkt, einen erhöhten Verschleiß an Rädern und Schienen, bis schließlich das Entgleisungsrisiko steigt und – wenn nicht rechtzeitig erkannt – dies zur Entgleisung führen kann. Gebrochene Federn und defekte Federungssysteme gehören zu den zehn häufigsten Entgleisungsursachen, [Robinson *et al.*, 2012]. Ein SHM-System zur Überwachung der Funktionsfähigkeit des Federungssystems während des Betriebs

kann dazu beitragen, dass sich die Zahl der Entgleisungen reduziert, bei gleichzeitiger Erhöhung der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit des Schienenfahrzeuges.

Während des Betriebes sind die Primär- und Sekundärfederstufen ständigen Betriebsbelastungen ausgesetzt. Das schwingungsfähige System, bestehend aus Rädern, Rahmen und Wagenkasten wird dadurch permanent angeregt. Die Hauptanregung erfolgt durch den Rad-Schiene-Kontakt. Daher bietet sich ein SHM-System basierend auf Beschleunigungsmessungen an, um den Zustand der Primärfederung anhand des Vibrationsverhaltens zu identifizieren. In Alfi et al. und Wei et al. werden sowohl modell-basierte, als auch daten-basierte Ansätze zur Schadensdiagnose des Federungssystems von Schienenfahrzeugen vorgestellt, [Alfi et al., 2011; Wei et al., 2013].

Die modell-basierten Verfahren verwenden u.a. *Kalman Filter* (KF,[Li & Goodall, 2004]), *Interacting Multiple Models* (IMM, [Hayashi et al., 2008; Tsunashima & Mori, 2010]) oder *Rao-Blackwellised Particle Filter* (RBPF, [Li et al., 2007, 2003]), [Ward et al., 2010; Strano & Terzo, 2019]. All diesen Verfahren gemein, ist die Notwendigkeit eines akkuraten mathematischen Modells, welches ihren Einsatz für praxisnahe Monitoringsysteme in der Realität erschwert.

Eine Alternative bieten hier daten-basierte Ansätze, die rein auf den gemessenen Beschleunigungen basieren. Zur Anwendung kommen hier statistische Methoden die auf einer reinen Kennwertauswertung (RMS, [Melnik & Kostrzewski, 2012]) oder erweiterten Verfahren wie der *Principal Component Analysis* (PCA, [Wei et al., 2012]) basieren, aber auch Methoden der künstlichen Intelligenz die auf *Artificial Neuronal Networks* (ANN,[Kumar et al., 2022]) zurückgreifen. Nachteilig an den statistischen Methoden ist die fehlende physikalische Interpretierbarkeit der Ergebnisse, die am Beispiel der PCA bei der Transformation und Datenreduktion verloren geht. Das Diagnoseergebnis bei den rein kennwertbasierten Verfahren wird nicht nur durch die Schädigungszustände selbst beeinflusst, sondern auch durch unterschiedliche Betriebsbedingungen, wie erhöhte Betriebslasten durch Weichenfahrten. Solche erhöhten Betriebslasten suggerieren dann einen Defekt bei einer sonst intakten Komponente.

Ebenfalls zu den daten-basierten Ansätzen gehören die Verfahren der operationalen Modalanalyse (engl. *Operational Modal Analysis*, OMA), die in dieser Arbeit genutzt werden. Bei der OMA werden die physikalisch interpretierbaren modalen Parameter (Eigenfrequenzen, Eigenformen, Dämpfung) während des Betriebes bestimmt. Im Gegensatz zu Verfahren der experimentellen Modalanalyse (engl. *Experimental Modal Analysis*, EMA) wird bei der OMA auf eine definiert eingebrachte Belastung/Anregung verzichtet und die

bereits aus dem Betrieb entstehenden Anregungsbedingungen genutzt. Diese Verfahren werden auch als *Output-Only* Methoden bezeichnet, da zur Extraktion der modalen Parameter lediglich die gemessene Strukturantwort verwendet wird. Die Auswertung kann sowohl im Frequenzbereich (bspw. *Peak-Picking*, PP), als auch im Zeitbereich (bspw. *Stochastic Subspace Identification*, SSI) durchgeführt werden, [Peeters & de Roeck, 2001; Reynders, 2012].

In dieser Arbeit wird die SSI-Methode verwendet und erweitert. Grundlegend basiert die SSI auf der Annahme, dass das zu untersuchende System ausschließlich durch weißes Rauschen angeregt wird, [van Overschee & de Moor, 1995, 1996; Peeters & de Roeck, 1999]. Ergebnis der Systemidentifikation sind Systemmatrizen eines linearen Zustandsraummodells, aus denen die modalen Parameter abgeleitet werden können. Da i.d.R. die Modellordnung des zu identifizierenden Zustandsraums unbekannt ist, werden die Berechnungsergebnisse für eine bestimmte Anzahl an Modellordnungen in sog. Stabilisierungsdiagrammen dargestellt, bis sich ein interpretierbares Ergebnis ausbildet. Dieses erfordert einen hohen Grad an Experten- und Erfahrungswissen um die physikalischen von den nicht-physikalischen Ergebnissen zu trennen. Ein weitverbreiteter Ansatz, die nicht-physikalischen Ergebnisse herauszufiltern, ist die Anwendung von ausgewählten Filterkriterien (bis zu 14 Kriterien und mehr), deren Schwellenwerte wiederum im Vorfeld festgelegt werden müssen, [Reynders *et al.*, 2012].

Dieses bekannte Vorgehen wendet auch Liu zur Zustandsermittlung der Federung eines Y25 Drehgestells an und erweitert das Verfahren zur sog. CoSS-SSI Variante (engl. *Correlation Signal Subset-Based Stochastic Subspace Identification*), [Liu, 2020]. Ähnlich, wie die in dieser Arbeit entwickelte Erweiterung der konventionellen SSI, werden die modalen Parameter nicht aus einem einzigen Anregungsszenario ermittelt, sondern aus einem Sub-Set von unterschiedlichen Anregungsszenarien, [Liu *et al.*, 2020]. Ziel dieser Sub-Set Bildung ist die Berücksichtigung von nicht stationären Prozessen, wie sie bei der Fahrt von Schienenfahrzeugen bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten vorkommen. Ebenso wird durch die Segmentierung nicht-physikalischen Ergebnissen durch Verletzen der Annahmen von weißem Rauschen entgegengewirkt.

Neuartig und Kern dieser Arbeit ist die erweiterte Bildung und automatisierte Auswertung der Stabilisierungsdiagramme im Rahmen der Schädigungsbeurteilung durch Anwendung der Dichteschätzung basierend auf der Parzen-Fenster-Methode. Hiermit lassen sich auf Basis einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion die physikalischen Ergebnisse extrahieren. Die grundlegende Idee dahinter ist, dass nicht-physikalische Ergebnisse zufällig

verteilt bei unterschiedlichen Anregungsszenarien auftreten, wo hingegen die physikalischen Eigenschaften in fast jedem Anregungsszenario vorhanden sind. Durch Anwendung des Dichteschätzers werden die nicht-physikalischen Ergebnisse herausgefiltert. Für diesen Zweck wird in dieser Arbeit ein neuartiger merkmalsbasierter Bandbreitenselektor entwickelt. Nicht-physikalische Ergebnisse treten vermehrt auf, wenn Ergebnisse auf Basis einer zu hohen Modellordnung im Vergleich zur realen Modellordnung berechnet werden. Daher wird in dieser Arbeit zusätzlich eine adaptive Ordnungsanpassung eingeführt, basierend auf dem Informationszugewinn bei Berechnung höherer Ordnungen. Dieser wird anhand der Änderungsrate der Jensen-Shannon-Divergenz Metrik bestimmt. Die Jensen-Shannon-Divergenz Metrik wird im nächsten Schritt ebenfalls zur Klassifizierung unterschiedlicher Schadensszenarien herangezogen. Die hier vorgestellte Methodik wird am Beispiel von Schienenfahrzeugkomponenten in dieser Arbeit angewendet.

Aufgebaut ist die vorliegende Arbeit wie folgt: In Kapitel 2 werden alle Grundlagen für die neue SHM-Methode basierend auf dem *Parzen Estimator* aufgeführt. Dieses beinhaltet vor allem die Modellierung technischer Schwingungssysteme und deren Eigenschaften, die Herleitung der SSI und der Parzen-Fenster-Methode so wie einen kurzen Abriss zum grundlegenden Aufbau von Schienenfahrzeugen. In Kapitel 3 wird die Entwicklung der neuen SHM-Methode basierend auf der neu eingeführten *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F) dargelegt und die *Health Assessment Strategy* vorgestellt. Kapitel 4 untersucht an einem analytischen Zwei-Massenschwinger die Anwendung der neu entwickelten Methode bei einer Anregung mit nicht-weißem Rauschen. Kapitel 5 wendet die Methode auf ein komplexes Zugmodell in der Simulationsumgebung SIMPACK an. Gleichzeitig wird die Verknüpfung zu den rechnerisch ermittelten modalen Parametern hergestellt ehe dieses Kapitel mit einem Ausblick auf die mehrdimensionale Erweiterung der Methode endet. In Kapitel 6 wird die Methode auf ein reales Eisenbahndrehgestell angewendet und gibt einen detaillierten Einblick in die Funktionsweise der *Health Assessment Strategy*. Dieses Kapitel unterstreicht die Stärke der neu entwickelten Methode anhand der gleichzeitigen Klassifikation dreier Schädigungszustände mittels Matthews Korrelationskoeffizient. Mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und einem Ausblick endet die vorliegende Arbeit mit Kapitel 7.

Kapitel 2

Grundlagen

Zur Identifizierung von geschädigten Komponenten an Schienenfahrzeugen werden in der vorliegenden Arbeit Beschleunigungsmessungen verwendet, die durch eine automatisierte OMA ausgewertet werden. Diese Ergebnisse werden mit der in dieser Arbeit neue entwickelten SHM-Methode basierend auf dem Ansatz der Dichteschätzung bewertet und klassifiziert. Dieses Kapitel beginnt mit einer kurzen Erläuterung zum allgemeinen Vorgehen bei der Analyse technisch komplexer Systeme, ehe die für diese Arbeit notwendigen theoretischen Grundlagen aufgeführt werden. Zur besseren Nachvollziehbarkeit und auch für spätere mögliche Weiterentwicklungen und Ergänzungen wird ein Top-Down Ansatz verwendet, der zuerst den allgemeinen und im Anschluss den für die Arbeit relevanten Fall aufführt.

Mit zu den wichtigsten Ingenieuraufgaben zählt die Modellbildung zur Berechnung, Vorhersage und Analyse technisch komplexer Systeme. Die Herausforderung liegt darin, ein geeignetes mathematisches Modell aufzustellen, welches an die jeweiligen Fragen- und Aufgabestellungen angepasst ist. Das Modell soll dabei das technische System mit Hinblick auf die Fragen- und Aufgabenstellungen so genau wie möglich abbilden. Jedoch ist ebenfalls darauf zu achten, dass das Modell zur mathematischen Behandlung möglichst einfach ist. Diese beiden widersprüchlichen Forderungen machen die Modellbildung für den Ingenieur zur Herausforderung. In Abbildung 2.1 ist eine mögliche prinzipielle Vorgehensweise zur systematischen Modellerstellung dargestellt, [Popp & Schiehlen, 1993].

Die Grundidee besteht darin, die Realität bzw. das komplexe Gesamtsystem in kleine interessierende Teilsysteme aufzuteilen, die jeweils für sich betrachtet modelliert werden können. Werden die Schnittstellen der Teilsysteme sauber definiert, können zum späteren Zeitpunkt die einzelnen Teilsysteme wieder zusammengefügt werden.

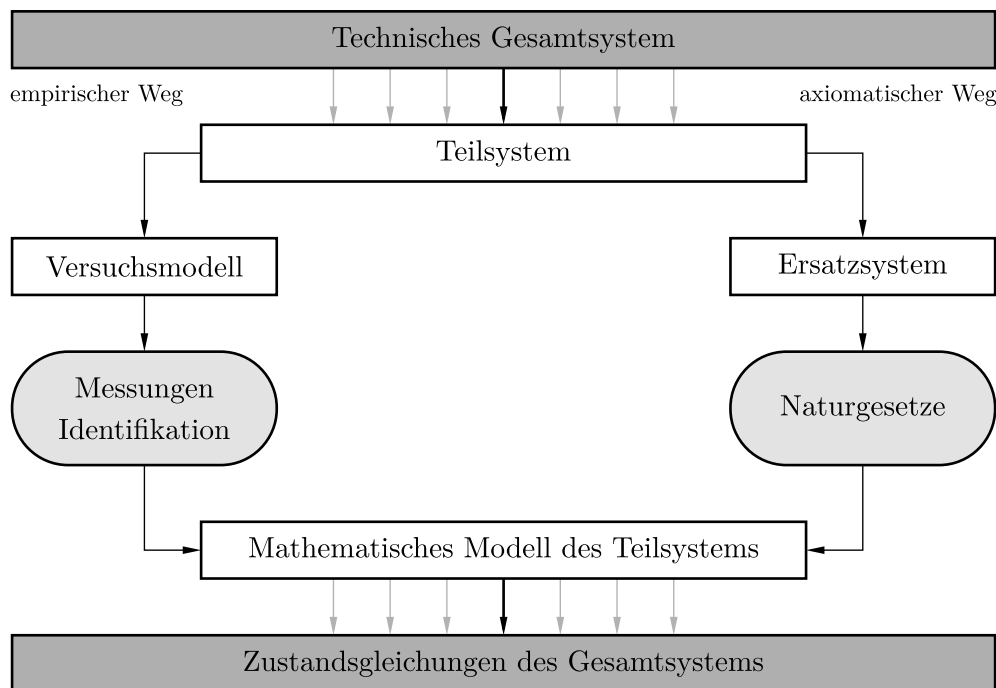


Abbildung 2.1: Vorgehensweise bei der Modellbildung, [Popp & Schiehlen, 1993].

Zwei prinzipielle Wege führen zum mathematischen Modell. Auf der einen Seite ist dies der empirische Weg. Aufbauend auf Messungen an Versuchsmodellen können mit Hilfe von Identifikationsverfahren und der Kenntnis der gemessenen Eingangs- und Ausgangsverhalten die mathematischen Modelle bestimmt werden. Dabei gilt es zum einen die Systemstruktur zu identifizieren. In einem weiteren Schritt sind dann die Systemparameter zu bestimmen. Ist die Systemstruktur bereits bekannt, liegt ein Problem der Parameteridentifikation vor. Hingegen wird von einem „Black-Box-Problem“ gesprochen, wenn sowohl Systemstruktur, als auch -parameter zu Beginn unbekannt sind und identifiziert werden müssen. Auf der anderen Seite baut der axiomatische Weg auf den bereits bekannten Naturgesetzen auf. Dazu wird das komplexe technische Teilsystem zu Beginn in ein einfaches Ersatzsystem überführt, welches die wichtigen Phänomene der zu untersuchenden Fragestellungen enthält. Basierend drauf werden dann die Naturgesetze angewendet, die bereits Informationen zur Systemstruktur und -parametern enthalten. Meist sind die Zahlenwerte der Systemparameter unbekannt und müssen über den empirischen Weg bestimmt werden.

In dieser Arbeit wird sowohl der empirische Weg für die Identifizierung des Schädigungszustandes, als auch der axiomatische Weg für die Entwicklung und Überprüfung der SHM-Methode verwendet.

2.1 Math. Modelle technischer Schwingungssysteme

Zur Aufstellung eines mathematischen Modells technischer Schwingungssysteme auf dem axiomatischen Weg stehen drei bekannte Verfahren zu Verfügung. Charakterisierend für die unterschiedlichen Verfahren sind die Anzahl der Freiheitsgrade. Kontinuierliche Systeme sind aus elastischen Körpern mit verteilter Steifigkeits- und Massenbelegung aufgebaut. Die Abstände der materiellen Punkte können sich mit der Zeit verändern. Es ergeben sich unendlich viele Freiheitsgrade. Finite-Elementen-Systeme sind aus einfachen, elastischen Elementen aufgebaut. Im Gegensatz zu kontinuierlichen Systemen besitzen sie eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden. Die Anzahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten der Knotenpunkte entspricht dabei der Anzahl der Freiheitsgrade. Im Unterschied zu den kontinuierlichen und Finite-Elementensystemen bestehen Mehrkörpersysteme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Die wichtigste Eigenschaft starrer Körper ist, dass sich die Abstände der materiellen Punkte innerhalb eines Körpers während der Zeit nicht ändern. Die einzelnen starren Körper werden i.d.R. durch masselose Elemente wie z.B. Federn, Dämpfern und Aktoren miteinander verbunden. Im Gegensatz zu den Finite-Element-Systemen besitzen die MK-Systeme meist weniger Freiheitsgrade und benötigen daher meist weniger Rechenleistung. In dieser Arbeit werden die Zugkomponenten durch Mehrkörpersysteme abgebildet.

Technische Systeme, so auch die Komponenten der Schienenfahrzeuge, bestehen stets aus Bauteilen, die durch ihre Massen- und Elastizitäts- bzw. Steifigkeitseigenschaften gekennzeichnet sind. Hinzu kommen i.d.R. Einflüsse aus Dämpfung und der Erregung resultierend aus äußeren Kräften. Demnach müssen mathematischen Modelle vier Grundeigenschaften technischer Systeme beschreiben können:

- Massenträgheit
- Elastizität (Steifigkeit)
- Dämpfung
- Einfluss äußerer Kräfte

2.1.1 Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

Die o.g. vier Eigenschaften sind in den Bewegungsgleichungen für gewöhnliche, lineare und zeit-invariante Mehrkörpersysteme mit n_q Freiheitsgraden enthalten.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Darin repräsentiert der erste Term $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)$ die Beschleunigungs- und Trägheitskräfte mit der symmetrischen Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$. Der zweite Term $(\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t)$ berücksichtigt die geschwindigkeitsproportionalen Kräfte, die sich aus den Reibungskräften, beschrieben durch die symmetrischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ und den gyroskopischen Kräften, beschrieben durch die schiefsymmetrische Kreiselmatrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$, zusammensetzen. Der dritte Term $(\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t)$ beinhaltet die konservativen und nicht-konservativen Kräfte beschrieben jeweils durch die symmetrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ und die schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$. Die externen Kräfte werden durch den Vektor $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$ dargestellt. n_q ist die Anzahl der unabhängigen Koordinaten q_i , die im Verschiebungsvektor $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$ zusammengefasst sind bzw. die Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade (FHG). Die zeitliche Abhängigkeit wird durch t dargestellt. $\dot{\mathbf{q}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ sind die erste bzw. zweite zeitliche Ableitung und entsprechen der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung.

2.1.2 Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (Bi-Modale Zerlegung)

Die gesamte Bewegung eines beliebig komplizierten linearen Schwingungssystems mit n_q Freiheitsgraden lässt sich durch die Bewegungen von n_q Schwingern mit nur einem FHG superponieren und ermöglicht so, eine einfache Analyse und Interpretation des Schwingungsvorgangs. Dazu ist eine Entkopplung des DGL-Systems (2.1) notwendig. Ausgangspunkt ist die Reduktion des DGL-Systems 2. Ordnung in ein DGL-System 1. Ordnung mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} + \mathbf{G} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \\ \mathbf{K} + \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

zu

$$\mathbf{A}_M \mathbf{r}(t) - \mathbf{B}_M \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}(t). \quad (2.3)$$

Wird zur Lösung des homogenen Gleichungssystems mit $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ der Ansatz

$$\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}} e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

gewählt, führt dies auf die allgemeine Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{A}_M - \lambda \mathbf{B}_M) \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

mit den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren $\bar{\mathbf{r}}_i$, die in den Matrizen

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_{2n_q} \end{bmatrix} = \text{diag} \left(\lambda_1 \quad \lambda_3 \quad \dots \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_{2n_q} \right) \quad (2.6)$$

und

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_1 & \bar{\mathbf{r}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{r}}_i & \dots & \bar{\mathbf{r}}_{2n_q} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

zusammengefasst werden können. Damit lässt sich die Eigenwertaufgabe in der Matrixdarstellung

$$\mathbf{A}_M \mathbf{R} - \mathbf{B}_M \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

angeben. Wird vorausgesetzt, dass $\mathbf{B}_M$ regulär ist, d.h. das Schwingungssystem führt keine Starrkörperbewegungen aus, ergeben sich $i = 2n_q$ Eigenwerte und Vektoren. Da $\mathbf{A}_M$ und $\mathbf{B}_M$ reel sind, treten die Eigenwerte jeweils als konjugiert komplexe Paare auf [Zurmühl & Falk, 1997].

Die Idee zur Entkopplung des DGL-Systems 1. Ordnung basiert auf der Annahme, dass sich die Lösung für $\mathbf{r}(t)$ aus der Superposition der einzelnen Eigenvektoren $\bar{\mathbf{r}}_i \in \mathbb{C}^{2n_q \times 1}$ und den zugehörigen zeitlich schwankenden Amplituden $\eta_i(t) \in \mathbb{C}^{2n_q \times 1}$ zusammensetzt und führt damit auf den Produktansatz

$$\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}}_1 \eta_1(t) + \bar{\mathbf{r}}_2 \eta_2(t) + \dots + \bar{\mathbf{r}}_{2n_q} \eta_{2n_q}(t) = \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}(t). \quad (2.9)$$

Einsetzen des Produktansatzes (2.9) in das DGL-System 1. Ordnung (2.3) führt zu

$$\mathbf{A}_M \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{B}_M \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{g}(t). \quad (2.10)$$

Da die Matrizen $\mathbf{A}_M$ und $\mathbf{B}_M$ aufgrund der gyrokopischen und nichtkonservativen Kräfte unsymmetrisch besetzt sind, kann das System nicht wie gewohnt durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{R}^T$ entkoppelt werden [Gasch *et al.*, 2012]. Wird zusätzlich zur rechts

Eigenwertaufgabe (2.5) die links Eigenwertaufgabe

$$\bar{\mathbf{l}}^T (\mathbf{A}_M - \zeta \mathbf{B}_M) = \mathbf{0}^T \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{A}_M^T - \zeta \mathbf{B}_M^T) \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

mit den Eigenwerten $\zeta_i = \lambda_i$ und den Linkseigenvektoren $\bar{\mathbf{l}}_i$, die in der Matrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{l}}_1 & \bar{\mathbf{l}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{l}}_i & \dots & \bar{\mathbf{l}}_{2n_q} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

zusammengefasst werden, betrachtet, dann besteht bei geeigneter Normierung¹ zwischen den Links- und Rechtseigenvektoren die Orthogonalitätsbeziehung

$$\mathbf{L}^T \mathbf{B}_M \mathbf{R} = \mathbf{I}. \quad (2.13)$$

Linksmultiplikation von Gleichung (2.8) mit $\mathbf{L}^T$ und Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehung (2.13) führt auf den Zusammenhang

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A}_M \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}. \quad (2.14)$$

Gleichung (2.10) und damit auch Gleichung (2.3) lässt sich durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{L}^T$ und den Orthogonalitätsbeziehungen (2.13) und (2.14) entkoppeln.

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A}_M \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{L}^T \mathbf{B}_M \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{L}^T \mathbf{g}(t) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{h}(t) \quad (2.16)$$

Da die Matrix der Eigenwerte $\mathbf{\Lambda}$ und die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ jeweils Diagonalgestalt aufweisen, kann jede der $2n_q$ Gleichungen in (2.16) separat gelöst werden. Dabei stellt $\mathbf{h}(t)$ die rechte Seite der entkoppelten Bewegungsgleichungen 1. Ordnung dar.

Zur Lösung der Differentialgleichungen (2.16) werden die Anfangsbedingungen benötigt und müssen in die modale Darstellung transformiert werden. Die modalen Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\eta}(t = t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$ werden aus dem Modalansatz (2.9) mit $\mathbf{r}(t = t_0) = \mathbf{r}_0$ abgeleitet.

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_0 \quad (2.17)$$

Somit ist es gelungen, das anfangs gekoppelte Differentialgleichungssystem zu entkoppeln und das komplexe Schwingungssystem mit den Methoden des einfachen Ein-FHG-System zu untersuchen. Ein weiterer Vorteil der modalen Darstellung ist, dass eine Reduktion der Ordnung des Systems durch die Auswahl der zu untersuchenden Moden festgelegt

¹ $\bar{\mathbf{l}}_i^T \mathbf{B}_M \bar{\mathbf{r}}_i = 1$, dies gelingt bspw. unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehung, wenn die Linkseigenvektoren direkt aus den Rechtseigenvektoren bestimmt werden: $\mathbf{L} = (\mathbf{R}^T \mathbf{B}_M^T)^{-1}$

und reduziert werden kann. Meist dominieren die unteren Moden das Gesamtschwingungssystems. Höhere Moden können demnach vernachlässigt werden. Wird Gleichung 2.9 umgeformt in Gleichung 2.16 eingesetzt führt dies beim modal reduzierten Modell, durch Streichen der irrelevanten Eigenwerte in der Matrix $\mathbf{\Lambda}$, zu

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{red}} \mathbf{R}_{\text{red}}^{-1} \mathbf{r}(t) - \mathbf{I} \mathbf{R}_{\text{red}}^{-1} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{h}(t). \quad (2.18)$$

Die Eigenwerte und -vektoren lassen sich aus der experimentellen Modalanalyse bestimmen.

Gleichung (2.16) kann in eine mechanisch anschaulichere Darstellungsweise überführt werden. Wird die Gleichung

$$\lambda_i \eta_i(t) - \dot{\eta}_i(t) = h_i(t) \quad (2.19)$$

zeitlich differenziert ergibt sich:

$$\lambda_i \dot{\eta}_i(t) - \ddot{\eta}_i(t) = \dot{h}_i(t) \quad (2.20)$$

Wird Gleichung (2.19) mit dem konjugiert komplexen Eigenwert λ_i^* multipliziert und anschließend davon Gleichung (2.20) subtrahiert folgt

$$\ddot{\eta}_i(t) - (\lambda_i^* + \lambda_i) \dot{\eta}_i(t) + \lambda_i^* \lambda_i \eta_i(t) = \lambda_i^* h_i(t) - \dot{h}_i(t). \quad (2.21)$$

Werden die Beziehungen

$$\lambda_i = \alpha_i + i \omega_i \quad \text{und} \quad \lambda_i^* = \alpha_i - i \omega_i \quad (2.22)$$

eingeführt, resultiert daraus die Struktur einer massennormierte DGL 2. Ordnung mechanischer Schwingungssysteme mit konstanten reellen Koeffizienten auf der linken Seite

$$\ddot{\eta}_i(t) - 2\alpha_i \dot{\eta}_i(t) + (\alpha_i^2 + \omega_i^2) \eta_i(t) = (\alpha_i - i \omega_i) h_i(t) - \dot{h}_i(t). \quad (2.23)$$

Analogie zum Einmassenschwinger

Der Ein-Massen-Schwinger mit der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{q}(t) + d \dot{q}(t) + c q(t) = f(t). \quad (2.24)$$

ist das einfachste Modell zur Beschreibung technischer Schwingungsvorgänge. Mit den beiden bekannten Abkürzungen für die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 und dem Dämpfungsgrad ξ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{mc}} = \frac{1}{2} \frac{d}{\omega_0 m} \quad (2.25)$$

führt dies auf die bekannte massennormierte Form

$$\ddot{q}(t) + 2\omega_0\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2q(t) = \frac{f(t)}{m}. \quad (2.26)$$

Das gesamte Schwingungsverhalten wird einzig durch die beiden Größen ω_0 und ξ beschrieben und hängt direkt von den Eigenwerten λ_i ab. Analog zu (2.4) wird zur Lösung der homogenen Gleichung ($f(t) = 0$) der Ansatz

$$q(t) = \bar{q}e^{\lambda t} \quad (2.27)$$

gewählt, der zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 m + \lambda d + c = 0 \quad (2.28)$$

mit der Lösung

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mc}{d^2}} \right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4mc}{d^2}} \right) \quad (2.29)$$

führt. Mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_0 und dem Dämpfungsgrad ξ lässt sich dies vereinfacht darstellen als

$$\lambda_1 = -\omega_0\xi + i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\omega_0\xi - i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (2.30)$$

Mit der in Gleichung (2.22) eingeführten Darstellung der Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\omega$ können der Realteil α und der Imaginärteil ω der beiden Eigenwerte direkt abgelesen werden.

$$\alpha = -\omega_0\xi \quad \text{und} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.31)$$

Der Imaginärteil ω kennzeichnet dabei die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems, während der Realteil Rückschlüsse auf ein angefachtes ($\alpha > 0$) oder abklingendes ($\alpha < 0$) Schwingungsverhalten zu lässt.

Durch den direkten Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und den beiden modalen Parametern ω_0 und ξ kommt der Kenntnis der Eigenwerte eine besonders wichtige Rolle zu. Sind die Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\omega$, bekannt können direkt die modalen Parameter zur Schwingungsanalyse bestimmt werden,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \\ \xi &= -\frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{\sqrt{\operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2}} = -\frac{\alpha}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

bzw. Gleichung (2.26) in Abhängigkeit des Real- und Imaginärteils der Eigenwerte umgeformt werden

$$\ddot{q}(t) - 2\alpha\dot{q}(t) + (\alpha^2 + \omega^2)q(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (2.33)$$

wodurch die direkte Vergleichbarkeit zu den entkoppelten Differentialgleichungen (2.23) sichtbar wird. Somit ist das Wissen und die Methoden, die für das 1-FHG-System (Einmassenschwinger) erprobt und vorhanden sind, mithilfe der modalen Darstellung auf n_q -FHG-Systeme (Mehrfreiheitsgradsysteme) anwendbar und wird im Rahmen dieser Arbeit vor allem in den Kapiteln 4, 5 und 6 angewendet.

2.1.3 Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell

Ein Zustandsraummodell bildet den Ausgangspunkt für die in Kapitel 3 entwickelte Methode zur Identifizierung von geschädigten Komponenten aus gemessenen Sensorsignalen, die auf der Stochastic Subspace Identification Methode (SSI), vgl. Kapitel 2.2, aufbaut. Mechanische Systeme nach Gleichung (2.1) können durch die zeitinvarianten linearen Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{ss}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{ss}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{ss}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{ss}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

beschrieben werden. Die Zustandsgrößen, der Verschiebungsvektor $\mathbf{q}(t)$ sowie der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}}(t)$, werden im Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t)^T & \dot{\mathbf{q}}(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n_q \times 1} \quad (2.35)$$

zusammengefasst. $\mathbf{A}_{ss} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$ ist die Systemmatrix, $\mathbf{B}_{ss} \in \mathbb{R}^{2n_q \times n_q}$ die Eingangsmatrix und $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$ der Eingangsvektor, die für die Bewegungsgleichungen (2.1) die folgende Struktur aufweisen:

$$\mathbf{A}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.36)$$

Der Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ enthält die l gemessenen Sensorsignale. Die beiden Matrizen $\mathbf{C}_{ss} \in \mathbb{R}^{l \times 2n_q}$ und $\mathbf{D}_{ss} \in \mathbb{R}^{l \times n_q}$ werden als Mess- bzw. Durchgriffsmatrix bezeichnet.

$$\mathbf{C}_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\dot{q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\ddot{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{sens}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{mech}}, \quad \mathbf{D}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{\ddot{q}}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Die Messmatrix wird in eine Sensorselektionsmatrix $\mathbf{C}_{\text{sens}} \in \mathbb{R}^{l \times 3n_q}$ und eine Kopplungsmatrix $\mathbf{C}_{\text{mech}} \in \mathbb{R}^{3n_q \times 2n_q}$, die das mechanische System mit dem Zustandsraum verknüpft, aufgeteilt. Die Matrizen $\mathbf{C}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{l_q \times n_q}$, $\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{l_{\dot{q}} \times n_q}$, $\mathbf{C}_{\ddot{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{l_{\ddot{q}} \times n_q}$ sind die Selektionsmatrizen für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mit $l_q + l_{\dot{q}} + l_{\ddot{q}} = l$ in Abhängigkeit der zu Verfügung stehenden Messgrößen (Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen).

2.1.4 Zeitdiskretes Zustandsraummodell

Zeitkontinuierliche Zustandsraummodelle werden vorzugsweise zur Erstellung mathematischer Modelle auf dem axiomatischen Weg genutzt. Bei der Analyse von technischen Systemen basierend auf experimentellen Messwerten (empirische Weg) ist es notwendig, auf eine zeitdiskrete Darstellung überzugehen. Messdaten werden i.d.R. in äquidistanten Zeitabständen Δt mittels digitaler Datenerfassung aufgezeichnet und liegen somit zu diskreten Zeitpunkten $t = k\Delta t$ vor. Charakteristisch für die Messwertaufnahme ist die Abtastzeit Δt die als Abtastrate bzw. -frequenz $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ angegeben wird.

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k\end{aligned}\tag{2.38}$$

mit den zeitdiskreten Matrizen $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$, $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{2n_q \times n_q}$, $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times 2n_q}$ und $\mathbf{D}_d \in \mathbb{R}^{l \times n_q}$ und Vektoren $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t) \in \mathbb{R}^{2n_q \times 1}$ und $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k\Delta t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Der Index ${}_d$ zeigt an, dass es sich um die zeitdiskreten Zustandsraummatrizen handelt.

Zwischen den zeitkontinuierlichen und - diskreten Zustandsraummatrizen besteht folgender enger Zusammenhang

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_{ss}\Delta t}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_{ss}\alpha} d\alpha \mathbf{B}_{ss}, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}_{ss}, \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D}_{ss},\tag{2.39}$$

dessen Herleitung bspw. in [Lunze, 2014] nachvollzogen werden kann.

Das zeitdiskrete Zustandsraummodell aus Gl. (2.38) beschreibt das Verhalten eines mathematisch-modellierten dynamischen Systems mit genauer Kenntnis aller Modellparameter, die in der Realität nicht immer vollständig bekannt sind. Durch Erweitern des Zustandsraummodell um die stochastischen Größen $\mathbf{w}_k$ und $\mathbf{v}_k$ zu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{2.40}$$

kann dieser Ungenauigkeit Rechnung werden. Der Vektor $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{2n_q \times 1}$ beschreibt dabei das Prozessrauschen, welches als Abweichungen zwischen dem realen und dem mathematisch modellierten System verstanden wird. Damit lassen sich bspw. unbekannte Eingangsgrößen wie z.B. Schienenfehler modellieren. Das Messrauschen, welches bei realen Messungen, bspw. hervorgerufen durch das Sensorrauschen, immer präsent ist, wird durch den Vektor $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ beschrieben. Rauschprozesse lassen sich i.d.R. nicht direkt messen und werden durch Annahmen in die Zustandsgleichungen eingebracht. Vielfach wird angenommen, dass es sich um stationäre, mittelwertfreie, weiße Rauschprozesse mit den Eigenschaften

$$E[\mathbf{v}_k] = 0, \quad E[\mathbf{w}_k] = 0 \quad (2.41)$$

und

$$E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_j^T & \mathbf{v}_j^T \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.42)$$

handelt. Dabei steht $E[\cdot]$ für den Erwartungswertoperator, i und j sind zwei beliebige Zeitpunkte, δ_{ij} ist das Kronecker-Delta und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ und $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ sind die Kovarianzmatrizen. Zwei weitere praxisrelevante Annahmen sind, dass das Mess- und Prozessrauschen sowohl untereinander, als auch zu den Zuständen unkorreliert sind und es sich zusätzlich um einen stationär stochastischen Prozess handelt. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] = 0, \quad E[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0 \\ E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] &= \mathbf{\Sigma}, \quad E[\mathbf{x}_k] = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit der zeitunabhängigen Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ der Zustände $\mathbf{x}_k$. Von besonderem praktischen Interesse sind die rein stochastischen Systeme bei denen ebenfalls der Eingang $\mathbf{u}_k$ unbekannt bzw. nicht messbar ist, wie es bei der Anregung von Schienenfahrzeugen durch Gleisunebenheiten der Fall ist. Das kombiniert deterministisch-stochastische Zustandsraummodell Gl. (2.40) geht damit über in das diskret stochastische Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Als einzige Information über das Schwingungsverhalten bleibt nur die gemessene Systemantwort im Ausgangsvektor $\mathbf{y}_k$. Die nicht messbaren Eingangsgrößen werden indirekt in den Rauschgrößen $\mathbf{w}_k$ und $\mathbf{v}_k$ berücksichtigt. Solche Systeme werden daher auch als output-only Systeme bezeichnet.

Bei der Systemidentifikation von *Output-Only* Systemen ist daher zu beachten, dass eine Trennung von Anregungs- und Systemfrequenzen nicht mehr möglich ist, sobald die Annahmen aus Gl. (2.41) und (2.43) verletzt werden.

2.1.5 Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und -vektoren der verschiedenen Darstellungsformen

Wesentliche Aussagen über die Schwingungscharakteristik von zeitinvarianten, linearen Mehrkörpersystemen mit n_q Freiheitsgraden können anhand der Eigenwerte (vgl. Gl. (2.32)) getroffen werden. Für die in den Gleichungen (2.1), (2.2), (2.34) und (2.38) bisher eingeführten Darstellungsformen werden im Folgenden die Zusammenhänge und Unterschiede bei der Berechnung der Eigenwerte und -vektoren aufgezeigt.

Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

Das homogene DGL-System 2. Ordnung ist in folgender Form gegeben:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Für die Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren wird der Ansatz

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}} e^{\lambda_{O_2} t} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{q}} \lambda_{O_2} e^{\lambda_{O_2} t} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{q}} \lambda_{O_2}^2 e^{\lambda_{O_2} t} \quad (2.46)$$

gewählt und führt zu

$$\left(\lambda_{O_2}^2 \mathbf{M} + \lambda_{O_2} (\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \right) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt neben der trivialen Lösung für $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ nur dann eine Lösung, wenn für die Determinante gilt:

$$\det \left(\lambda_{O_2}^2 \mathbf{M} + \lambda_{O_2} (\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \right) = 0 \quad (2.48)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte $\lambda_{O_2,i}$ mit denen sich die Eigenvektoren $\bar{\mathbf{q}}_i$ bestimmen lassen.

Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (Bi-Modale Zerlegung)

Das homogene DGL-System 1. Ordnung ist in folgender Form gegeben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} + \mathbf{G} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \\ \mathbf{K} + \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_M} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{r}}(t)} = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

Für die Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren wird der Ansatz

$$\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}} e^{\lambda_{O_1} t} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \bar{\mathbf{r}} \lambda_{O_1} e^{\lambda_{O_1} t} \quad (2.50)$$

gewählt und führt zu

$$(\mathbf{A}_M - \lambda_{O_1} \mathbf{B}_M) \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (2.51)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt neben der trivialen Lösung für $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ nur dann eine Lösung, wenn für die Determinante gilt:

$$\det(\mathbf{A}_M - \lambda_{O_1} \mathbf{B}_M) = 0 \quad (2.52)$$

bzw.

$$\det \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} + \mathbf{G} + \lambda_{O_1} \mathbf{M} & \mathbf{K} + \mathbf{N} \\ \hline \mathbf{K} + \mathbf{N} & -\lambda_{O_1} (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \end{array} \right] \right) = \det \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \right) = 0 \quad (2.53)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte $\lambda_{O_1,i}$ mit denen sich die Eigenvektoren $\bar{\mathbf{r}}_i$ bestimmen lassen.

Gleichung (2.53) ist aus den vier Blockmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ mit jeweils der Größe $n_q \times n_q$ zusammengesetzt, wobei gleichzeitig $\mathbf{C}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{C}$ gilt. Die Determinante solcher Blockmatrizen lässt sich nach [Silvester, 2000] wie folgt berechnen:

$$\det \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \right) = \det(\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}) \quad (2.54)$$

Wird die Beziehung (2.54) auf die charakteristische Gleichung (2.53) unter Berücksichtigung des Determinantenproduktsatzes angewendet, folgt

$$\det(\lambda_{O_1}^2 \mathbf{M} + \lambda_{O_1} (\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})) \det(-(\mathbf{K} + \mathbf{N})) = 0 \quad (2.55)$$

Bei schwingungsfähigen Systemen wird auf Grund einer vorhandenen Steifigkeit die Determinante $\det(-(\mathbf{K} + \mathbf{N}))$ nicht verschwinden, sodass sich die vorhergehende Gleichung zu

$$\det(\lambda_{O_1}^2 \mathbf{M} + \lambda_{O_1} (\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})) = 0. \quad (2.56)$$

vereinfacht. Ein Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2.48) zeigt, dass die Eigenwerte des DGL-Systems 1. Ordnung mit den Eigenwerten des DGL-Systems 2. Ordnung übereinstimmen.

$$\lambda_{O_1} = \lambda_{O_2} = \lambda \quad (2.57)$$

Damit lässt sich auch ein direkter Zusammenhang der beiden Eigenvektoren $\bar{\mathbf{q}}$ und $\bar{\mathbf{r}}$ herbei führen. Dazu wird der Ansatz aus der Gleichung (2.46) in den Vektor $\mathbf{r}(t)$ eingesetzt.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (2.58)$$

Ein Vergleich mit dem Lösungsansatz für das DGL-System 1. Ordnung (2.50) führt direkt zur Beziehung

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Zeitkontinuierliches Zustandsraummodell

Das homogene zeitkontinuierliche Zustandsraummodell von Gl. (2.34) ist in folgender Form gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ss} \mathbf{x}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{ss} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Für die Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren wird der Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} e^{\lambda_{ss} t} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}} \lambda_{ss} e^{\lambda_{ss} t} \quad (2.61)$$

gewählt und führt zu

$$(\mathbf{A}_{ss} - \lambda_{ss} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (2.62)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt neben der trivialen Lösung für $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ nur dann eine Lösung, wenn für die Determinante gilt:

$$\det(\mathbf{A}_{ss} - \lambda_{ss} \mathbf{I}) = 0 \quad (2.63)$$

bzw.

$$\det \left(\left[\begin{array}{c|c} -\lambda_{ss} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) - \lambda_{ss} \mathbf{I} \end{array} \right] \right) = \det \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] \right) = 0 \quad (2.64)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte $\lambda_{ss,i}$ mit denen sich die Eigenvektoren $\bar{\mathbf{x}}_i$ bestimmen lassen.

Gleichung (2.64) ist aus den vier Blockmatrizen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit jeweils der Größe $n_q \times n_q$ zusammengesetzt, wobei gleichzeitig $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ gilt. Die Determinante solcher Blockmatrizen lässt sich wie oben nach [Silvester, 2000] wie folgt berechnen:

$$\det \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] \right) = \det(\mathcal{D}\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{C}) \quad (2.65)$$

Wird die Beziehung (2.65) auf die charakteristische Gleichung (2.64) unter Berücksichtigung des Determinantenproduktsatzes angewendet, folgt

$$\det(\mathbf{M}^{-1}) \det(\lambda_{ss}^2 \mathbf{M} + \lambda_{ss}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})) = 0 \quad (2.66)$$

Bei schwingungsfähigen Systemen wird auf Grund einer vorhandenen Masseneigenschaft die Determinante $\det(\mathbf{M}^{-1})$ nicht verschwinden, sodass sich die vorhergehende Gleichung zu

$$\det(\lambda_{ss}^2 \mathbf{M} + \lambda_{ss}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})) = 0 \quad (2.67)$$

vereinfacht. Ein Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2.48) zeigt, dass die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}_{ss}$ mit den Eigenwerten des DGL-Systems 2. Ordnung übereinstimmen.

$$\lambda_{ss} = \lambda_{O_2} = \lambda \quad (2.68)$$

Damit lässt sich ein direkter Zusammenhang der beiden Eigenvektoren $\bar{\mathbf{q}}$ und $\bar{\mathbf{x}}$ herbei führen. Dazu wird der Ansatz aus der Gleichung (2.46) in den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ eingesetzt.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \lambda \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (2.69)$$

Ein Vergleich mit dem Lösungsansatz für das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell (2.61) führt direkt zur Beziehung

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \lambda \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Wie im Anhang A.1 gezeigt wird, lässt sich ein und derselbe dynamischen Prozess in unendlich viele Zustandsraumdarstellungen transformieren. Die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{ss}$ der transformierten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_{ss}$ sind dabei identisch zu den Eigenwerten λ_{ss} des ursprünglichen Systems. Zwischen den Eigenvektoren des transformierten Systems $\tilde{\bar{\mathbf{x}}}$ und des ursprünglichen Systems $\bar{\mathbf{x}}$ besteht der Zusammenhang

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.71)$$

wobei $\mathbf{T}$ eine beliebige invertierbare Transformationsmatrix ist. Um die Eigenvektoren mit dem mechanischen Modell (2.1) in Verbindung zu bringen, müssen diese wieder zurück transformiert werden. Dies geschieht mit der Messmatrix $\tilde{\mathbf{C}}_{ss}$ des transformierten Systems

$$\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{C}}_{ss} \tilde{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.72)$$

Zusätzlich zur Rücktransformation in den physikalisch anschaulichen Bereich, werden damit die Eigenschwingungsformen an den Messpunkten durch den Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ beschrieben. Bisher wurde keine Unterscheidung gemacht, welche Messgrößen gleichzeitig im Ausgangsvektor gemessen werden. Typische Messgrößen sind der Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. In der Praxis der Modal- und Schwingungsanalyse haben sich Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsmessungen weitestgehend aufgrund der einfachen Installation der Messsensoren und -geräte etabliert. Wird nur ein Messprinzip ausgewählt, so sind auch die identifizierten Zustandsraummodelle von dem jeweiligen Messprinzip abhängig, was einen Einfluss auf die Messmatrix hat. In [Ebert, 2011] wird gezeigt, dass bei linearen mechanischen Strukturen zwischen den Messmatrizen der Zusammenhang

$$\mathbf{C}_{ss,d} = \mathbf{C}_{ss,v} \mathbf{A}_{ss}^{-1} = \mathbf{C}_{ss,a} \mathbf{A}_{ss}^{-2} \quad (2.73)$$

besteht. Die Indizes d , v , bzw. a stehen dabei für eine weg-, geschwindigkeits-, bzw. beschleunigungs-basierte Messung. Mit dieser Kenntnis können die aus einem identifizierten Zustandsraummodell gewonnen Eigenvektoren in eine wegbasierte Darstellung, die häufig zur Beschreibung der Schwingungsformen herangezogen wird, überführt werden.

Zeitdiskretes Zustandsraummodell

Die Systemmatrix $\mathbf{A}_{ss}$ des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells ist mit der Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ des zeitdiskreten Zustandsraummodells über die Matrixexponentialfunktion (2.39) verknüpft, die nach [Golub & van Loan, 2013] in einer maclaurinschen Reihe (einem Spezialfall der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0) entwickelt werden kann:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_{ss}\Delta t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{ss}\Delta t)^j}{j!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{ss}\Delta t + \mathbf{A}_{ss}^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{A}_{ss}^3 \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (2.74)$$

Wird diese Gleichung von rechts mit einem zum Eigenwert $\lambda_{ss,i}$ zugehörigen Eingensvektor $\bar{\mathbf{x}}_i$ multipliziert, so lässt sich eine Beziehung zwischen den Eigenwerten und -vektoren des zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Zustandsraummodell ableiten.

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}_{ss}\Delta t} \bar{\mathbf{x}}_i &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{ss}\Delta t + \mathbf{A}_{ss}^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{A}_{ss}^3 \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \right) \bar{\mathbf{x}}_i \\ &= \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{A}_{ss}\bar{\mathbf{x}}_i\Delta t + \mathbf{A}_{ss}^2\bar{\mathbf{x}}_i \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{A}_{ss}^3\bar{\mathbf{x}}_i \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Mehrfaches Anwenden von Gl.(2.62) führt zu:

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}_{ss}\Delta t} \bar{\mathbf{x}}_i &= \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i} \Delta t + \mathbf{A}_{ss} \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i} \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{A}_{ss}^2 \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \\
&= \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i} \Delta t + \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i}^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{A}_{ss} \bar{\mathbf{x}}_i \lambda_{ss,i}^2 \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \\
&= \dots \\
&= \left(1 + \lambda_{ss,i} \Delta t + \lambda_{ss,i}^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + \lambda_{ss,i}^3 \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \right) \bar{\mathbf{x}}_i
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Der Klammerterm auf der rechten Seite lässt sich wieder in eine Exponentialform zurückführen, mit der es gelingt den Zusammenhang der Eigenwerte herzustellen.

$$\underbrace{e^{\mathbf{A}_{ss}\Delta t}}_{\mathbf{A}_d} \bar{\mathbf{x}}_i = \underbrace{e^{\lambda_{ss,i}\Delta t}}_{\lambda_{d,i}} \bar{\mathbf{x}}_i \tag{2.76}$$

Die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells lassen sich demnach berechnen mit

$$\lambda_{ss} = \frac{\ln(\lambda_d)}{\Delta t} = \lambda. \tag{2.77}$$

Die Eigenvektoren der beiden Systeme unterscheiden sich hingegen nicht.

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}} \tag{2.78}$$

2.2 Stochastic Subspace Identification

Zur Ermittlung der modalen Parameter einer Federstufe basierend auf gemessenen Beschleunigungen wird in dieser Arbeit die Methode der *Stochastic Subspace Identification* (SSI) aus der Klasse der *Output-Only*-Methoden verwendet. Ziel ist die Bestimmung der modalen Parameter aus den Systemmatrizen des stochastischen Zustandsraummodells Gl. (2.44) basierend auf l gemessenen Sensorsignalen. Im Folgenden wird in Anlehnung an [van Overschee & de Moor, 1993; Ljung, 1999; Viberg *et al.*, 1997] die Schätzung der Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_d$ und $\hat{\mathbf{C}}_d$ ermittelt. Das vorgestellte Verfahren gehört zur Gruppe der datenbasierten SSI und wird häufig mit SSI-DATA abgekürzt. Es verhindert die vorherige Berechnung der Kovarianzmatrizen der gemessenen Ausgangsdaten, wie sie bei der Gruppe der kovarianzbasierten SSI (SSI-COV) angewendet wird. Die SSI-DATA Verfahren umgehen damit die Quadrierung der Messdaten, die zur Bestimmung der Kovarianzmatrix benötigt wird und vermeiden dadurch die stärkere Betonung von hohen Messwerten gegenüber kleinen Messwerten, [Peeters & de Roeck, 2001].

Die Bestimmung der gesuchten Systemmatrizen basiert auf der Kenntnis der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix Θ_r . Die Messgleichung des diskret stochastischen Zustandsraummodells Gl. (2.44) lässt sich für r aufeinander folgende Zeitpunkte darstellen als

$$\mathbf{y}_{k,r} = \Theta_r \mathbf{x}_k + \Gamma_r \mathbf{w}_{k,r} + \mathbf{v}_{k,r}. \quad (2.79)$$

Die Vektoren $\mathbf{y}_{k,r} \in \mathbb{R}^{rl \times 1}$, $\mathbf{w}_{k,r} \in \mathbb{R}^{2n_q r \times 1}$ und $\mathbf{v}_{k,r} \in \mathbb{R}^{rl \times 1}$ enthalten blockweise die r aufeinanderfolgenden Mess- bzw. Rauschgrößen

$$\mathbf{y}_{k,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{k,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k+r-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{k,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k+r-1} \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Der Tatsache geschuldet, dass r aufeinanderfolgende Zeitpunkte in der Zukunft betrachtet werden, wird r auch als Prädiktionshorizont bezeichnet. Die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix $\Theta_r \in \mathbb{R}^{rl \times 2n_q}$ und die Matrix $\Gamma_r \in \mathbb{R}^{rl \times 2n_q r}$ werden aus der System- und Messmatrix aufgebaut.

$$\Theta_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d & \mathbf{C}_d & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-2} & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-3} & \cdots & \mathbf{C}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Der Parameter r mit $r > 2n_q$ ist für die Namensgebung 'erweitert' verantwortlich. Damit stehen $r - 2n_q$ mehr Blockzeilen gegenüber der üblichen Definition der Beobachtbarkeitsmatrix, bei der die Anzahl der Blockzeilen der Systemordnung $2n_q$ entspricht, zu Verfügung. Wird vorausgesetzt, dass Gl. (2.44) beobachtbar ist, besitzt Θ_r den vollen Rang $2n_q$.

Ist die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix bekannt, so kann die Messmatrix $\mathbf{C}_d$ durch Ausschneiden² der ersten Blockzeile bestimmt werden.

$$\mathbf{C}_d = \Theta_r (1 : l, 1 : 2n_q) \quad (2.82)$$

Für die Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ kann in ähnlicher Vorgehensweise die Gleichung

$$\Theta_r (l + 1 : rl, 1 : 2n_q) = \Theta_r (1 : l(r - 1), 1 : 2n_q) \mathbf{A}_d \quad (2.83)$$

²Hier wird eine zu Matlab analoge Schreibweise verwendet: $\mathbf{M}(i : j, k : l)$ ist der Teil der Matrix $\mathbf{M}$, der durch die Zeilen $i, i + 1, \dots, j$ und die Spalten $k, k + 1, \dots, l$ begrenzt wird.

aufgestellt werden, die mit einem Least-Square Verfahren gelöst werden kann.

Damit ein direkter Zusammenhang zwischen den Messdaten und der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix hergestellt werden kann, besteht die Idee darin, den Rauschterm $\mathbf{\Gamma}_r \mathbf{w}_{k,r} + \mathbf{v}_{k,r} = \boldsymbol{\psi}_{k,r}$ von Gl. (2.79) zu eliminieren und sich dabei die Eigenschaften des Prozess- und Messrauschens bei einer großen Anzahl von Zeitschritten zu nutze zu machen. Hierzu wird angenommen, dass $N^* + r - 1$ Messwerte zu Verfügung stehen. Für die weitere mathematische Betrachtung werden diese in sog. Block-Hankel-Matrizen zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k,r} & \mathbf{y}_{k+1,r} & \mathbf{y}_{k+2,r} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-1,r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rl \times N^*} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k & \mathbf{y}_{k+1} & \mathbf{y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-1} \\ \mathbf{y}_{k+1} & \mathbf{y}_{k+2} & \mathbf{y}_{k+3} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*} \\ \mathbf{y}_{k+2} & \mathbf{y}_{k+3} & \mathbf{y}_{k+4} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k+r-1} & \mathbf{y}_{k+r} & \mathbf{y}_{k+r+1} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*+r-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Analog lassen sich entsprechende Matrizen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k & \mathbf{x}_{k+1} & \mathbf{x}_{k+2} & \cdots & \mathbf{x}_{k+N^*-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_q \times N^*} \quad (2.85)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{k,r} & \boldsymbol{\psi}_{k+1,r} & \boldsymbol{\psi}_{k+2,r} & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{k+N^*-1,r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rl \times N^*} \quad (2.86)$$

für die Zustände $\mathbf{x}_k$ und Rauschtermen mit $\boldsymbol{\psi}_{k,r} = \mathbf{\Gamma}_r \mathbf{w}_{k,r} + \mathbf{v}_{k,r} \in \mathbb{R}^{rl \times 1}$ aufstellen, sodass Gl. (2.79) in der Matrixdarstellung

$$\mathbf{Y}_r = \boldsymbol{\Theta}_r \mathbf{X} + \boldsymbol{\Psi}_r \quad (2.87)$$

geschrieben werden kann, die wesentlich von den Parametern r und N^* abhängig ist. Es gilt nun, eine geeignete Matrix zu finden, sodass das Produkt aus $\boldsymbol{\Psi}_r$ und dieser für unendlich viele Messwerte N^* zu null wird. Dazu wird die Matrix

$$\boldsymbol{\Phi}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{1,s} & \boldsymbol{\varphi}_{2,s} & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{N^*,s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times N^*} \quad (2.88)$$

mit $s \geq 2n_q$ und den noch unbekannten Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_{i,s} \in \mathbb{R}^{s \times 1}$ eingeführt und als Transponierte von rechts an Gl. (2.87) multipliziert mit anschließender Normierung mit $\frac{1}{N^*}$.

$$\frac{1}{N^*} \mathbf{Y}_r \boldsymbol{\Phi}_s^T = \boldsymbol{\Theta}_r \frac{1}{N^*} \mathbf{X} \boldsymbol{\Phi}_s^T + \frac{1}{N^*} \boldsymbol{\Psi}_r \boldsymbol{\Phi}_s^T \quad (2.89)$$

Der nächste Schritt besteht darin, geeignete Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_{i,s}$ zu finden, sodass gilt:

$$\lim_{N^* \rightarrow \infty} \frac{1}{N^*} \boldsymbol{\Psi}_r \boldsymbol{\Phi}_s^T = \mathbf{0} \quad (2.90)$$

Die Matrixdarstellung lässt sich in die Summenform überführen:

$$\lim_{N^* \rightarrow \infty} \frac{1}{N^*} \sum_{k=1}^{N^*} \boldsymbol{\psi}_{k,r} \boldsymbol{\varphi}_{i,s}^T = \mathbf{0} \quad (2.91)$$

Unter der Annahme, dass es sich bei $\boldsymbol{\psi}_{k,r}$ um einen ergodischen Prozess handelt, geht die zeitliche Mittelung über unendlich viele Zeitschritte in den Erwartungswert über. Die zeitliche Mittlung entspricht gerade genau der linken Seite der vorherigen Gleichung, sodass sich für die Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_{i,s}$ die Bedingung

$$\mathbb{E} [\boldsymbol{\psi}_{k,r} \boldsymbol{\varphi}_{i,s}^T] = \mathbf{0} \quad (2.92)$$

ergibt. Damit der Rauschterm $\frac{1}{N^*} \mathbf{\Psi}_r \mathbf{\Phi}_s^T$ in Gl. (2.89) zu Null wird müssen nach Gl. (2.92) $\boldsymbol{\psi}_{k,r}$ und $\boldsymbol{\varphi}_{i,s}$ unkorreliert sein. Da $\boldsymbol{\psi}_{k,r}$ nur aus den aktuellen und zukünftigen Werten des Mess- und Prozessrauschen gebildet wird und damit keinen Einfluss auf bereits vergangen Messwerte hat, erfüllen daher jegliche Messwerte vor dem Zeitpunkt k die Bedingung in Gl. (2.92) und können so zur Bildung von $\mathbf{\Phi}_s$ verwendet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_s &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{k-1,s} & \boldsymbol{\varphi}_{k,s} & \boldsymbol{\varphi}_{k+1,s} & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{k+N^*-2,s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sl \times N^*} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k-1} & \mathbf{y}_k & \mathbf{y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-2} \\ \mathbf{y}_{k-2} & \mathbf{y}_{k-1} & \mathbf{y}_k & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-3} \\ \mathbf{y}_{k-3} & \mathbf{y}_{k-2} & \mathbf{y}_{k-1} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k-s} & \mathbf{y}_{k-s+1} & \mathbf{y}_{k-s+2} & \cdots & \mathbf{y}_{k+N^*-s-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\varphi}_{k,s} \in \mathbb{R}^{sl \times 1}$ enthält blockweise die s vorherigen Messwerte

$$\boldsymbol{\varphi}_{k,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^T & \mathbf{y}_{k-1}^T & \cdots & \mathbf{y}_{k-s+1}^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.94)$$

Der Tatsache geschuldet, dass s Messwerte aus der Vergangenheit betrachtet werden, wird s auch als Retrodiktionshorizont bezeichnet. In [Viberg *et al.*, 1997; Verhaegen & Verdult, 2007] wurde gezeigt, dass bei der Wahl der vergangenen Messwerte für $\mathbf{\Phi}_s$ die Bedingung

$$\lim_{N^* \rightarrow \infty} \frac{1}{N^*} \mathbf{X} \mathbf{\Phi}_s^T = \tilde{\mathbf{T}} \quad \text{mit} \quad \text{rang}(\tilde{\mathbf{T}}) = 2n_q \quad (2.95)$$

für den Term $\frac{1}{N^*} \mathbf{X} \mathbf{\Phi}_s^T$ in Gl. (2.89) erfüllt wird. $\tilde{\mathbf{T}}$ kann damit als eine Transformationsmatrix angesehen werden und Gl. (2.89) geht über in

$$\frac{1}{N^*} \mathbf{Y}_r \mathbf{\Phi}_s^T = \boldsymbol{\Theta}_r \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_r. \quad (2.96)$$

Somit kann ein Zusammenhang zwischen den Messwerten und der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix hergestellt werden. Hierbei wurde die Erkenntnis aus A.3 übernommen, dass das Produkt $\Theta_r \tilde{\mathbf{T}}$ die Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\Theta}_r$ eines transformierten Zustandsraums darstellt.

Wird das Zustandsraummodell Gl.(2.44) mit einer beliebig, aber invertierbaren Transformationsmatrix wie bspw. $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$ transformiert, so gilt nach Anhang A.1

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{v}_k.\end{aligned}\tag{2.97}$$

Dabei kennzeichnet $\tilde{\square}$ die transformierte Größe. Für die spätere Extraktion der modalen Parameter aus der Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ bzw. aus der nun transformierten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_d = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{T}}$ hat die Transformation lediglich einen geringen Einfluss, wie Anhang A.2 zeigt. Die Eigenwerte sind nach der Transformation identisch. Lediglich die Eigenvektoren unterscheiden sich durch Multiplikation mit der Transformationsmatrix. Die Transformation stellt denselben dynamischen Prozess in einer anderen Koordinatenbasis dar. Daraus folgt, dass die Transformation der Beobachtbarkeitsmatrix mit einer beliebigen, invertierbaren Matrix $\mathbf{T}$ die Koordinatenbasis ändert, aber keinen Einfluss auf die Identifikation der modalen Parameter hat.

Bei der Identifikation der modalen Parameter sind meist nur die l gemessenen Ausgangsgrößen bekannt. Die reale Systemordnung $2n_q$ ist meist unbekannt. Für die weiteren Betrachtungen wird daher eine maximale Systemordnung $2n_q^*$ angenommen. Damit ändert sich ebenfalls die Dimension der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix von $\mathbb{R}^{rl \times 2n_q}$ zu $\mathbb{R}^{rl \times 2n_q^*}$. Mit einer Matrix $\mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q^*}$ vollen Ranges lässt sich diese Annahme mathematisch umsetzen.

$$\mathbf{G} = \Theta_r \mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{rl \times 2n_q^*}\tag{2.98}$$

Die Matrix $\mathbf{G}$ kann mittels der Singulärwertzerlegung (engl. *Singular Value Decomposition*, SVD) zerlegt werden in

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \mathbf{\Sigma} \mathbf{v}^T = \mathbf{u} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}^T\tag{2.99}$$

mit den beiden orthogonalen Matrizen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{rl \times rl}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n_q^* \times 2n_q^*}$, der Nullmatrix

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(rl-2n_q^*) \times 2n_q^*}$ und der Matrix der Singulärwerte $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{2n_q^*}$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{2n_q^*} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_q^* \times 2n_q^*}. \quad (2.100)$$

Angenommen, die reale Systemordnung entspricht $2n_q$ und es gilt $2n_q < 2n_q^*$, dann besitzt³ $\mathbf{G}$ den Rang $2n_q$. In diesem Fall sind lediglich $2n_q$ Singulärwerte von Null verschieden und Gleichung (2.99) kann reduziert werden zu

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}_1\mathbf{S}_1\mathbf{V}_1^T \quad (2.101)$$

mit den Matrizen $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{rl \times 2n_q}$, $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$ und $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$. $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{V}_1$ enthalten jeweils die ersten $2n_q$ Spalten von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$. $\mathbf{S}_1$ entspricht dem oberen linken Teil von $\mathbf{S}$. Unter Berücksichtigung von Gl. (2.98) und anschließender Multiplikation von rechts mit $\mathbf{V}_1$ kann Gl. (2.101) umgeschrieben werden zu:

$$\mathbf{\Theta}_r \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \quad (2.102)$$

$\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{V}_1$ können wiederum als invertierbare Transformationsmatrix $\mathbf{T}_2$ zusammenfassen gefasst werden

$$\mathbf{\Theta}_r \mathbf{T}_2 = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1. \quad (2.103)$$

Wird die Struktur der vorhergehenden Gleichung mit der von Gl. (2.96) verglichen, fällt auf, dass sich die transformierte erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix durch die Matrizen $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{S}_1$ der SVD bestimmen lassen. Da die Koordinatenbasis zur Extraktion der modalen Parameter keinen Einfluss hat, kann allgemein gesagt werden, dass sich die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix $\hat{\mathbf{\Theta}}_r \in \mathbb{R}^{rl \times 2n_q}$ aus den $2n_q$ dominierenden Singulärwerten mittels der $\mathbf{U}_1$ Matrix der SVD und einer beliebigen invertierbaren Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}$ bestimmen lässt.

$$\hat{\mathbf{\Theta}}_r = \mathbf{U}_1 \mathbf{R}. \quad (2.104)$$

Die geschätzten Größen werden durch $\hat{\square}$ gekennzeichnet. Hieraus lassen sich mit den Gl. (2.82) und (2.83) die System- und Messmatrix $\hat{\mathbf{A}}_d$ und $\hat{\mathbf{C}}_d$ ermitteln.

Bei der numerischen Umsetzung wird die LQ-Zerlegung als zentrales Element zur Datenreduktion und zur Berechnung der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix genutzt.

³Dies kann mittels der Ranggleichung von Sylvester geprüft werden, [Verhaegen & Verdult, 2007]
 $\text{rang}(\mathbf{\Theta}_r) + \text{rang}(\tilde{\mathbf{T}}) - 2n_q < \text{rang}(\mathbf{\Theta}_r \tilde{\mathbf{T}}) < \min(\text{rang}(\mathbf{\Theta}_r), \text{rang}(\tilde{\mathbf{T}}))$

Die LQ-Zerlegung zerlegt eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m < n$ in

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{Q}^T. \quad (2.105)$$

Dabei hat $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Struktur einer unteren Dreiecksmatrix und $\mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist eine orthogonale ($\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) Matrix. Werden die beiden Matrizen $\mathbf{Y}_r$ und Φ_s in einer gemeinsamen Datenmatrix angeordnet, so lässt sich die LQ-Zerlegung

$$\begin{bmatrix} \Phi_s \\ \mathbf{Y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

mit $\mathbf{L}_{11} \in \mathbb{R}^{sl \times sl}$, $\mathbf{L}_{21} \in \mathbb{R}^{rl \times sl}$, $\mathbf{L}_{22} \in \mathbb{R}^{rl \times rl}$, $\mathbf{Q}_1^T \in \mathbb{R}^{sl \times N^*}$ und $\mathbf{Q}_2^T \in \mathbb{R}^{rl \times N^*}$ angeben. Wird Gl. (2.87) von rechts mit $\mathbf{Q}_1$ multipliziert und für $\mathbf{Y}_r$ die LQ-Zerlegung

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{L}_{21}\mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22}\mathbf{Q}_2^T \quad (2.107)$$

eingesetzt, folgt unter Berücksichtigung von $\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ und $\mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$

$$\mathbf{L}_{21} = \Theta_r \mathbf{X} \mathbf{Q}_1 + \Psi_r \mathbf{Q}_1. \quad (2.108)$$

Die Multiplikation von rechts mit $\mathbf{Q}_1$ führt im ersten Term auf der rechten Seite lediglich zu einer Transformation der Koordinatenbasis. In [Verhaegen & Verdult, 2007] wurde gezeigt, dass auch das Produkt $\Psi_r \mathbf{Q}_1$ asymptotisch für $N^* \rightarrow \infty$ gegen Null geht, sodass gilt:

$$\mathbf{L}_{21} = \Theta_r \mathbf{T}_3 \quad (2.109)$$

Diese Darstellung entspricht wieder der Struktur von Gl. (2.98). Wie in Gl. (2.99) - (2.104) gezeigt, lässt sich die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix durch die SVD von $\mathbf{L}_{21}$, die nur aus Messwerten gebildet wird, bestimmen. Durch die Verwendung von vergangenen Zeitwerten ist darauf zu achten, dass bei der Auswertung $N = N^* + r + s - 1$ Datenpunkte zur Verfügung stehen bzw. ergibt sich N^* zu $N^* = N - r - s + 1$ bei N zur Verfügung stehenden Datenpunkten.

Ist die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix bekannt, lassen sich daraus die modalen Parameter extrahieren. Die beschriebene Vorgehensweise lehnt sich an die IV-Methode (engl. *Instrumental Variables*, IV) an und ist ein Sonderfall des MOESP-Algorithmus (engl. *Multiple-Input, Multiple-Output Output-Error State Space*) von [Verhaegen & Dewilde, 1992]. Die deterministischen Eingänge $\mathbf{u}_k$ wurden von Anfang an als Rauschterme aufgefasst. Die Schätzung der modalen Parameter aus der gemessenen Systemantwort lässt sich zusammenfassend in sechs Schritte aufteilen:

1. Aufbau der Datenmatrizen $\mathbf{Y}_r$ Gl. (2.84) und $\mathbf{\Phi}_s$ Gl. (2.93) in Blockmatrizen
2. LQ-Zerlegung der Datenmatrix $\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s \\ \mathbf{Y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix}$ Gl. (2.106)
3. Singulärwertzerlegung $\mathbf{\Theta}_r \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{G} = \mathbf{L}_{21} \approx \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1$ Gl. (2.101)
4. Bestimmung der Beobachtbarkeitsmatrix $\hat{\mathbf{\Theta}}_r = \mathbf{U}_1$ Gl. (2.104)
5. Bestimmung der Messmatrix $\hat{\mathbf{C}}_d = \hat{\mathbf{\Theta}}_r (1 : l, 1 : 2n_q)$ Gl. (2.82) und Systemmatrix aus dem Gleichungssystem $\hat{\mathbf{\Theta}}_r (l + 1 : rl, 1 : 2n_q) = \hat{\mathbf{\Theta}}_r (1 : l(r - 1), 1 : 2n_q) \hat{\mathbf{A}}_d$ Gl. (2.83)
6. Bestimmung der Modalparameter

Die Modalparameter lassen sich aus den Eigenwerten $\lambda_{d,i}$ und -vektoren $\hat{\mathbf{x}}_{d,i}$ der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}_d$ bestimmen mit $\lambda_i = \frac{\ln(\lambda_{d,i})}{\Delta t}$

$$\begin{aligned} \omega_{0,i} &= \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda_i)^2 + \operatorname{Im}(\lambda_i)^2} \\ \xi_i &= -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\omega_{0,i}} \\ \bar{\mathbf{x}}_i &= \hat{\mathbf{C}}_d \hat{\mathbf{x}}_{d,i} \end{aligned} \tag{2.110}$$

2.3 Kerndichteschätzung: Parzen-Fenster-Methode

Mit der im vorherigen Kapitel dargestellten SSI lassen sich die modalen Parameter für eine bestimmte vorgegebene Systemordnung $2n_q$ aus den Messdaten extrahieren. Da die reale Modellordnung bei den Output-Only Verfahren i.d.R. nicht bekannt ist, wird die Systemidentifikation anhand von Stabilisierungsdiagrammen (vgl. Kapitel 3.1.2) für eine Vielzahl von Systemordnungen ausgewertet. In dieser Arbeit wird ein neues Konzept vorgestellt, welches die Auswertung basierend auf einem Kerndichteschätzer Ansatz automatisiert. Hierzu wird das Konzept der Parzen-Fenster-Methode (auch bekannt als Parzen-Rosenblatt-Fenster Methode) zur Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen angewendet, welches im Folgenden erläutert wird, [Rosenblatt, 1956; Parzen, 1962].

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f(x)$ spielen in der Stochastik eine elementare Rolle und werden zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P einer Zufallsvariablen X zwischen den Grenzen a und b herangezogen.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \tag{2.111}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dabei stets größer Null und die eingeschlossene Fläche zwischen $f(x)$ und der Abszisse ergibt die Gesamtwahrscheinlichkeit 1.

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= 1 \end{aligned} \tag{2.112}$$

Vielfach fehlt die genaue Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines Prozesses und muss mittels Experimenten ermittelt werden. Die Ergebnisse $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eines n -mal wiederholten Experimentes der Zufallsvariablen X werden als Realisierungen bezeichnet. Wird der Wertebereich aller Realisierungen in $m \in \mathbb{N}$ Intervalle mit einer gleichgroßen Breite h aufgeteilt und die Anzahl der in den jeweiligen Intervallen liegenden Realisierungen gezählt, ergibt sich ein Histogramm. Werden die Histogrammwerte schlussendlich durch die Gesamtzahl der Realisierungen n geteilt, kann dieses zur Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte, die dem Prozess zugrunde liegt, herangezogen werden. Dieses Vorgehen wird als Dichteschätzung bezeichnet.

Prinzipiell kann bei der Dichteschätzung zwischen den parametrischen und nicht-parametrischen Verfahren unterschieden werden. Bei den parametrischen Verfahren wird a priori eine Funktionsfamilie, die die mathematische Form der Dichtefunktion beschreibt, festgelegt. Ziel hier ist die Bestimmung der jeweiligen Parameter der Funktionsfamilie. In Tabelle 2.1 sind beispielhaft drei wichtige Vertreter von Verteilungsfunktionen aufgeführt. Die Gleichverteilung findet überwiegend in der Stochastik bei Zufallsexperimenten ihre Anwendung. Die Normalverteilung ist mit die wichtigste Verteilungsfunktion und wird in zahlreichen Anwendungen und Fachgebieten eingesetzt. Für technische Prozesse bedeutend ist die Weibull-Verteilung, die vornehmlich bei der Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten komplexer technischer Komponenten oder zur Modellierung von (Wind-) Geschwindigkeitsprofilen herangezogen wird. Nachteilig an den parametrischen Schätzern ist die Auswahl und Festlegung einer Funktionsfamilie im Vorhinein. Diese Vorabauswahl ist bei den nicht-parametrischen Schätzverfahren obsolet, da die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion direkt aus den empirisch Realisierungen gewonnen wird. Eine der bekanntesten Familie nicht-parametrischer Schätzverfahren sind die Kerndichteschätzer.

Kerndichteschätzer sind eine Erweiterung des oben kurz angerissenen Histogrammschätzers und basieren auf der Annahme, dass jede Realisierung x_i der Zufallsvariable X wiederum selbst eine Zufallsvariable mit einer eigenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist. Die allgemeine Form eines univariaten Kerndichteschätzers für die geschätzte

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\hat{f}(x)$ ist

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) \, dt = 1. \quad (2.113)$$

Darin bezeichnet $K(t)$ den Kern des Schätzers, h die Bandbreite und x_i die i -te aus allen n Realisierungen der Zufallsvariablen X .

Das Prinzip der Kerndichteschätzung ist beispielhaft mit 6 Realisierungen links in Abbildung 2.2 dargestellt. In Regionen mit einer hohen Ansammlung der Realisierungen x_i ergibt sich durch die Summation jeder einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichte eine globale hohe Dichte. Ebenso wird der Einfluss der Bandbreite h deutlich. Eine hohe Bandbreite führt zu einer Glättung der Verteilung, wo hingegen eine kleine Bandbreite zu einer Schärfung der kumulierten Verteilung führt. Der Bandbreitenparameter h wird daher auch als Smoothing-Parameter bezeichnet. Seiner Wahl kommt daher eine große Bedeutung zu, auf die im Folgenden eingegangen wird. Ebenfalls in Abbildung 2.2 sind rechts verschiedene Kerne $K(t)$ dargestellt, die in [Silverman, 1986] und [Simonoff, 1996] näher betrachtet werden. Beide stellen heraus, dass die Wahl des Kerns in Bezug auf den Fehler zwischen $f(x)$ und $\hat{f}(x)$ (es wird hier der MISE, bzw. AMISE herangezogen, vgl. Kap. 2.3.1) nur einen geringen Einfluss hat, so dass die Wahl des Kerns vornehmlich nach Gesichtspunkten einer guten Differenzierbarkeit und einem möglichst geringen Rechenaufwand gewählt werden sollte. Diesen beiden Anforderungen wird der Gauß-Kern gerecht, der im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet wird. Der univariate Gauß-Kern-Dichteschätzer ergibt sich

Verteilung	math. Beschreibung	Parameter
Gleichverteilung	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	a, b
Normalverteilung	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ, σ^2
Weibull-Verteilung	$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\alpha > 0, \beta > 0$

Tabelle 2.1: Wichtige Vertreter von Verteilungsfunktionen.

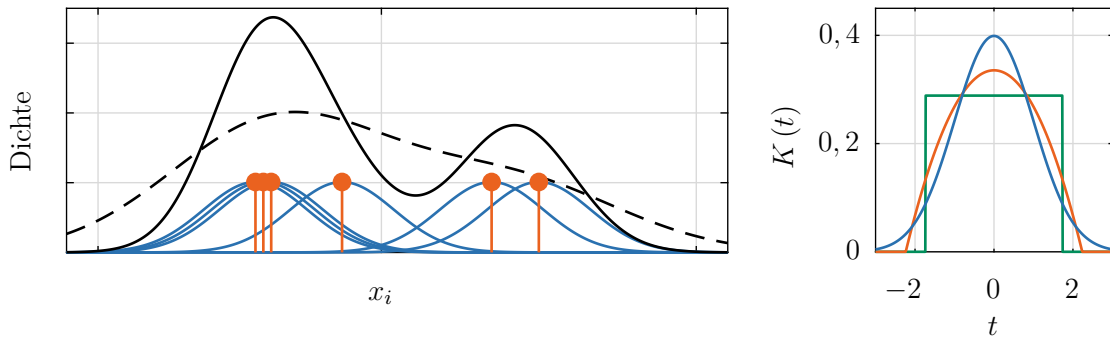


Abbildung 2.2: Links: Exemplarische Wirkungsweise des Kerndichteschätzers für 6 Realisierungen (●) zur Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (—) mit Gauß-Kernen (—) der Bandbreite h . Ebenfalls ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (- -) für Gaußkerne mit der Bandbreite $2h$ dargestellt. Rechts: Mögliche Kerne $K(t)$; Gauß-Kern (—), Gleichverteilungs-Kern (—) und Epanechnikov-Kern (—).

somit zu

$$\hat{f}_{\text{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2}. \quad (2.114)$$

Zwei wesentliche nennenswerte Eigenschaften ergeben sich aus Gleichung (2.113). Ist der Kern $K(t)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, so ist auch $\hat{f}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Und: ist $K(t)$ m -mal stetig differenzierbar, so ist auch $\hat{f}(x)$ m -mal stetig differenzierbar. Weitere Eigenschaften zu Kern-Dichteschätzern finden sich bspw. in [Silverman, 1986].

2.3.1 Gütekriterien

Zur Bewertung der Güte des Kerndichteschätzers wird der mittlere quadratische Fehler (engl. *Mean Squared Error*, MSE) herangezogen und ist definiert als

$$\text{MSE}(\hat{f}(x)) = \text{E} \left[\left(\hat{f}(x) - f(x) \right)^2 \right]. \quad (2.115)$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass der Wert von $\hat{f}(x)$ an der Stelle x wiederum selbst eine Zufallsvariable ist. Dies lässt sich anschaulich darstellen, weil $\hat{f}(x)$ abhängig von den Realisierungen von X ist. Werden andere Realisierungen von X verwendet, so hat dies auch einen direkten Einfluss auf $\hat{f}(x)$. Der MSE kann als eine Funktion der Varianz von $\hat{f}(x)$ und dem Quadrat des systematischen Fehlers (Bias) angegeben werden.

$$\text{MSE}(\hat{f}(x)) = \underbrace{\left(\text{E}[\hat{f}(x)] - f(x) \right)^2}_{\text{Bias}} + \text{var}(\hat{f}(x)) \quad (2.116)$$

Der MSE gibt einen lokalen Fehler an der Stelle x an. Zur Betrachtung des globalen Fehlers hat [Rosenblatt, 1956] den integrierten mittleren Quadratischen Fehler (engl. *Mean Integrated Squared Error*, MISE)

$$\text{MISE}(\hat{f}(x)) = \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] \quad (2.117)$$

eingeführt. Dieser kann wieder in Abhängigkeit von der Varianz und dem Bias angegeben werden. Da der Integrand stets positiv ist, kann die Integration und der Erwartungswertoperator vertauscht werden, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{MISE}(\hat{f}(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{MSE}(\hat{f}(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{E}[\hat{f}(x)] - f(x))^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}(\hat{f}(x)) dx \end{aligned} \quad (2.118)$$

Für den in Gleichung (2.113) angegebenen Kerndichteschätzer hat [Whittle, 1958] den Erwartungswert und die Varianz mit

$$\mathbb{E}[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy \quad \text{und} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{f}(x)) &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{x-y}{h}\right)^2 f(y) dy \\ &\quad - \left(\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy \right)^2 \end{aligned} \quad (2.120)$$

angegeben, mit denen der MISE exakt berechnet werden kann, wenn $f(y)$ bekannt ist. Neben der Wahl des Kerns und der Bandweite h hat auch die Anzahl der Realisierungen n einen Einfluss auf die Qualität der Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Wie in den Gleichungen (2.118) und (2.119) zu sehen ist, hängt der Bias nicht von n ab. Somit führt eine Erhöhung der Realisierung n nicht zwangsläufig zu einer verbesserten Schätzung. Der Einfluss der Bandbreite h ist mit den angegebenen Beziehungen nicht direkt ersichtlich.

Um dennoch eine Aussage über den Einfluss der Bandbreite zu machen, können (2.119) und (2.120) in eine Taylorreihe entwickelt und anschließend in die Beziehungen (2.116) und (2.118) eingesetzt werden. Unter den Annahmen

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} tK(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t) dt = k_2 \neq 0 \quad (2.121)$$

zeigen [Silverman, 1986] und [Simonoff, 1996], dass sich der asymptotisch mittlere quadratischer Fehler (engl. *Asymptotic Mean Squared Error*, AMSE) und asymptotisch integrierte mittlere quadratischer Fehler (engl. *Asymptotic Mean Integrated Squared Error*,

AMISE) berechnen lassen als:

$$\text{AMSE}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{4}h^4k_2^2f''(x)^2 + \frac{1}{nh}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(t)^2dt \quad (2.122)$$

$$\text{AMISE}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{4}h^4k_2^2\int_{-\infty}^{\infty}f''(x)^2dx + \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty}K(t)^2dt \quad (2.123)$$

Dabei ist $f''(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$ und es wird davon ausgegangen, dass h sehr klein ($h \rightarrow 0$), n sehr groß ($n \rightarrow \infty$) und damit das Produkt nh ebenfalls sehr groß ($nh \rightarrow \infty$) ist. Der erste Summand jeweils entspricht dabei dem approximierten quadratischen Bias aus Gleichung (2.118), der zweite Summand demnach der Varianz. Anhand dieser Darstellung ist der Einfluss der Bandbreite ersichtlich. Kleine Bandbreiten führen zu kleinen systematischen Fehlern. Gleichzeitig führt jedoch eine kleine Bandbreite zu einer Erhöhung der Varianz. Dieses Verhalten wird in der Literatur unter dem Begriff Verzerrung-Varianz-Dilemma diskutiert und muss bei der Wahl der Bandbreite berücksichtigt werden.

Wahl der Bandbreite

Die optimale Bandbreite h_{opt} kann durch Minimierung des AMISE bestimmt werden.

$$h_{\text{opt}} = \arg \min_{h \in \mathbb{R}} (\text{AMISE}) \quad (2.124)$$

Wie in [Parzen, 1962] gezeigt wurde, führt dies zu

$$h_{\text{opt}} = k_2^{-\frac{2}{5}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{5}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)^2 dx \right)^{-\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}. \quad (2.125)$$

Die optimale Bandbreite hängt einerseits von der Wahl des Kerns, aber auch von der zweiten Ableitung der gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ und der Anzahl n der Realisierungen ab. Stehen viele Realisierungen zu Verfügung, so führt dies zu einer kleineren Bandbreite, da mehr Information über den stochastischen Prozesse zu Verfügung stehen. Die zweite Ableitung zeigt die Änderung der Steigung an. Ist sie klein, so ändert sich die Steigung nur moderat, ist sie groß, ändert sich die Steigung schnell. Dies führt dazu, dass schnelle Änderungen in der Steigung zu kleinen Bandbreiten führen, bzw. langsame Änderungen der Steigung zu hohen Bandbreiten. Dies bedeutet jedoch auch, dass große Bandbreiten nur kleine Änderungen der Steigung zulassen. Damit stärkt diese Interpretation den Begriff des Smoothing-Parameters.

Wird als Referenzwahrscheinlichkeitsdichtefunktion eine Standardnormalverteilung mit Mittelwert Null und Standardabweichung σ gewählt, kann die optimale Bandbreite

für einen bestimmten Kern berechnet werden. Im Falle eines Gauß-Kern gilt

$$h_{\text{opt, Gauß}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \sigma n^{-\frac{1}{5}} = 1,06\sigma n^{-\frac{1}{5}} \quad (2.126)$$

und wird u.a. auch als Silvermans Faustregel (engl. *Silvermans Rule of Thumb*) bezeichnet. Die Standardabweichung σ kann aus den Realisierungen ermittelt werden.

Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist die Voraussetzung einer Standardnormalverteilung, die nicht in jedem Fall die wahre Wahrscheinlichkeitsdichte widerspiegelt. In der Literatur sind daher weitere verschiedenste Ansätze zur Bestimmung der optimalen Bandbreite zu finden. Angefangen von der Anpassung durch Augenmaß bis hin zu mathematisch aufwendigen Verfahren, die i.d.R. darauf basieren, den MISE oder den AMISE zu minimieren. Zu den bekanntesten Verfahren zählen die Likelihood Cross Validation (LCV, [Habbema *et al.*, 1974; Duin, 1976]), die Least Squares Cross Validation (LSCV, [Rudemo, 1982; Bowman, 1985]), die Biased Cross Validation (BCV, [Scott & Terrell, 1987]), die Smoothed Cross Validation (SCV, [Hall *et al.*, 1992]) und die Direct-Plug-In Methode [Sheather & Jones, 1991]. Vergleichende Übersichten sind bspw. in [Wand & Jones, 1995], [Duong, 2004] und [Heidenreich *et al.*, 2013] zu finden. In dieser Arbeit wird in Kapitel 3.1.4 ein merkmals-selektiver Ansatz zur Wahl der Bandbreite vorgestellt, der weder im Spannungsverhältnis des Varianz-Verzerrungs-Dilemmas steht, noch abhängig von der Anzahl n der Realisierungen ist.

Wahl des Kerns

Bei der Wahl des Kerns kann wiederum der AMISE herangezogen werden. Die optimale Bandbreite h_{opt} ist noch abhängig vom Kern $K(t)$. Wird diese in Gleichung (2.123) eingesetzt, kann der asymptotische Fehler mit der optimalen Bandbreite berechnet werden:

$$\text{AMISE}_{h_{\text{opt}}} = \frac{4}{5} k_2^{\frac{2}{5}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t)^2 dt \right)^{\frac{4}{5}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{4}{5}} \quad (2.127)$$

Auf die wahre Verteilung $f(x)$ kann nur schwerlich Einfluss genommen werden, so dass nur die Möglichkeit, durch die Wahl eines geeigneten Kerns $K(t)$ der den Ausdruck

$$C(K) = k_2^{\frac{2}{5}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t)^2 dt \right)^{\frac{4}{5}} \quad (2.128)$$

zu minimieren, besteht. [Epanechnikov, 1969] hat gezeigt, dass der Kern

$$K_e(t) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}t^2\right) & |t| < \sqrt{5} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.129)$$

Kern	math. Beschreibung	Effektivität
Epanechnikov	$K(t) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}t^2\right) & t < \sqrt{5} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	1
Biweight	$K(t) = \begin{cases} \frac{15}{16} (1 - t^2)^2 & t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	0,9939
Dreieck	$K(t) = \begin{cases} 1 - t & t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	0,9859
Gauß	$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$	0,9512
Rechteck	$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	0,9295

Tabelle 2.2: Effektivität typischer Kerne $K(t)$.

die Konstante $C(K)$ zu $C(K_e) = \left(\frac{3}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{4}{5}}$ minimiert. Dieser Kern wird als Epanechnikov-Kern bezeichnet. Um die Effektivität eines Kerns relativ zum optimalen Kern K_e zu bewerten wird das Verhältnis

$$\eta(K) = \frac{C(K_e)}{C(K)} \quad (2.130)$$

eingeführt. Tabelle 2.2 gibt die Effektivität für typische Kerne $K(t)$ zur Schätzung von $\hat{f}(x)$ an. Alle dargestellten Kerne liegen mit Werten der Effektivität von 0,9295 bis 0,9939 sehr nahe im Bereich des optimalen Epanechnikov-Kerns. Somit hat die Wahl eines bestimmten Kerns keinen großen Einfluss auf die Effektivität der Kerndichteschätzung, obwohl sich die dargestellten Kerne deutlich unterscheiden.

2.3.2 Multivariate Gauß-Verteilung

Im vorangegangenen Abschnitt wurden lediglich univariate Kerndichteschätzer betrachtet. Die Erkenntnisse können auch auf den multivariaten Fall übertragen werden, der in Kapitel 5.4.2 Anwendung findet. Die nachfolgenden Ausführungen können im Detail in [Silverman, 1986; Wand & Jones, 1995] nachvollzogen werden. Vorausgesetzt wird, dass $n \in \mathbb{N}$ Realisierungen $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ der d -dimensionalen Zufallsvariablen $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ vorhanden sind, die einer Dichtefunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ unterliegen. Der allgemeinste Kern-Dichte-

Schätzer für die Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ hat die Form

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n |\mathbf{H}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^n K_d(\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^d} K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1 \quad (2.131)$$

und der symmetrischen und positiv definiten Bandbreitenmatrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Der Operator $|\bullet|$ steht für die Determinante. Gewöhnlich wird für K_d eine radial-symmetrische unimodale Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion verwendet, die sich mit Hilfe des Produktansatzes

$$K_d(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d K(t_j) \quad (2.132)$$

aus dem univariaten Kern $K(t)$ berechnen lässt. Oftmals wird die multivariate Gauß-Verteilung mit

$$K_d(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T \mathbf{t}} \quad (2.133)$$

als Kern verwendet sodass sich analog zu (2.113) der multivariate Gauß-Kern-Dichteschätzer zu

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{Gauß}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\mathbf{H}|}} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)} \quad (2.134)$$

ergibt. In Abbildung 2.3 ist beispielhaft die Wirkungsweise graphisch dargestellt. Die Bandbreitenmatrix $\mathbf{H}$ kann dabei als Kovarianzmatrix der multivariaten Standardnormalverteilung aufgefasst werden. Wie auch im univariaten Fall, hat die Wahl des Kerns nur einen geringen Einfluss auf den asymptotischen mittleren integrierten quadratischen Fehler. Unter Anwendung der multivariaten Taylorreihenentwicklung und den Annahmen

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{t} K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{t} \mathbf{t}^T K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \mu_2 \mathbf{I} \quad (2.135)$$

mit $\mu_2 = \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ ergibt sich der AMISE zu

$$\text{AMISE}(\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = \frac{1}{4} \mu_2^2 \int_{\mathbb{R}^d} \text{tr}(\mathbf{H} \mathcal{H}_p(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{n |\mathbf{H}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} K_d(\mathbf{t})^2 d\mathbf{t}. \quad (2.136)$$

Dabei kennzeichnet $\text{tr}(\bullet)$ die Spur einer Matrix und $\mathcal{H}_p(\mathbf{x})$ ist die Hesse-Matrix von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Auf die Herleitung von MISE und AMISE und deren Berechnung sei auf [Wand & Jones, 1995] und [Simonoff, 1996] verwiesen. Für die Wahl der optimalen Bandbreitenmatrix $\mathbf{H}$ kann wie im univariaten Fall vorgegangen werden, indem der AMISE minimiert wird. Auch hier ist der AMISE abhängig von der wahren Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Eine geschlossene Lösung wie im univariaten Fall ist nicht möglich [Wand, 1992].

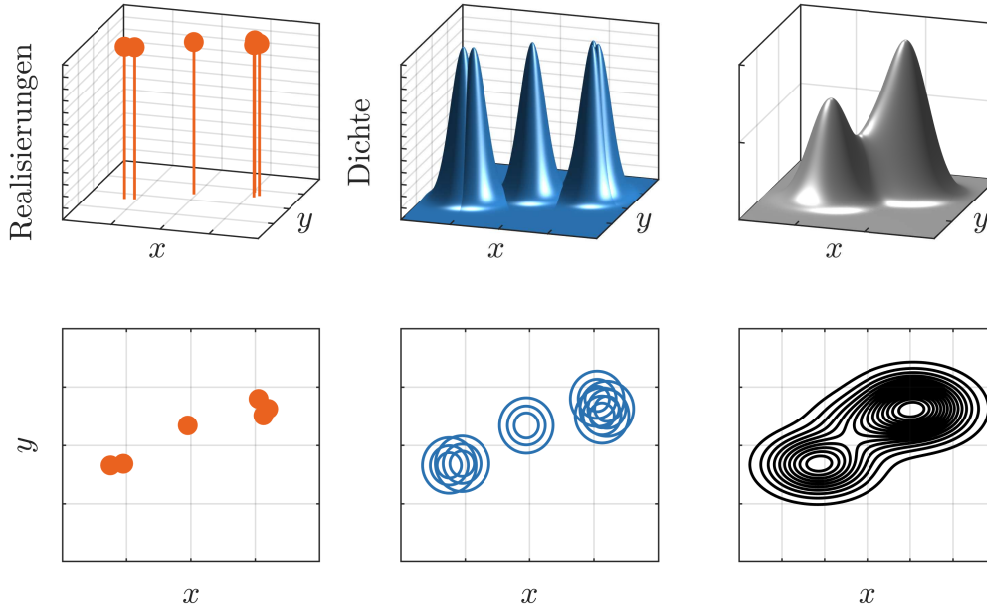


Abbildung 2.3: Exemplarische Wirkungsweise des multivariaten Kerndichteschätzers für 6 Realisierungen (●) zur Bildung der Gesamtwahrscheinlichkeitsdichtefunktion (—) mit Gauß-Kernen (—) der Bandbreite $h_i = 1$. Oben: 3D Darstellung. Unten: Kontur-Darstellung.

Wird die multivariate Standardnormalverteilung als Referenz gewählt, kann eine optimale Bandbreitenmatrix $\mathbf{H}_{\text{opt, Gauß}}$ angegeben werden.

$$\mathbf{H}_{\text{opt, Gauß}} = \left(\frac{4}{d+2} \right)^{\frac{1}{d+4}} \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{d+4}} \quad (2.137)$$

Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ kann aus den Realisierungen von $\mathbf{X}$ bestimmt werden und nimmt Diagonalgestalt an, wenn $\mathbf{X}$ unabhängig ist. Weitere Lösungen können angegeben werden, wenn an die Struktur der Bandbreitenmatrix bestimmte Anforderungen gestellt werden. Bspw. wenn es sich um eine Diagonalmatrix mit $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, \dots, h_d^2)$ oder um eine gleiche Bandbreite h in alle Dimensionen mit $\mathbf{H} = h^2 \mathbf{I}$ handelt.

2.3.3 Jensen-Shannon-Divergenz Metrik

Um verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen miteinander zu vergleichen ist eine geeignete Maßzahl unabdingbar. In der Wahrscheinlichkeits- und Informationstheorie weitverbreitet ist die Jensen-Shannon-Divergenz Metrik (JSDM), die der Quadratwurzel der Jensen-Shannon-Divergenz JSD [Lin, 1991] entspricht und auf der Kullback-Leibler-Divergenz KLD basiert, die auf [Kullback & Leibler, 1951] zurückzuführen ist. Ziel ist

es, mit dieser Maßzahl in einem skalaren Wert bewerten zu können, wie unterschiedlich bzw. gleich zwei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind. Für zwei kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\text{JSD}(f, g) = \frac{1}{2} \left(\text{KLD} \left(f, \frac{f+g}{2} \right) + \text{KLD} \left(g, \frac{f+g}{2} \right) \right) \quad (2.138)$$

$$\text{JSDM}(f, g) = \sqrt{\text{JSD}(f, g)} \quad (2.139)$$

mit der Kullback-Leibler-Divergenz

$$\text{KLD}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \log_2 \left(\frac{f}{g} \right) dx. \quad (2.140)$$

Zur übersichtlicheren Darstellung wurde auf die Schreibweise mit der Abhängigkeit von x verzichtet. Die Kullback-Leibler-Divergenz $\text{KLD}(f(x), g(x))$ entspricht der relativen Entropie im Sinne der Informationstheorie und ist ein Maß für die Unterschiedlichkeit zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen [Cover & Thomas, 2006]. Sie gibt an, wie sich eine Verteilung $g(x)$ von der Verteilung $f(x)$ unterscheidet. Bei perfekter Übereinstimmung mit $g(x) = f(x)$ entspricht sie dem Wert Null. Sind hingegen die beiden Verteilungen komplett unterschiedlich so nimmt sie den Wert ∞ an. Jedoch ist sie nicht symmetrisch

$$\text{KLD}(f(x), g(x)) \neq \text{KLD}(g(x), f(x))$$

und erfüllt nicht die Dreiecksungleichung

$$\text{KLD}(f(x), g(x)) \not\leq \text{KLD}(f(x), h(x)) + \text{KLD}(h(x), g(x)),$$

die für eine Metrik (eine Abstandsfunktion) notwendig ist. In [Endres & Schindelin, 2003; Fuglede & Topsoe, 2004; Vajda, 2009] wurde gezeigt, dass die Jensen-Shannon-Divergenz Metrik alle Anforderungen für beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ an eine Metrik erfüllt:

Nicht-Negativität:	$\text{JSDM}(f, g) \geq 0$
Identität:	$\text{JSDM}(f, g) = 0 \quad \text{für} \quad f(x) = g(x)$
Symmetrie:	$\text{JSDM}(f, g) = \text{JSDM}(g, f)$
Dreiecksungleichung:	$\text{JSDM}(f, g) \leq \text{JSDM}(f, h) + \text{JSDM}(h, g)$

Eine weitere wesentliche Eigenschaft der JSDM ist, dass sie zwischen 0 und 1 begrenzt ist:

$$0 \leq \text{JSDM}(f, g) \leq 1 \quad (2.141)$$

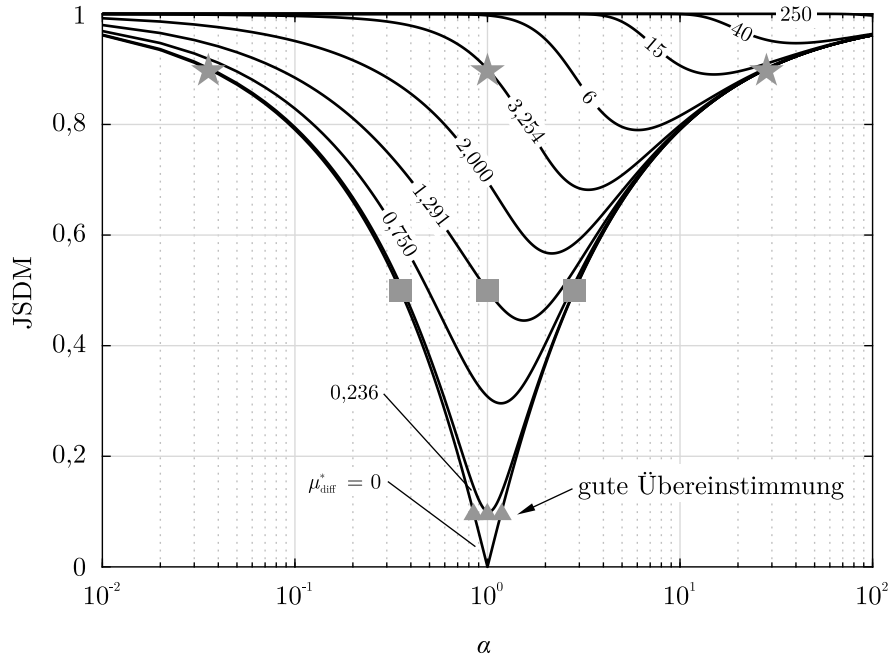


Abbildung 2.4: Jensen-Shannon-Divergenz Metrik (JSDM) von zwei gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in Abhängigkeit der normierten Standardabweichung α und normierten Verschiebung μ_{diff}^* . Dargestellt sind ebenfalls ausgewählte Punkte mit gleicher JSDM ($\blacktriangle = 0,1$; $\blacksquare = 0,5$; $\star = 0,9$).

Bei perfekter Übereinstimmung mit $g(x) = f(x)$ entspricht sie dem Wert Null. Sind hingegen die beiden Verteilungen komplett unterschiedlich so nimmt sie den Wert 1 an.

Um ein Gefühl für die Größenordnungen bei der späteren Bewertung der Ergebnisse basierend auf der JSDM zu erhalten wird der Einfluss auf die Verschiebung des Mittelwerts und die Änderung der Standardabweichung zweier gaußscher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_f}{\sigma_f} \right)^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_g}{\sigma_g} \right)^2}$$

mit den Mittelwerten μ_f und μ_g , sowie den beiden Standardabweichungen σ_f und σ_g untersucht. Dazu wird das Verhältnis der Standardabweichungen $\alpha = \frac{\sigma_g}{\sigma_f}$ (normierte Standardabweichung), die Verschiebung der Mittelwerte $\mu_{\text{diff}} = \mu_g - \mu_f$ und die auf die Standardabweichung σ_f normierte Verschiebung der Mittelwerte $\mu_{\text{diff}}^* = \frac{\mu_{\text{diff}}}{\sigma_f}$ eingeführt. Die JSDM-Metrik kann für verschiedene Kombinationen von α und μ_{diff}^* numerisch berechnet werden (vgl. Abb. 2.4). Eine geschlossene analytische Lösung existiert für gaußsche Mischmodelle, wie sie zur Berechnung der JSDM benötigt werden, nicht, [Watanabe *et al.*, 2004; Nielsen & Sun, 2016].

Dargestellt sind in Abbildung 2.4 ebenfalls ausgewählte Punkte mit derselben JSDM.

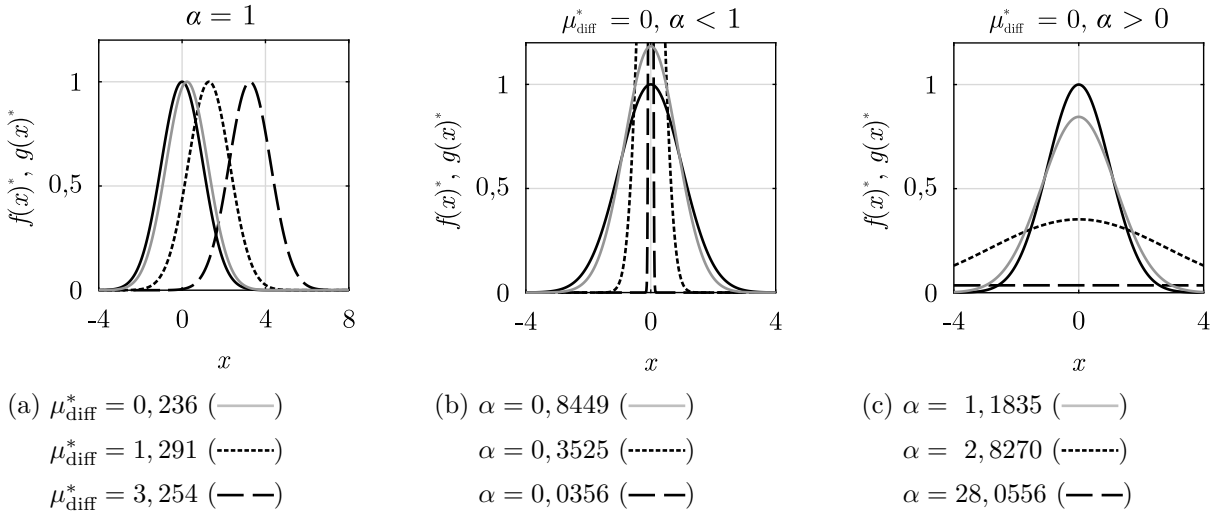


Abbildung 2.5: Dargestellt sind jeweils die mit $\sigma_f\sqrt{2\pi}$ normierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $g(x)^*$ für die konstanten JSDM-Werte 0,1 (—), 0,5 (.....) und 0,9 (— —) in Abhängigkeit der Verschiebung μ_{diff}^* und normierten Standardabweichung α im Vergleich zu $f(x)^*$ (—).

Dabei wurde zum einen die normierte Standardabweichung $\alpha = 1$ und zum anderen die normierte Verschiebung $\mu_{\text{diff}}^* = 0$ konstant gehalten. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 2.5 für die verschiedene Szenarien die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dargestellt. Hier wurde zur Normierung jeweils das Produkt $\sigma_f\sqrt{2\pi}$ verwendet. Gut zu erkennen ist, dass JSDM-Werte von 0,1 nur geringe Abweichungen zur Vergleichsfunktion $f(x)^*$ aufweisen. Ein JSDM-Wert von 0,5 lässt auf eine moderate Verschiebung schließen. Jedoch wird deutlich, dass solch ein Wert bereits mit einer evidenten Änderung der Standardabweichung einhergeht und beide Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bereits sehr unterschiedliche Charakteristiken aufweisen. Dieses Verhalten zeigt sich ebenfalls deutlich bei JSDM-Werten von 0,9; deutlich jetzt auch bei der Verschiebung zu sehen. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein JSDM-Wert von kleiner als 0,1 als ausreichend gute Übereinstimmung zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen definiert.

2.4 Schienenfahrzeuge

In dieser Arbeit werden Schienenfahrzeuge als praktisches Anwendungsbeispiel für die Identifikation von defekten Komponenten gewählt. Der Fokus wird auf die Fahrwerke gelegt. Das System Schiene, Schienenfahrzeuge, Fahrwerke und dessen wesentlichen Komponenten werden im Folgenden für das grundlegende Verständnis kurz vorgestellt.



Abbildung 2.6: Typischer Aufbau eines Schienenfahrzeuges bestehend aus Wagenkästen und Fahrwerken am Beispiel des 4-teiligen ALSTOM Coradia Continental Regionalzuges.

In Abbildung 2.6 ist ein Schienenfahrzeug für den Personenverkehr mit dem typischen Aufbau aus Wagenkästen, Fahrwerken, Antriebs- und Bremsseinheiten dargestellt. Schienenfahrzeuge sind Teil des hochkomplexen Bahnsystems und nach DIN 25003 den spurgeführten Fahrzeugen zuzuordnen. Charakteristisch sind ihre mit einem Spurkranz versehenen Räder, die das Fahrzeug entlang eines Gleises mit i.d.R. konstanter Spurweite tragen und führen. Wesentliche Vorteile gegenüber anderen Landverkehrssystemen sind der geringe Raumbedarf, die niedrigen Treibhausgasemissionen und ihr niedriger spezifischer Energieverbrauch, der durch eine geringe Rollreibung zwischen den aus Stahl gefertigten Gleisen und Rädern resultiert. Die Schnittstelle zwischen dem Schienenfahrzeug und den Gleisen wird als Rad-Schiene-Kontakt-Punkt (vgl. Abbildung 2.8) bezeichnet. Er übernimmt die elementaren technischen Funktionen für das Abstützen des Fahrzeuggewichtes, das Führen und das Antreiben bzw. Bremsen.

Neben dem Schienenfahrzeug besteht das Bahnsystem im wesentlichen aus den beiden Teilbereichen Infrastruktur und der betrieblichen Organisation. Die Infrastruktur umfasst die Betriebsanlagen einschließlich der Bahnstromfernleitungen. Dazu zählt vor allem der Fahrweg, mit den Gleisen, den Schwellen, dem Ober- und Unterbau, sowie Bahnhöfe und Betriebsgebäude. Auch die Signaltechnik mit den Zugsteuerungssystemen, den Stellwerken und Leitzentralen werden in der Bahninfrastruktur eingegliedert. Die betriebliche Organisation ist für die sichere und zuverlässige Abwicklung des Zugverkehrs verantwortlich. Dazu zählt vor allem die Sicherstellung der notwendigen Prozesse zur Zugbildung und Abstellung, aber auch das Bereitstellen des notwendigen Personals, welches für einen zuverlässigen Betrieb notwendig ist.

Alle drei Teilsysteme interagieren nicht unabhängig von einander, sondern unterliegen ständigen Wechselwirkungen, die in [Jänsch *et al.*, 2021] detailliert beschrieben werden.

2.4.1 Grundlegender Aufbau von Fahrwerken

Fahrwerke, wie in Abbildung 2.8 dargestellt, bilden das Bindeglied zwischen Schienen und Wagenkasten. Neben den bereits genannten Funktionen, dem Tragen der Gewichtskräfte, der Spurführung und dem Antreiben und Bremsen des Schienenfahrzeugs entkoppeln sie die Bewegungen zwischen Gleis und Wagenkasten weitgehend mit dem Ziel, einen adäquaten Fahrkomfort für die Passagiere durch Reduzierung von Stößen aus Schienenebenheiten zu gewährleisten. Ebenso verfolgen Fahrwerkskonstruktionen das Ziel den Rollwiderstand zwischen Rad und Schiene auf ein Minimum zu reduzieren, um damit möglichst geringe Beanspruchungen im Oberbau und damit einhergehend ein geringes Verschleißverhalten von Rad und Schiene zu ermöglichen, mit der Maxime, eine möglichst hohe Laufleistung zwischen den Instandhaltungsmaßnahmen zu erreichen. Die wichtigste Funktion ist jedoch doch die Gewährleistung einer sicheren Spurführung um die Sicherheit gegen Entgleisung bis zur vorgesehenen Höchstgeschwindigkeit zu wahren. Alle Anforderungen, die ein Fahrwerk erfüllen muss, können unter dem Begriff Laufverhalten zusammengefasst werden. Das Laufverhalten kann durch verschiedenste Konstruktionsprinzipien beeinflusst werden. Hierbei spielt die Gestaltung der Federung eine elementare Rolle, die sich wie in Abbildung 2.7 in 3 Grundtypen unterscheiden lässt.

Die Konstruktionen von Fahrwerken sind daher sehr vielfältig, lassen sich jedoch nach der Art des Antriebes, der Anordnung der Räder und der Anordnung der Lager kategorisieren. Fahrwerke ohne Antriebselemente werden als Lauffahrwerke bezeichnet. Dem gegenüber stehen die Triebfahrwerke, die mit einer Antriebseinheit versehen sind. Bei der Anordnung der Räder wird im wesentlichen zwischen Fahrwerken mit Radsätzen und Fahrwerken mit Los- bzw. Einzelrädern unterschieden. Bei Radsätzen sind das linke und rechte Rad durch eine Radsatzwelle kinematisch fest verbunden. Bei Losrädern kann sich jedes Rad unabhängig drehen und ermöglichen die Niederflurbauweise für den innerstädt-

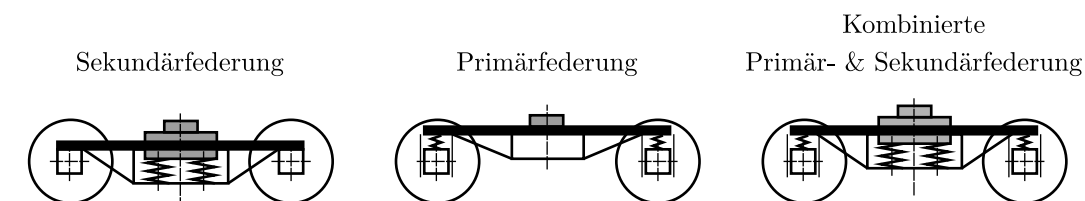


Abbildung 2.7: Konstruktionsgrundtypen von Fahrwerken. Links: Nur mit Sekundärfederung. Mitte: Nur mit Primärfederung. Rechts: Sekundär und Primärfederung. Nach [Hanneforth & Fischer, 1986].

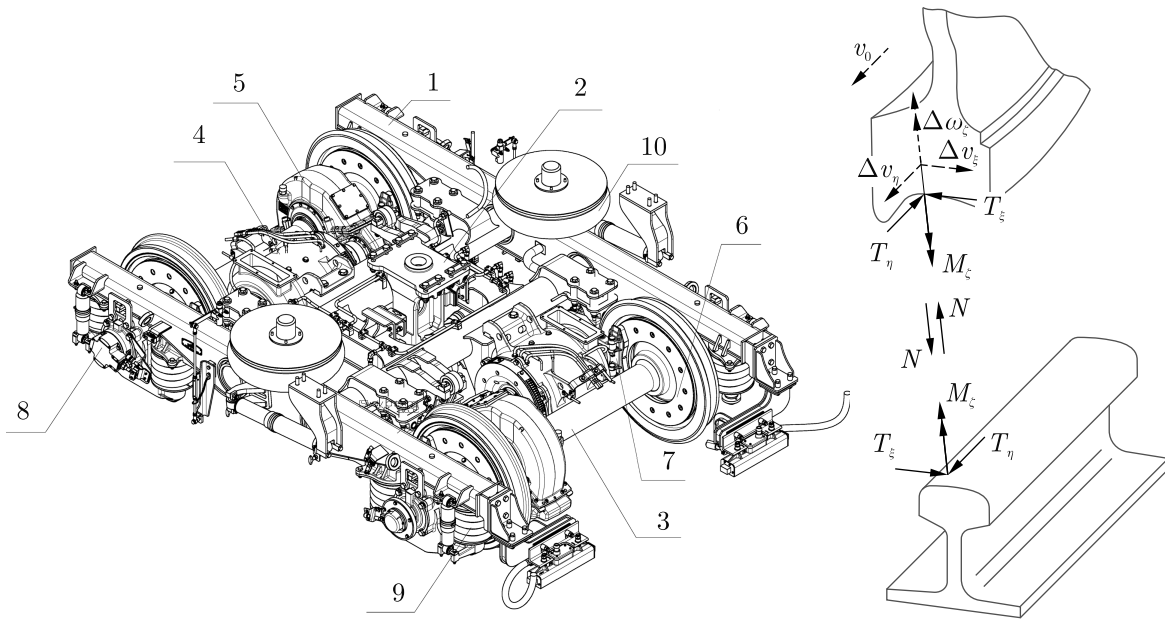


Abbildung 2.8: Links: Typischer Aufbau von Triebfahrwerken mit außengelagerten Radsatzwellen. 1. Doppel-H-Fahrwerksrahmen, 2. Drehzapfen, 3. Radsatzwelle, 4. Antriebsmotor, 5. Getriebe, 6. Radbremsscheibe, 7. Bremszange, 8. Radsatzlager, 9. Primärfeder, 10. Sekundärfeder, nach [Iwnicki *et al.*, 2020]. Rechts: Kräfte im Rad-Schiene-Kontaktpunkt. Normalkraft N , sowie die aus den Relativgeschwindigkeiten zwischen Rad und Schiene Δv_η , Δv_ξ und $\Delta \omega_\zeta$ resultierenden Tangentialkräften T_η und T_ξ und Bohrmoment M_ζ , nach [Knothe & Stichel, 2003].

tischen ÖPNV. Zur Unterscheidung zwischen Fahrwerken mit innen- und außengelagerten Radsatzwellen werden die Innen- und Außenseiten der Räder als Bezugsgröße verwendet. Befinden sich die Lager der Radsatzwelle innerhalb, d.h. zwischen den Rädern, handelt es sich um ein innengelagertes Fahrwerk. Schließen die Radsatzlager die Räder in sich ein, bzw. sitzen außerhalb der Räder, handelt es sich um ein außengelagertes Fahrwerk. Unabhängig der vielfältigen Konstruktionsmöglichkeiten besteht ein Fahrwerk wie in Abbildung 2.8 i.d.R. aus einem Fahrwerksrahmen, den Rädern und Radsätzen mit deren Lagerung, der Federung, der Wagenkastenabstützung, der Brems- und Antriebseinrichtung, sowie div. Anbauteilen, wie z.B. Zugsicherungssystemen, welche im Folgenden kurz beschrieben werden.

Fahrwerksrahmen

Der Fahrwerksrahmen ist das zentrale strukturelle Element eines jeden Fahrwerkes. Er verbindet und positioniert alle o.g. Baugruppen und stellt durch seine Geometrie und Aus-

gestaltung die einwandfreie Funktion des Schienenfahrzeuges über die gesamte Lebensdauer von ca. 30 Jahren mit hohen dynamischen Beanspruchungen sicher. Konstruktiv kann im wesentlichen die Verwindungssteifigkeit beeinflusst werden, die in Kombination mit der Primärfederung für ein optimales Laufverhalten genutzt wird. Daraus haben sich verschiedene Konstruktionsformen, wie der H-Rahmen, Doppel-H-Rahmen oder Kastenrahmen entwickelt, bei denen zwei in Zuglängsrichtung orientierte Langträger durch eine oder zwei meist mittig angeordnete Querträger und bei Kastenträgern zusätzlich vor Kopf mit sog. Kopfträgern verbunden werden. Eine ausführliche Übersicht ist in [Schindler, 2014] zu finden.

Radsätze

Im Allgemeinen besteht ein Radsatz aus einer Radsatzwelle mit kraftschlüssig angebrachten Rädern. Er überträgt alle auf das Schienenfahrzeug einwirkenden Kräfte und unterliegt sehr hohen dynamischen Belastungen mit bis zu 10^9 Lastspielen, die weit über der bekannten Dauerfestigkeit von $2 \cdot 10^6$ liegen. Er bedarf daher einer sorgfältigen Auslegung, Berechnung und Konstruktion und im Betrieb der regelmäßigen Überprüfung. Bei Fahrwerken mit Losrädern entfällt die Radsatzwelle und wird durch eine einseitige Losradachse ersetzt. Die vertikal und horizontal zu übertragenden statischen und dynamischen Kräfte werden durch Radsatzlager mit Wälzkörpern (Zylinder-, Pendel, Kegelrollenlager) übertragen. Die Räder sind mit Radprofilen versehen, die die Führung im Gleis maßgeblich beeinflussen. Sie dienen der sicheren und fahrkomfortmäßig guten Führung des Schie-

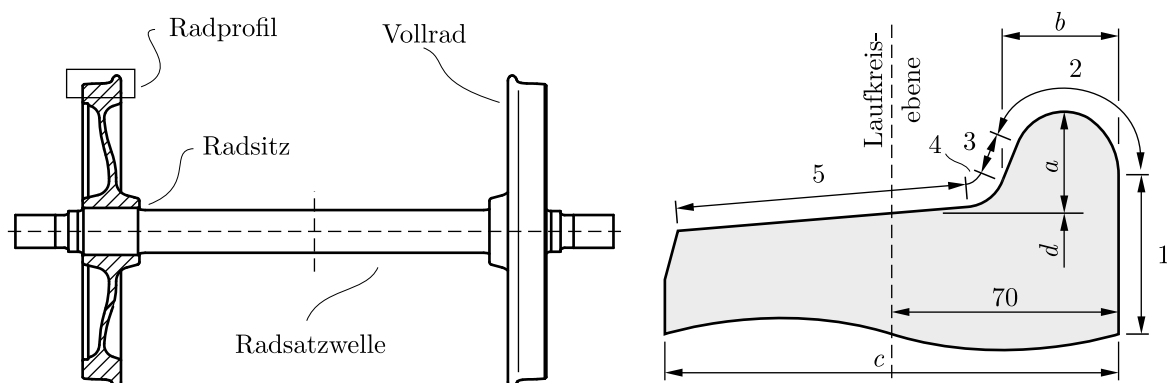


Abbildung 2.9: Links: Wesentliche Komponenten des Radsatzes. Rechts: Bereiche des Radprofils. 1 Radrücken, 2 Spurkranz, 3 Spurkranzflanke, 4 Hohlkehle, 5 Lauffläche. a Spurkranzhöhe, b Spurkranzbreite, c Radreifenbreite, d Messkreisdurchmesser. Nach [Hanneforth & Fischer, 1986].

nenfahrzeugs. In Abbildung 2.9 sind die immer wiederkehrenden Bereiche des Radprofils sichtbar, deren jeweils individuelle Gestaltung Auswirkungen auf den ruhigen Fahrzeuglauf und auf den Verschleiß an Rad und Schiene hat. Wünschenswert sind Profile, die sowohl ein gutes Laufverhalten, als auch ein günstiges Verschleißverhalten aufzeigen.

Federung

Die Federung eines Fahrzeuges muss hauptsächlich drei Funktionen erfüllen:

1. Einhaltung der zulässigen Pufferstände, damit eine sichere Kopplung der Wagenkästen ermöglicht wird.
2. Einstellung guter Laufeigenschaften des Fahrzeuges durch Vermeidung von Resonanzfällen zwischen Erreger- und Eigenschwingungen des Fahrzeuges.
3. Wahrung der Entgleisungssicherheit, durch Sicherstellung ausreichender Radkräfte.

Realisiert werden diese Funktionen hauptsächlich durch eine Primär- und Sekundärfederung. Die Primärfederstufe verbindet klassischerweise den Radsatz mit dem Fahrwerksrahmen. Die konstruktive Ausgestaltung kann in vielfältiger Weise realisiert werden. In Abbildung 2.10 sind die am häufigsten eingesetzten Federelemente mit ihrem typischen Kennlinienverlauf dargestellt. Die Sekundärfederung wird vielfach durch eine Schraubenfeder wie in Abbildung 2.10 oder eine Luftfeder wie in Abbildung 2.11 ausgeführt und

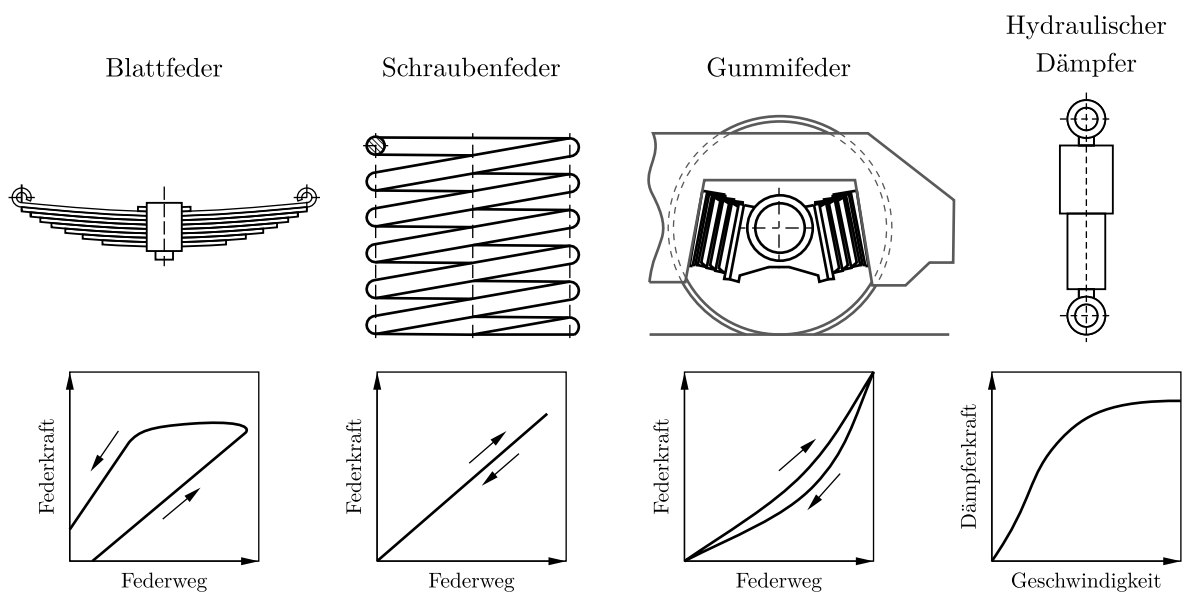


Abbildung 2.10: Oben: Federelemente von Schienenfahrzeugen. Unten: Zugehörige Federkennlinie. Nach [Hanneforth & Fischer, 1986].

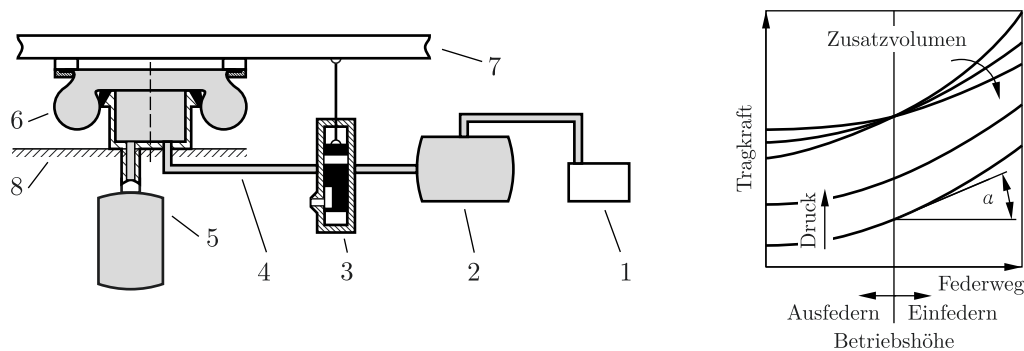


Abbildung 2.11: Prinzipdarstellung einer Luftfeder. Links: Schematische Darstellung der Komponenten mit 1 Kompressor, 2 Hauptluftbehälter, 3 Niveauregler, 4 Rohrleitung, 5 Zusatzluftbehälter, 6 Luftfeder, 7 Wagenkasten (abgefedert), 8 Fahrwerksrahmen (unabgefedert). Rechts: Typische Kennlinie und deren Verhalten bei Änderung des Druckes und Zusatzvolumens. Die effektive Federsteifigkeit ergibt sich durch Linearisierung um die Betriebshöhe. Nach [Hanneforth & Fischer, 1986].

ist zwischen Fahrwerksrahmen und Wagenkasten angeordnet. Sie sorgt für eine weitgehende schwingungstechnische Entkopplung zwischen Fahrwerk und Wagenkasten und übernimmt zusätzlich die vertikale Abstützung des Wagenkastens. Die Sekundärfeder ist stark mit der Wagenkastenabstützung verknüpft, die zusätzlich die Übertragung der Längskräfte übernimmt. Neben den reinen Federelementen werden Dämpfer eingesetzt, um die Amplituden im Resonanzfall nach ca. zwei bis drei Schwingungen zu reduzieren. Zum Einsatz kommen im wesentlichen hydraulische Dämpfer.

Brems- und Antriebseinrichtungen

Mit zu den wesentlichen Komponenten von Fahrwerken gehören die Brems- und Antriebseinrichtungen. Aufgrund der speziellen Komplexität wird in diesem Abschnitt nur ein kurzer Überblick zur Positionierung im Fahrwerk gegeben. Ausführliche Darstellungen der Thematik sind in [Ihme, 2016; Schindler, 2014] zu finden.

Angetrieben werden Schienenfahrzeuge hauptsächlich durch Elektromotoren, die in die Fahrwerkskonstruktion integriert werden. Zusammen mit einem ein- oder zweistufigen Getriebe bilden sie die Antriebseinheit, die mit einer Drehmomentenstütze elastisch am Fahrwerksrahmen gelagert wird.

Die Bremseinheiten werden in kraftschlussabhängige und -unabhängige Bremssystemen unterteilt. Kraftschlussabhängige Bremsen nutzen zur Übertragung der Bremskraft den Kraftschluss zwischen Rad und Schiene, wo hingegen die kraftschlussunabhängigen

Systeme die Bremskraft direkt zwischen Schiene und Fahrwerk übertragen. Beide Systeme werden in heutigen Fahrwerken i.d.R. in Kombination eingesetzt.

Bei den kraftschlussabhängigen Bremssystemen sind die Klotzbremse, die Scheibenbremse und die elektrodynamische Bremse weit verbreitet. Bei der Klotzbremse werden Bremsklötze direkt auf die Lauffläche der Räder gedrückt. Sie findet vor allem bei Güterwagendrehgestellen ihren Einsatz. Bei den Scheibenbremse wird die Bremskraft durch Bremszangen auf spezielle Bremsscheiben aufgebracht. Je nach Position der Bremsscheibe wird zwischen Radscheibenbremse, bei der die Bremsscheibe am Radkörper und der Wellenscheibenbremse, bei der die Bremsscheibe mit der Radsatzwelle verbunden wird, unterschieden. Beim dem elektrodynamischen Bremssystem werden die Motoren der Antriebseinheiten als Generator geschaltet und eignen sich vor allem bei den Einzelradantrieben im Bereich der Straßenbahnen.

Typische Vertreter der kraftschlussunabhängigen Bremssysteme sind die Magnetschienenbremse (MG-Bremse) und die Wirbelstrombremse. Bei der Wirbelstrombremse wird ein Magnetfeld zwischen der Bremseinheit und der Schiene erzeugt welche berührungslos die Bremskraft erzeugt. Bei der MG-Bremse haften die Bremseinheiten durch ein Magnetfeld an der Schiene und erzeugen sowohl durch Reibung, als auch durch das Magnetfeld die Bremskraft.

2.4.2 Bewegungsverhalten von Schienenfahrzeugen

Die Analyse des grundlegenden Bewegungsverhalten von Schienenfahrzeugen wird in [Hanneforth & Fischer, 1986] ausführlich diskutiert. Zugrunde gelegt wird ein Masse-Feder-Dämpfermodell mit starren Körpern. Die Anregung des Schienenfahrzeuges erfolgt vornehmlich durch die Schienenunebenheiten und wird durch den Rad-Schiene-Kontakt übertragen. Wie in Kapitel 2.1 dargestellt, lassen sich für Mehr-Körper-Schwingungssysteme die Eigenschwingungsformen ableiten. Aus diesen Ergebnissen lassen sich die weitverbreiteten Bezeichnungen für die Benennung der Eigenschwingungsformen ableiten, die in Abbildung 2.12 dargestellt sind. Da die Anregung von Schienenfahrzeugen außerhalb des Schwerpunktes stattfindet, werden die 6 Hauptschwingmoden durch Nebenmoden ergänzt, welche eine Kopplung der Hauptschwingmoden darstellen.

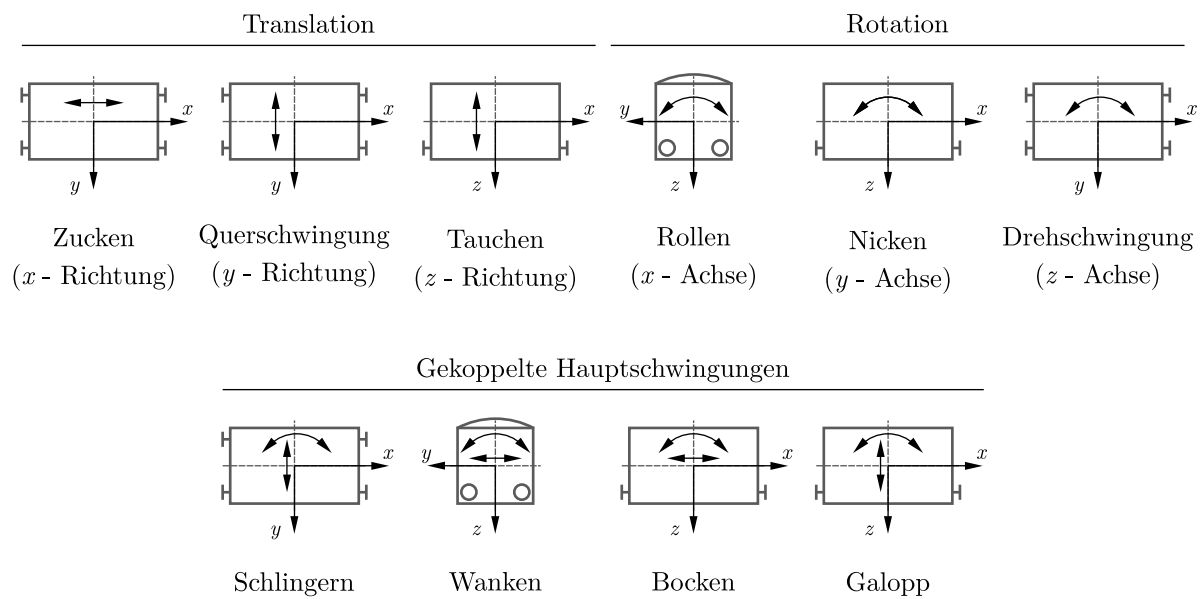


Abbildung 2.12: Hauptschwingmoden von Schienenfahrzeugen. Nach [Hanneforth & Fischer, 1986].

Kapitel 3

Entwicklung einer SHM-Methode basierend auf dem Parzen Estimator

Die Grundidee der im Folgenden beschriebenen schwingungsbasierten Methode zur Schadensidentifikation basiert auf den Vorarbeiten [Jung *et al.*, 2016, 2017] und enthält als Erweiterung die adaptive Ordnungsanpassung, die in dieser Arbeit erstmalig vorgestellt wird. Die Grundhypothese besteht darin, dass zufällige Störkomponenten bei der operationalen Modalanalyse, sei es aus den Umgebungsbedingungen oder aus der mathematischen Systemidentifikation, sich im Mittel egalisieren und als charakteristische Merkmale die realen modalen Parameter erhalten bleiben. Das in Abb. 3.1 dargestellte neu entwickelte Verfahren zur Bildung einer für den Schädigungszustand charakteristischen Funktion basierend auf Beschleunigungsmessungen wird im Folgenden detailliert beschrieben. Beruhend auf der zugrundeliegenden Kerndichteschätzung wird diese Funktion als *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F) bezeichnet.

Der Prozess zur Extraktion der MoDE-F aus den Messdaten gliedert sich in die fünf wesentlichen Schritte:

1. Signalauswahl (beinhaltet die Messdatenakquise)
2. Systemidentifikation
3. Merkmalsselektion
4. Kerndichteschätzung
5. Adaptive Ordnungsanpassung

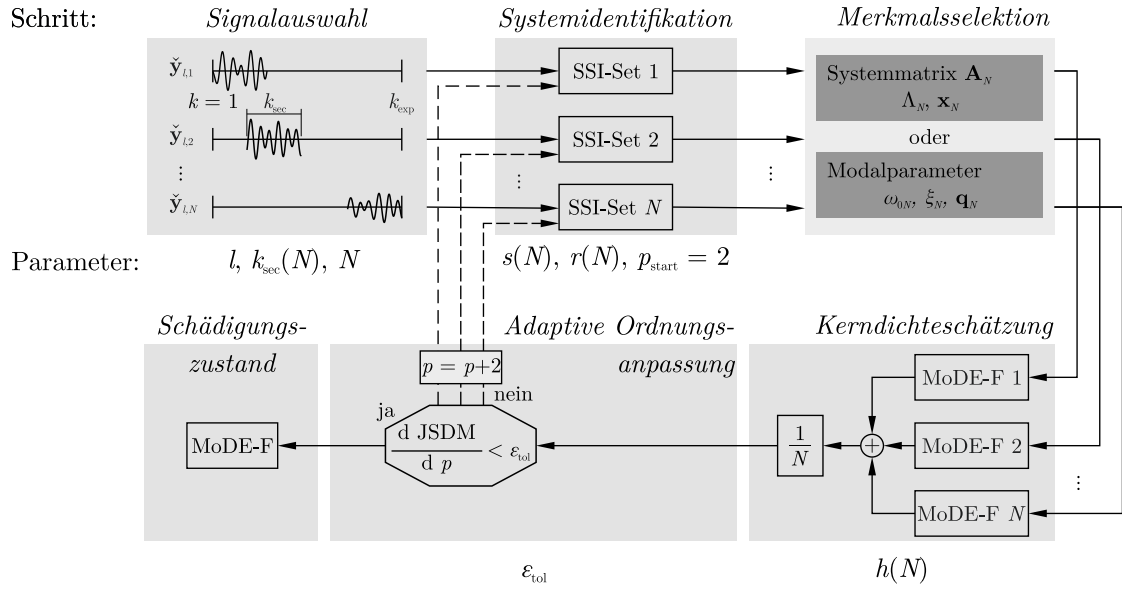


Abbildung 3.1: Methode zur Bestimmung der für den Schädigungszustand charakteristischen *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F) basierend auf Beschleunigungsmessungen $\check{\mathbf{y}}_{l,N} \in \mathbb{R}^{l \times k_{\text{sec}}(N)}$. Parameter: l Anzahl der gemessenen Sensorsignale, N Anzahl der unterschiedlichen Anregungsbedingungen, $k_{\text{sec}}(N)$ individuelle Segmentlänge der Messdaten, $s(N)$ Retrodiktionshorizont, $r(N)$ Prädiktionshorizont, p Systemordnung des Zustandsraummodells, $h(N)$ Bandbreite des Dichteschätzers, ε_{tol} Toleranzschwelle zur adaptiven Ordnungsanpassung.

Steifigkeits- und Dämpfungsverluste aufgrund der Schädigung lasttragender Bauteile führen zu einer Veränderung der modalen Parameter. Beispielsweise gehen Steifigkeitsverluste meist mit sinkenden Eigenfrequenzen einher. Lassen sich die Eigenfrequenzen bzw. modalen Parameter während des Betriebes bestimmen, so kann ein verändertes dynamisches Verhalten festgestellt und auf eine mögliche Schädigung zurück geschlossen werden. Mit den Verfahren der operationalen Modalanalyse können solche Bestimmungen online durchgeführt werden. Im Gegensatz zur experimentellen Modalanalyse, wo an definierten Punkten gemessene Systemanregungen und -antworten zur Bildung der Frequenzantwort zu Verfügung stehen, nutzt die operationale Modalanalyse die nicht messbaren und meist im Vorfeld unbekannten Systemanregungen resultierend aus den aktuellen Betriebsbedingungen. Solche linearen zeitinvarianten mechanische Systeme lassen sich durch ein diskretes stochastisches Zustandsraummodell nach Gleichung (2.44) mit

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

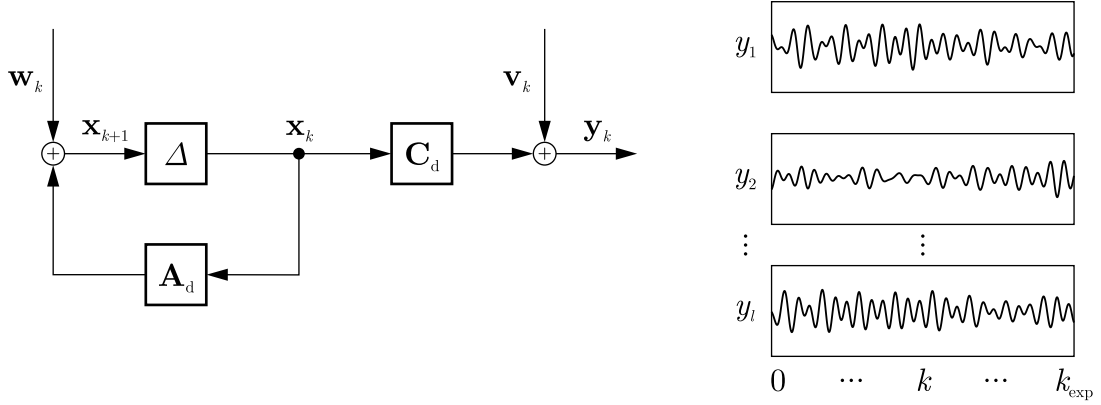


Abbildung 3.2: Zeitdiskretes stochastisches Zustandsraummodell mit l gemessenen Systemantworten die für den Zeitpunkt k im Vektor $\mathbf{y}_k$ zusammengefasst werden.

beschreiben und durch Abbildung 3.2 darstellen. Zur Systemidentifikation solcher Systeme kann der in Kapitel 2.2 beschriebene *Stochastic-Subspace-Identification* (SSI) Algorithmus oder Abwandlungen davon verwendet werden. Dieser bestimmt ausgehend von den gemessenen Ausgangsgrößen $\mathbf{y}_k$ für eine vorgegebene Systemordnung $p = 2n_q$ des Zustandsraumes (2.44) die Systemmatrizen $\mathbf{A}_d^{(p)}$ und $\mathbf{C}_d^{(p)}$. Wie in Gleichung (2.77) gezeigt, können aus den Systemmatrizen die notwendigen Eigenwerte und damit die modalen Parameter berechnet werden. Die Eigenwerte entsprechen den Polen der charakteristischen Gleichung. Da die reale Systemordnung p i.d.R. im Vorfeld nicht bekannt ist und aufgrund der endlichen Anzahl an Messpunkten, ist das Resultat der SSI-Prozedur lediglich eine Schätzung der realen Systemmatrizen. Neben den physikalischen Eigenwerten, die das physikalische Schwingungssystem beschreiben sind in den Ergebnissen numerische, nicht-physikalische Eigenwerte enthalten, die es gilt, bei der Auswertung zu eliminieren, [van der Auweraer & Peeters, 2004; Marchesiello *et al.*, 2016]. Für diese Aufgabe werden sog. Stabilisierungsdiagramme genutzt, die in Kapitel 3.1.2 vorgestellt werden. Neben den nicht-physikalischen Eigenwerten, die aus der Berechnung entstehen, werden auch nicht-physikalische Pole durch Verletzung der zugrundeliegenden Annahmen in den Stabilisierungsdiagrammen sichtbar. Der Einfluss des Anregungssignals wird in Kapitel 4 näher beleuchtet.

Zur detaillierten Beschreibung der vorgestellten Methode wird zunächst auf die Signalauswahl eingegangen, gefolgt von der Systemidentifikation und der Merkmalsselektion, die für die anschließende Bildung der MoDE-F notwendig ist. Einer der Vorteile der hier neu entwickelten Methode besteht darin, dass eine manuelle Auswertung der Stabilisierungsdiagramme für eine Vielzahl unterschiedlicher Anregungsbedingungen entfällt.

3.1 Methode zur Bildung der MoDE-F

3.1.1 Signalauswahl

Ausgangspunkt zur Anwendung der vorgestellten Methode bilden die N gemessenen Systemantworten $\check{\mathbf{y}}_N$ mit der individuellen Signallänge $t_{\text{sec}}(N)$ die zu unterschiedlichen Anregungsbedingungen gemessen wurden. Sie werden durch das Symbol $\check{\cdot}$ gekennzeichnet. Da es sich bei Messwerten i.d.R. um diskrete Messpunkte handelt wird im Folgenden anstatt der kontinuierlichen Zeit t mit den diskreten Zeitpunkten k gearbeitet. Mit der Abtastrate f_s liegen somit $k_{\text{sec}}(N) = t_{\text{sec}}(N) f_s + 1$ diskrete Zeitpunkte vor.

Liegen die zu den diskreten Zeitpunkten $1 \leq k \leq k_{\text{exp}}$ gemessenen l Systemantworten $\mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^{1 \times k_{\text{exp}}}$ aus einem Experiment, bei dem unterschiedlichste Anregungsbedingungen enthalten sind, vor, werden diese in der Matrix der Messwerte

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1k_{\text{exp}}} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2k_{\text{exp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{l1} & y_{l2} & \cdots & y_{lk} & \cdots & y_{lk_{\text{exp}}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times k_{\text{exp}}} \quad (3.1)$$

zusammengefasst. Aus dieser Matrix müssen N potentiell unterschiedliche Anregungsszenarien mit der Länge $k_{\text{sec}}(N)$ durch Wahl von N Startzeitpunkten $k_{\text{start}}(N)$ mit $1 \leq k_{\text{start}}(N) \leq k_{\text{exp}} - k_{\text{sec}}(N) + 1$ extrahiert werden. Diese einzelnen Signalfragmente lassen sich wiederum in einer Blockmatrix $\check{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{l \times \sum_{i=1}^N k_{\text{sec}}(i)}$ zusammenfassen

$$\check{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{y}}_1 & \check{\mathbf{y}}_2 & \cdots & \check{\mathbf{y}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{y}}_{1,1} & \check{\mathbf{y}}_{1,2} & \cdots & \check{\mathbf{y}}_{1,N} \\ \check{\mathbf{y}}_{2,1} & \check{\mathbf{y}}_{2,2} & \cdots & \check{\mathbf{y}}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{\mathbf{y}}_{l,1} & \check{\mathbf{y}}_{l,2} & \cdots & \check{\mathbf{y}}_{l,N} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

mit den einzelnen Blockelementen $\check{\mathbf{y}}_{l,N} \in \mathbb{R}^{l \times k_{\text{sec}}(N)}$ der zu Verfügung stehenden l Sensoren und bilden den Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung.

Neben der Anzahl an Sensoren l und der Segmentlänge $k_{\text{sec}}(N)$ ist der wesentlich zu wählende Parameter die Anzahl der Signalsegmente N . Die Wahl der Segmentlänge kann frei bestimmt werden, hängt jedoch u.a. von den zu erwartenden Eigenfrequenzen und deren Änderungen ab und ist daher so zu wählen, dass sie mindestens die kleinste zu erwartende Eigenfrequenzdifferenz zwischen dem un- und geschädigten Zustand berücksichtigt, um damit eine entsprechende Auflösung im Frequenzbereich zu erreichen.

3.1.2 Systemidentifikation

Zur Systemidentifikation kommt der in Kapitel 2.2 beschriebene SSI Algorithmus zur Anwendung, der die im Schritt der Signalauswahl gewählten Signalsegmente als Eingangssignale nutzt. Für jedes der N Signalsegmente wird eine Systemidentifikation mittels SSI durchgeführt. Dabei sind der Retrodiktions- und Prädikationshorizont $s(N)$ bzw. $r(N)$, sowie die Ordnung p vorzugeben. Das Resultat der Systemidentifikation sind die von der Ordnung p abhängige Systemmatrix $\mathbf{A}_d^{(p)}$ und Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_d^{(p)}$. Anschaulich lässt sich das Ergebnis der Systemidentifikation in Stabilisierungsdiagrammen wie in Abb. 3.3 darstellen.

Die auch als Pol- bzw. Stabilitätsdiagramme bezeichnete Darstellungsform der Pole des Zustandsraummodells gehen auf [Heylen *et al.*, 1997] zurück. Dazu werden die Systemmatrizen für verschiedene Ordnungen p des Zustandsraums ermittelt und daraus die resultierenden modalen Parameter abgeleitet. In einem ersten Schritt werden die zur Ordnung p ermittelten Frequenzen $f_0^{(p)} = \frac{\omega_0^{(p)}}{2\pi}$ aufgetragen. Unter der Annahme, dass die Ordnung einen weitestgehend geringen Einfluss auf die physikalischen, aber einen großen Einfluss auf die nicht-physikalischen modalen Parameter hat, werden in einem zweiten

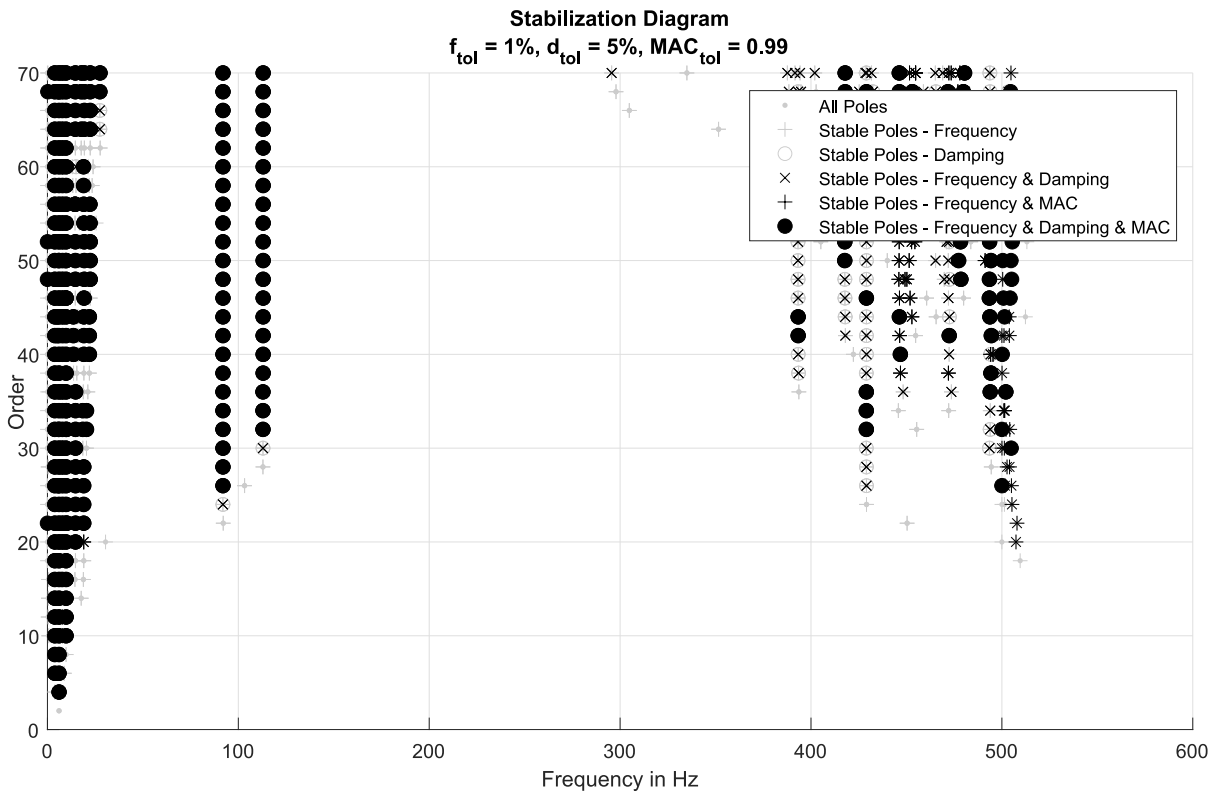


Abbildung 3.3: Stabilisierungsdiagramm.

Schritt die modalen Parameter mit denen der nächsthöheren Ordnung verglichen. Dabei haben sich drei Kriterien etabliert.

$$1. \text{ Kriterium (stabile Frequenz)} \quad \frac{|f_0^{(p)} - f_0^{(p+2)}|}{f_0^{(p)}} \leq f_{\text{tol}} \quad (3.3)$$

$$2. \text{ Kriterium (stabile Dämpfung)} \quad \frac{|\xi^{(p)} - \xi^{(p+2)}|}{\xi^{(p)}} \leq \xi_{\text{tol}} \quad (3.4)$$

$$2. \text{ Kriterium (stabile Eigenformen)} \quad \text{MAC}(p, p+2) \geq \text{MAC}_{\text{tol}} \quad (3.5)$$

Dabei ist $\text{MAC}(p, p+2)$ das MAC- Kriterium (engl. *Modal Assurance Criterion*, MAC) eine skalare reelle Zahl zwischen 0 und 1, welche die lineare Übereinstimmung zwischen zwei Modalvektoren angibt [Allemang & Brown, 1982; Allemang, 2003].

$$\text{MAC}(p, p+2) = \frac{\bar{\mathbf{q}}^{(p)H} \bar{\mathbf{q}}^{(p+2)} \bar{\mathbf{q}}^{(p+2)H} \bar{\mathbf{q}}^{(p)}}{\bar{\mathbf{q}}^{(p)H} \bar{\mathbf{q}}^{(p)} \bar{\mathbf{q}}^{(p+2)H} \bar{\mathbf{q}}^{(p+2)}} \quad (3.6)$$

Es berechnet sich aus dem Quadrat des Kosinus des eingeschlossenen Winkels¹ zwischen den zwei komplexen Vektoren $\bar{\mathbf{q}}^{(p)}$ und $\bar{\mathbf{q}}^{(p+2)}$. Der Operator $(\cdot)^H$ bezeichnet den komplex-konjugiert-transponierten Vektor. Stehen die beiden Vektoren orthogonal zu einander, ergibt das MAC-Kriterium Null. Sind beiden Vektoren parallel ergibt das MAC-Kriterium 1. Daraus lässt sich schließen, dass die beiden Modalvektoren parallel sind. Ein MAC-Wert von eins steht demnach für eine perfekte Übereinstimmung der Modalvektoren.

Für die drei Kriterien haben sich in der Literatur [Ewins, 2000; Avitabile, 2018] Toleranzwerte von $f_{\text{tol}} = 0,01$, $\xi_{\text{tol}} = 0,05$ und $\text{MAC}_{\text{tol}} = 0,99$ etabliert, die vor Erstellung des Stabilisierungsdiagramms festgelegt werden müssen. Zur Klassifizierung stabiler Pole werden die Kriterien in der o.g Reihenfolge angewendet. Ein Pol wird als frequenzstabil bezeichnet, wenn das 1. Kriterium erfüllt wird. Als dämpfungsstabil, wenn das 2. Kriterium erfüllt. Erfüllt ein Pol alle 3 Kriterien gleichzeitig wird er als stabil bezeichnet.

Mit zunehmender Ordnung werden sich physikalische Pole als stabil herauskristallisieren, erkennbar an der Ausgestaltung einer vertikalen Linie der stabilen Pole. Somit können aus dem Stabilisierungsdiagramm die Systemfrequenzen abgelesen, sowie die Dämpfungseigenschaften und Modalvektoren abgeleitet werden. Dies erfordert i. A. einen erfahrenen Anwender, denn nicht immer sind stabile Pole gleichzusetzen mit physikalischen Modalparametern. Abbildung 3.4 verdeutlicht die Schwierigkeit bei der Interpretation bei

¹ Zur Berechnung des eingeschlossenen Winkels zwischen zwei komplexen Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wird nach [Scharnhorst, 2001] der hermetische Winkel (engl. *Hermitian Angle*) Θ_H mit $\cos(\Theta_H) = \frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$ verwendet. Mit dem Standardskalarprodukt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^H \mathbf{v}$ und der euklidischen Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ gilt für das Quadrat des Kosinus des eingeschlossenen Winkels $\cos^2(\Theta_H) = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{v}|^2}{\mathbf{v}^H \mathbf{v} \mathbf{w}^H \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}^H \mathbf{w} \mathbf{w}^H \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{v} \mathbf{w}^H \mathbf{w}}$

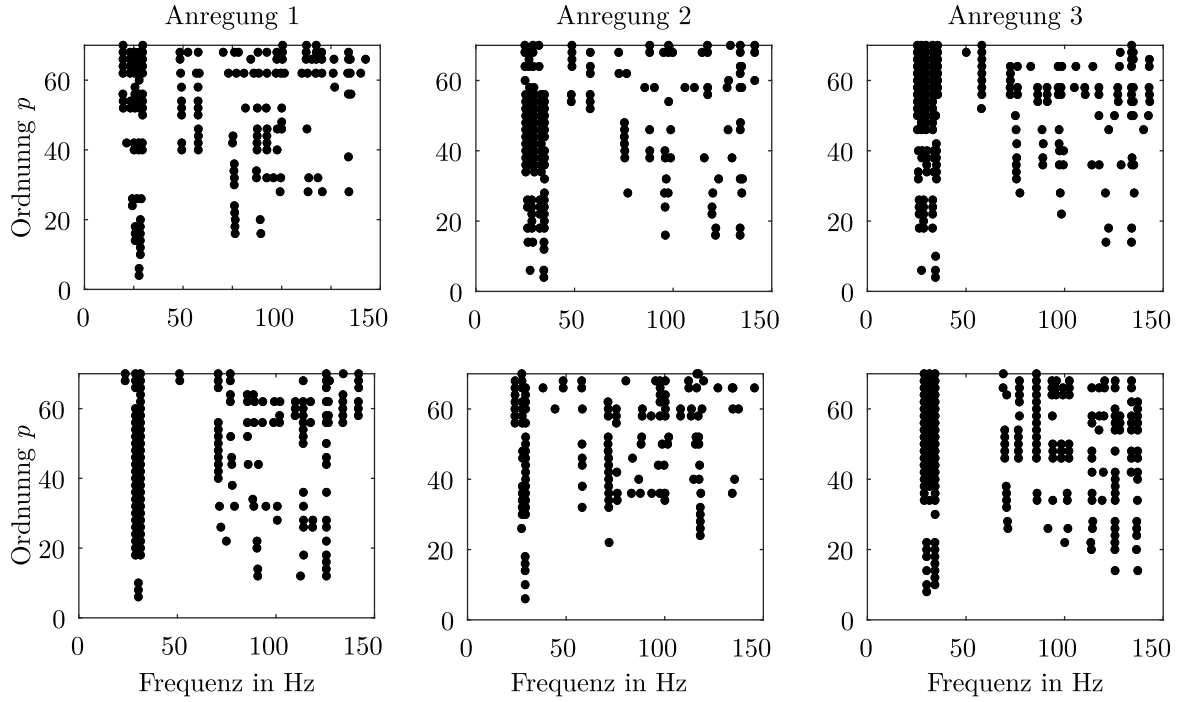


Abbildung 3.4: Stabilisierungsdiagramme für zwei Schädigungszustände (oben: ungeschädigt, unten: geschädigt) bei unterschiedlichen Anregungsszenarien für die Toleranzwerte $f_{\text{tol}} = 1\%$, $d_{\text{tol}} = 5\%$, $f_{\text{tol}} = 1\%$, $\text{MAC}_{\text{tol}} = 0,99$. Eine manuelle Unterscheidung ist nicht möglich.

unterschiedlichen Szenarien. Dargestellt sind für zwei unterschiedliche Schädigungsszenarien und für drei unterschiedliche Anregungsszenarien die Stabilisierungsdiagramme. Eine klare manuelle Unterscheidung zwischen a) einem geschädigten und ungeschädigten Zustand ist ebenso wenig möglich wie b) eine Extraktion der modalen Parameter.

3.1.3 Merkmalsselektion

Zur Extraktion der modalen Parameter und zur Schadensidentifikation basierend auf dem *Stochastic-Subspace-Algorithmus* können verschiedenste Merkmale für die anschließende Bildung der MoDE-F genutzt werden. Rein formal bilden die geschätzte Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}_{\text{d}}^{(p)}$ und die Ausgangsmatrix $\hat{\mathbf{C}}_{\text{d}}^{(p)}$ das Endergebnis der Systemidentifikation. Mit den Beziehungen aus Kapitel 2.1.2 und 2.1.5 kann das rein mathematische Ergebnis mit den physikalischen Gegebenheiten verknüpft werden. Dieser Weg ist grafisch in Abbildung 3.5 dargestellt. Der elementare Schritt ist dabei die Berechnung der Eigenwerte $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{\text{d}}^{(p)}$ und -vektoren $\hat{\mathbf{V}}_{\text{d}}^{(p)}$. Auf dieser mathematischen Ebene beinhalten bereits die Eigenwerte die vollständige Information über das Schwingungsverhalten; jedoch in einer wenig

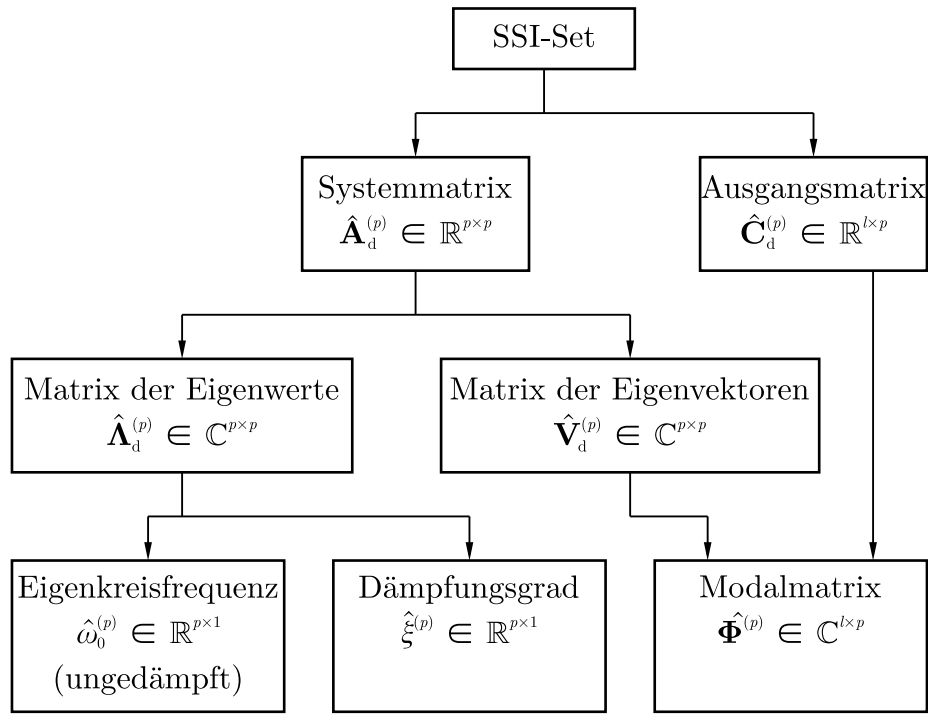


Abbildung 3.5: Berechnung der modalen Parameter aus den Ergebnissen der SSI.

anschaulichen Form. Zur Identifikation der modalen Parameter ist es notwendig, die mathematischen Kenngrößen in physikalisch interpretierbare Größen zu transformieren. Da dies lediglich eine Transformation ist, gehen weder Informationen verloren, noch kommen Informationen hinzu.

Für die multivariate Bildung der MoDE-F bieten sich die Eigenwerte mit jeweils dem Imaginär- und Realteil an. Für eine univariate Verteilung wird sinnvollerweise die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz genutzt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird, wenn nicht anders angegeben, zur Veranschaulichung und einfacheren Darstellung die Eigenfrequenz f_0 verwendet. Andere Kombinationen, wie die Hinzunahme der Eigenvektoren oder der Modalmatrix sind denkbar und beispielhaft in [Jung *et al.*, 2017] angewendet.

3.1.4 Bildung der MoDE-F

Zur Bildung der charakteristischen MoDE-F $\hat{p}$, die eine Schätzung des Merkmals (hier der Eigenfrequenzen f_0) in Abhängigkeit der Systemordnung p ist, wird der in Kapitel 2.3 vorgestellte Parzen Estimator verwendet. Abhängig von der Anzahl der ausgewählten Merkmale wird der univariate bzw. multivariate Gauß-Kern-Dichteschätzer verwendet. Sofern nicht anders beschrieben wird zur einfacheren Darstellung der univariate Gauß-Kern-Dichteschätzer mit der Eigenfrequenz f_0 als Merkmal verwendet und ist abhängig

von der gewählten maximalen Systemordnung $p_{\max}$ und der Anzahl N der Signalsegmente.

$$\hat{p}(f_0, N, p_{\max}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2}{p_{\max}} \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^{p_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{kh} \sum_{l=1}^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{f_0 - f_{0,li}^{(k)}}{h} \right)^2} \quad (3.7)$$

$f_{0,li}^{(k)}$ beschreibt die zur Ordnung k zugehörigen l -te Frequenz des i -ten Signalfragments. Beginnend bei der niedrigsten Ordnung $p = p_{\text{start}} = 2$, wird die Wahrscheinlichkeitsdichte kumulativ bis zur vorgegebenen Ordnung $p_{\max}$ für jedes der N Signalfragmente berechnet. Der Vorfaktor $\frac{2}{p_{\max}}$ berücksichtigt, dass nur gerade Ordnungen betrachtet werden.

Bei den N SSI-Sets können vorerst zwei Sichtweisen unterschieden werden. Zum einen können die N Signalfragmente jeweils als Realisierung der Zufallsvariablen des gewählten Merkmals (in diesem Fall die Frequenz) bezogen auf eine konstante Ordnung angesehen werden. Andererseits kann jede Ordnung innerhalb eines SSI-Sets als Realisierung der realen Systemfrequenz angesehen werden. Zur anschaulichen Darstellung wird in Anlehnung an Kapitel 4 ein Zwei-Massenschwinger mit den realen Systemfrequenzen bei 4,03 Hz und 6,12 Hz verwendet. In Abbildung 3.6 sind die zugehörigen Stabilisierungsdiagramme für die beiden Ordnungen vier und sechs dargestellt. Dabei wird auf eine Bewertung durch die drei Kriterien f_{tol} , ξ_{tol} und MAC_{tol} verzichtet. Zu erkennen ist, dass bei einer höheren Ordnung gegenüber der realen Systemordnung zusätzliche, in diesem Falle nicht physikalische Pole, auftreten, die keiner bestimmten gemeinsamen Frequenz direkt zugeordnet werden können. Diese Stabilisierungsdiagramme werden zur Bildung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen basierend auf dem univariaten Gauß-Kern-Dichteschätzer (3.7) verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.7 dargestellt.

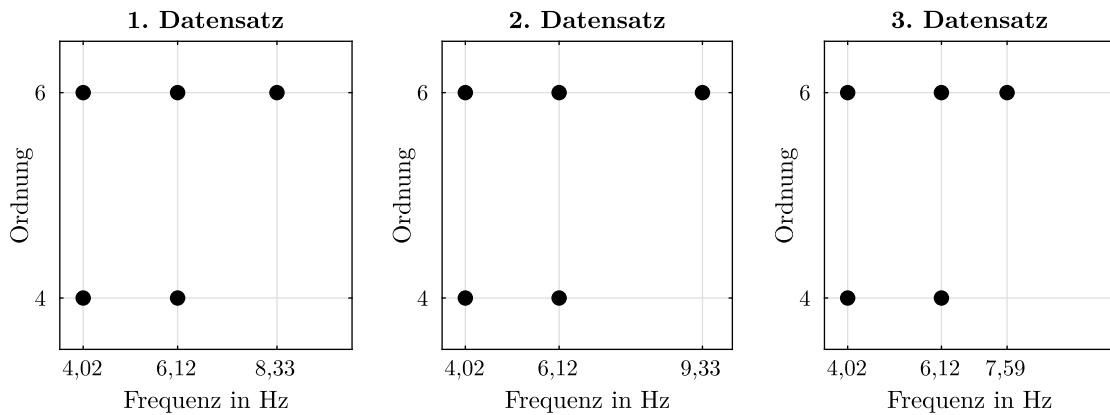


Abbildung 3.6: Stabilisierungsdiagramme für einen Zwei-Massenschwinger mit den realen Systemfrequenzen bei 4,03 Hz und 6,12 Hz für drei unterschiedliche SSI-Sets (Anregungsbedingungen). Dargestellt sind die Ordnungen vier und sechs.

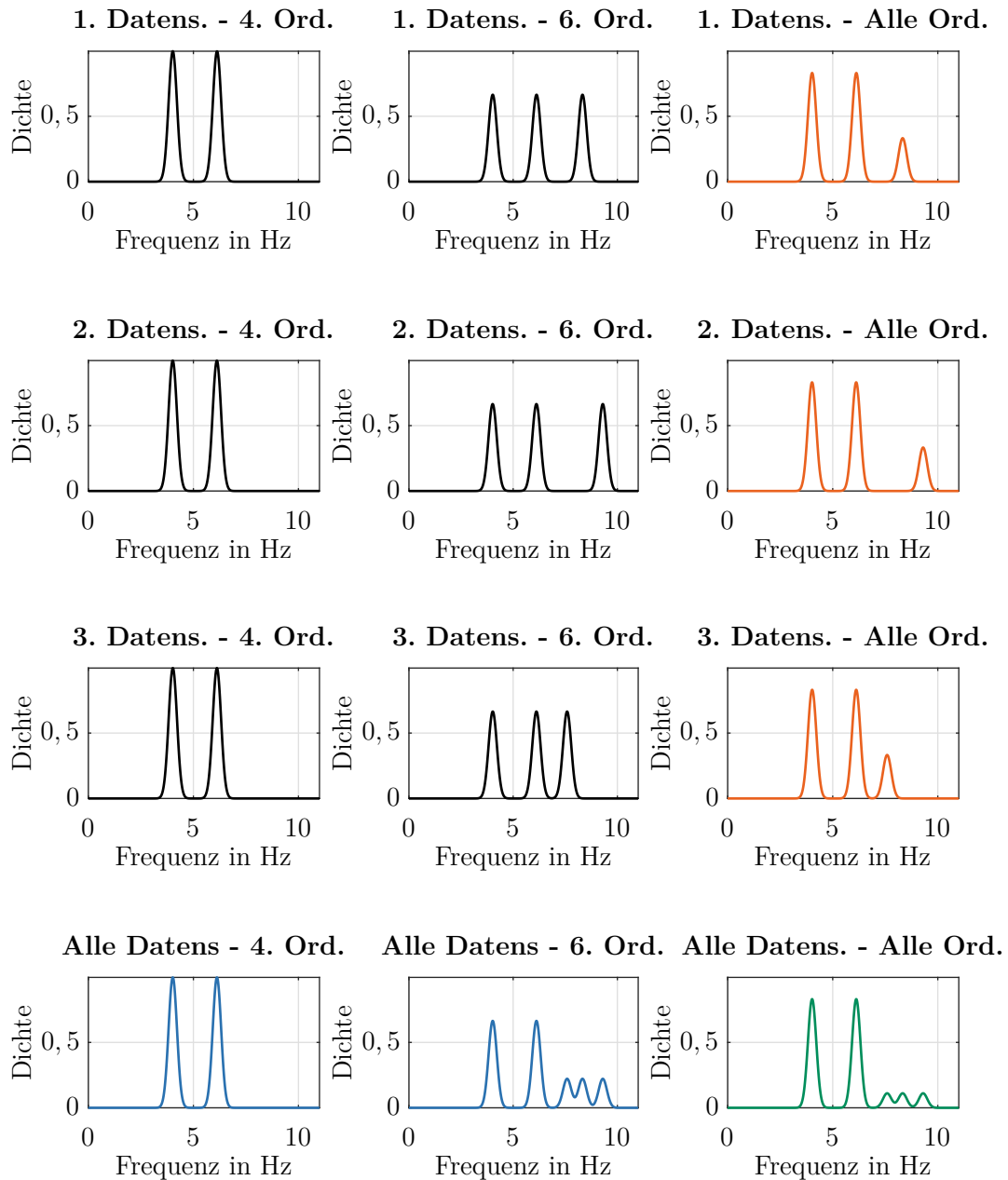


Abbildung 3.7: Dargestellt sind Kern-Dichte-Schätzungen für die Bandbreite $h = 0,2$ für einen 2-Massenschwinger mit den realen Systemfrequenzen bei 4,03 Hz und 6,12 Hz für verschiedene Datensätze und Ordnungen (—), sowie über die Ordnung (—) und Datensätze (—) gemittelte Kern-Dichte-Schätzungen und die über Datensätze und Ordnung gemittelte MoDE-F (—).

Bei der Betrachtungsweise einer konstanten Ordnung (vertikale Leserichtung) wird der Einfluss der Schwankungen durch die unterschiedlichen, in den Signalfragmenten (Anregungsbedingungen) enthaltenen, nicht-physikalischen Einflüsse minimiert. Dies ist besonders bei Ordnung sechs zu erkennen. Bei der Identifikation eines Systems mit be-

kannter Ordnung kann durch Anwendung des Kernichteschätzers die Systemfrequenzen bestimmt werden. I.d.R. ist die Ordnung des realen Systems nicht bekannt. Unter der Annahme, dass reale Systemfrequenzen auch bei übersteigender Systemordnung enthalten sind, kann die Bildung der MoDE-F für einen Datensatz und unterschiedlichen Ordnungen (horizontale Leserichtung) herangezogen werden. Dabei wird deutlich, dass die realen Systemfrequenzen dominieren. Beide Betrachtungsweisen können kombiniert werden und führen zu einer systembeschreibenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion – der MoDE-F –, die unabhängig von den nicht-physikalischen Polen ist. Die Reihenfolge der Bildung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dabei unerheblich.

Wahl der Bandbreite

Wie bereits in Kapitel 2.3.1 dargestellt, werden viele verschiedene automatisierte Bandbreitenselektoren erforscht. Trotz jahrzehntelanger Forschung hat sich bisher noch kein allgemeingültiger Selektor finden lassen, der problemunabhängig die optimale Bandbreite basierend auf den Eingangsdaten bestimmt [Heidenreich *et al.*, 2013].

Die Bandbreite h wird als Smoothingparameter bezeichnet, der wie in Abbildung 2.2 dargestellt, bei einer ungeeigneten Wahl vorhandene Informationen zu stark betont, oder aber vernachlässigt. Die in der Literatur vorgestellten Bandbreitenselektoren wählen eine Bandbreite im Spannungsverhältnis des Varianz-Verzerrungs-Dilemmas und sind Abhängig von der Anzahl der Realisierungen n . In dieser Arbeit soll ein merkmals-selektiver Ansatz mit einer konstanten a priori festgelegten Bandbreite für eine vorher festgelegte Merkmalsdifferenz bzw. Merkmalsauflösung genutzt werden. Es gilt daher eine Bandbreite zu finden, die zwei benachbarte Frequenzen f_i und f_{i+1} trennen kann. Dazu wird der Gauß-Kerndichte-Schätzer $\hat{p}(f)$ für die beiden Frequenzen f_i und f_{i+1} betrachtet.

$$\hat{p}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\alpha + \beta)h} \left[\alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_i}{h}\right)^2} + \beta e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_{i+1}}{h}\right)^2} \right] \quad (3.8)$$

Mit den beiden Vorfaktoren $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$ können unterschiedliche Gewichtungen der beiden Frequenzen eingestellt werden. In Abbildung 3.8 (Mitte) ist die Situation schematisch dargestellt. Die beiden Maxima stehen dabei im Verhältnis

$$\bar{x} = \frac{\hat{p}(f_{i+1})}{\hat{p}(f_i)} = \frac{\beta + \alpha e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta f}{h}\right)^2}}{\alpha + \beta e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta f}{h}\right)^2}} \quad (3.9)$$

zueinander.

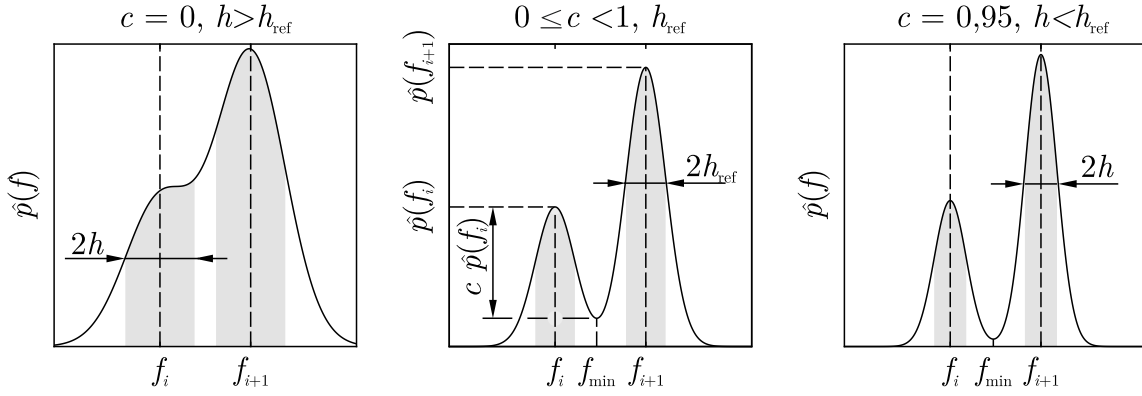


Abbildung 3.8: Bei einer gegebenen Frequenzdifferenz $\Delta f = f_{i+1} - f_i$ kann der Parameter c zur Einstellung der Trennschärfe genutzt werden und damit zur Bestimmung der Bandbreite h . Mit steigendem c verringert sich die notwendige Bandbreite h und die Trennschärfe nimmt zu.

Die Bandbreite h ist so zu wählen, dass bei einer bestimmten Frequenzdifferenz $\Delta f = f_{i+1} - f_i$ die beiden Frequenzen scharf getrennt werden können. Um die Schärfe zu bewerten, kann die Differenz $a = c\hat{p}(f_i)$ zwischen dem Minimum an der Stelle

$$f_{\min} = \frac{\Delta f^2 + 2f_i\Delta f + 2h^2 \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{2\Delta f} \quad (3.10)$$

und dem kleineren der beiden Maxima verwendet werden. Der Thresholdwert c kann im Intervall $0 \leq c < 1$ variiert werden. Bei $c = 0$ ist keine eindeutige Trennung möglich. Strebt c gegen 1, so strebt die Bandbreite bei kleinem Δf gegen 0 und die beiden Frequenzanteile können sauber getrennt werden. Das Maximaverhältnis $\bar{x}$ kann zusätzlich verwendet werden um ein Urteil über die Gewichtung der beiden Frequenzen vorzunehmen. Ist das Verhältnis $\bar{x} = 1$ so treten im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beide Frequenzen mit der selben Wahrscheinlichkeit auf. Steigt das Verhältnis $\bar{x}$ an, so bildet sich eine dominierende Frequenz aus, die eine höhere Auftrittswahrscheinlichkeit nach sich zieht. Dieses Verhalten ist in Abbildung 3.9 für die konstante Frequenzdifferenz $\Delta f = 0,6$ dargestellt. Während bei Maximaverhältnissen von 1 bis 1,2 nur ein geringer Unterschied bei den Wahrscheinlichkeiten für verschiedene c bzw. daraus resultierende h zu erkennen ist, so ist der Unterschied bei großen Verhältnissen $\bar{x}$ deutlich.

Zwischen der Bandbreite h und der Frequenzdifferenz Δf kann für ein gegebenes c ein linearer Zusammenhang

$$h(\Delta f, c, \bar{x}) \approx m(c, \bar{x}) \Delta f, \quad (3.11)$$

hergestellt werden und ist ebenfalls in Abbildung 3.9 dargestellt. Dies ist das Ergebnis ei-

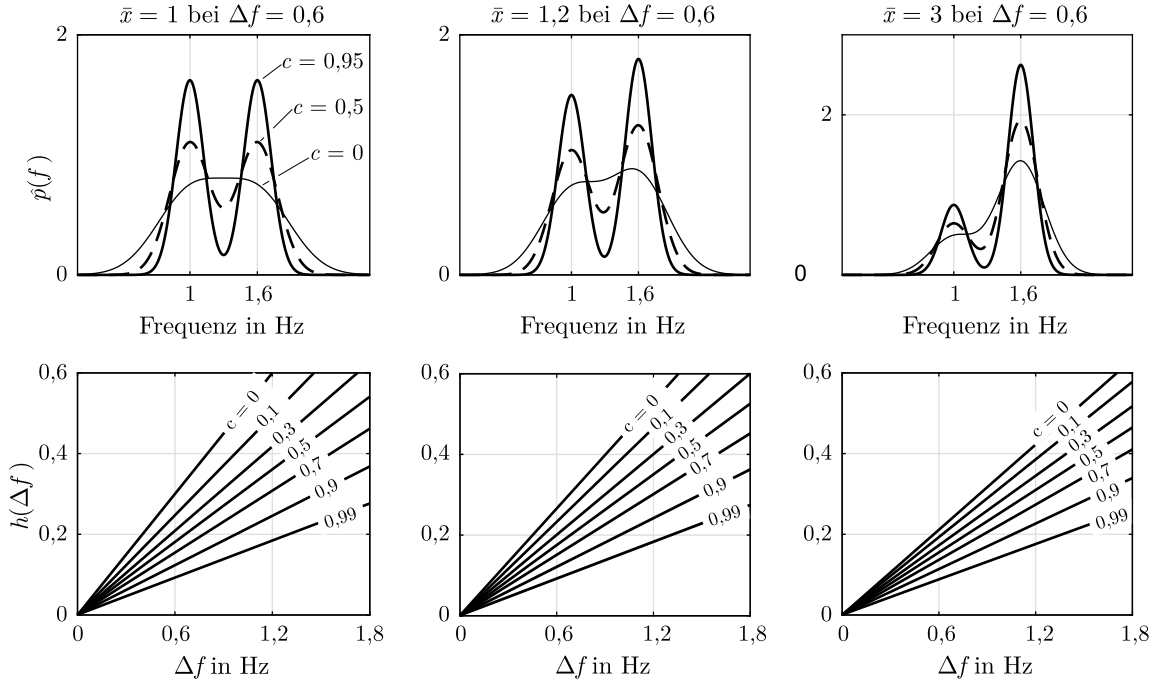


Abbildung 3.9: Oben: Einfluss des Thresholdwerts c auf verschiedene Maximaverhältnisse bei konstanter Frequenzdifferenz $\Delta f = 0,6$ Hz. Unten: Abhängigkeit der Bandbreite h von der Frequenzdifferenz Δf für verschiedene Threshold-Werte c und Maximaverhältnisse $\bar{x}$.

ner numerischen Studie, da eine geschlossene Lösung nicht existiert. Die Steigung $m(c, \bar{x})$ ist abhängig von dem gewählten Threshold c und dem Maximaverhältnis $\bar{x}$ der beiden benachbarten Eigenfrequenzen und ist in der Abbildung 3.10 dargestellt. Mit zunehmendem Maximaverhältnis sinkt die Steigung. Das gleiche gilt ebenfalls für einen zunehmenden Threshold c .

Aus den vorangegangenen Ausführungen kann eine Bandbreite h für eine gegebene Frequenzdifferenz ermittelt werden. Sinnvollerweise wird zur Bestimmung von h ein Δf -Bereich angegeben. In dieser Arbeit wird, wenn nicht anders angegeben, von einem Bereich $0,55 \text{ Hz} < \Delta f < 0,9 \text{ Hz}$ ausgegangen. Wird zusätzlich berücksichtigt, dass eine sinnvolle Trennung bis zu einem Maximaverhältnis von $\bar{x} = 1,2$ und einem Thresholdwert c zwischen 0,3 und 0,8 möglich ist, so kann eine Bandbreite $h = 0,2$ angesetzt werden. Die gewählte Bandbreite ist immer ein Kompromiss zwischen over- und undersmoothing. Frequenzdifferenzen von $\Delta f = 0,9 \text{ Hz}$ können sehr sauber getrennt werden, da gleichzeitig ein hoher Thresholdwert c vorherrscht. Frequenzdifferenzen von $\Delta f = 0,5 \text{ Hz}$ hingegen können, bei einem kleinen Threshold c , getrennt werden; jedoch im Vergleich nicht so scharf.

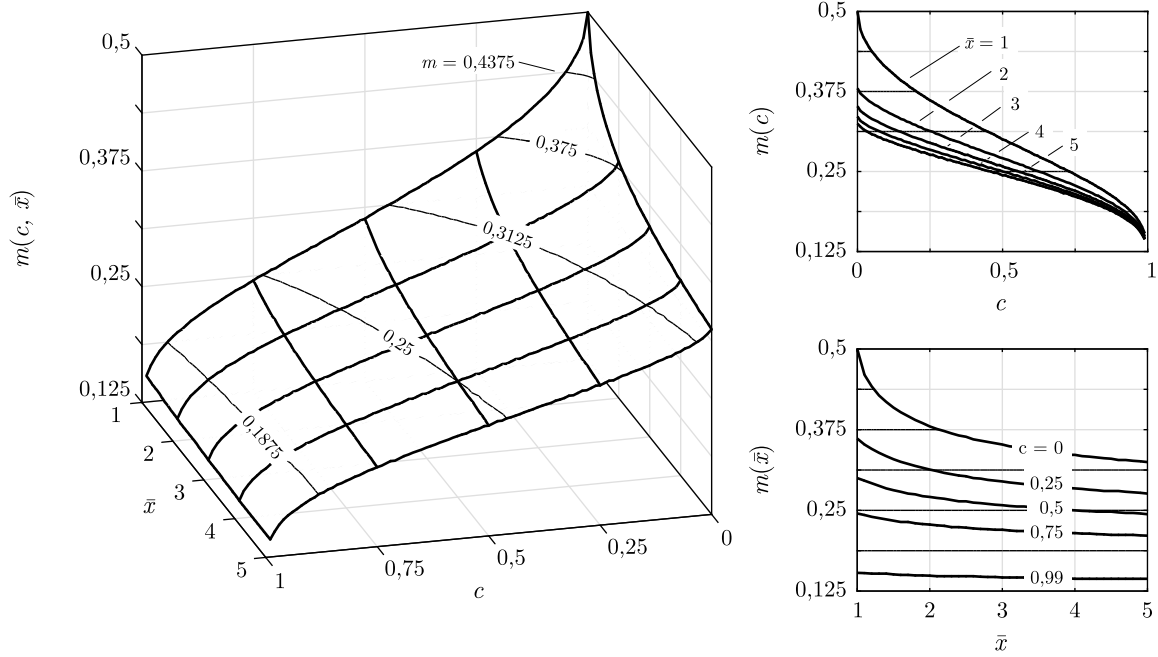


Abbildung 3.10: Abhängigkeit der Steigung $m(c, \bar{x})$ für verschiedene Maximaverhältnisse $\bar{x}$ und Thresholdwerte c .

Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik zur adaptiven Ordnungsanpassung

Bei der Hypothese, dass mit zunehmender Ordnung die realen Systemfrequenzen erhalten bleiben, obwohl zusätzliche reale Frequenzanteile aber auch nicht-physikalische Frequenzanteile hinzukommen, stellt sich die Frage: Ab welcher Ordnung sind alle relevanten Systeminformationen enthalten? Oder anders ausgedrückt: Gibt es eine bestimmte Ordnung, ab der der Informationsgehalt durch weitere Berechnungen nicht signifikant mehr steigt? Zwischen den MoDE-F zweier aufeinander folgender Ordnungen besteht der Zusammenhang

$$\hat{p}(f_0, N, p) = \frac{p-2}{p} \hat{p}(f_0, N, p-2) + \frac{2}{p} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ph} \sum_{l=1}^p e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{f_0 - f_{0,li}^{(k)}}{h} \right)^2}. \quad (3.12)$$

Dabei ist zu erkennen, dass durch den Vorfaktor $\frac{p-2}{p}$ mit $\lim_{p \rightarrow \infty} 1 - \frac{2}{p} = 1$ des ersten Summanden (bereits kumulierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bis zur Ordnung $p-2$) mit steigender Ordnung den neu hinzuzufügenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Vorfaktor $\frac{2}{p}$ mit $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2}{p} = 0$) eine immer geringere Bedeutung bei der Bildung von $\hat{p}(f, N, p)$ zukommt und damit sehr hohe Ordnungen keinen bis nur geringen Einfluss auf die charakteristische MoDE-F haben.

Zur Beantwortung der Frage der Änderung des Informationsgehaltes kann die in Kapitel 2.3.3 eingeführte Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik (JSDM) herangezogen werden,

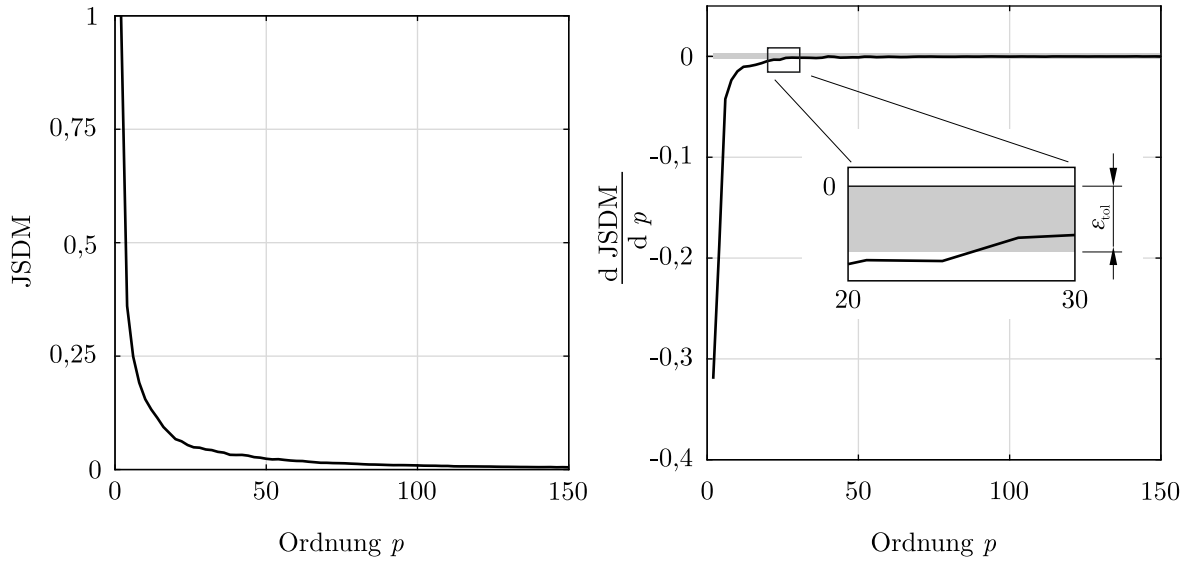


Abbildung 3.11: Links: Monoton fallende JSDM-Kurve für steigende Ordnungen p mit $h = 0, 2$. Rechts: Änderungsrate der JSDM-Kurve für steigende Ordnungen p mit eingezeichneter Toleranzschwelle ε .

die als Maßzahl die Unterschiedlichkeit zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beschreibt. In Abbildung 3.11 ist die $JSDM(\hat{p}(f, N, p), \hat{p}(f, N, p - 2))$ von zwei aufeinander folgenden Ordnungen p und $p - 2$ dargestellt. Durch die kumulative Hinzunahme von höheren Ordnungen aus der Systemidentifikation wird zu Beginn ein hoher zusätzlicher Informationsgehalt bereitgestellt. Die JSDM ändert sich rasch von hohen zu niedrigen Werten. Deutlich wird, dass die Änderung bei zunehmender Ordnung abnimmt. Niedrige JSDM-Werte sind kennzeichnend dafür, dass sich die beiden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen nicht mehr stark voneinander unterscheiden. Damit geht einher, dass ab einer bestimmten Ordnung der Informationszuwachs durch die nächsthöhere Ordnung marginal ist und nicht signifikant zur Schadensidentifikation beiträgt und deckt sich mit dem Zusammenhang aus Gl. (3.12). Dieses Verhalten wird als *information monotonicity* bezeichnet, [Amari, 2016]. Damit kann die JSDM zur adaptiven Ordnungsanpassung verwendet werden, indem als wesentliche Größe die Änderungsrate $\frac{dJSDM}{dp}$ herangezogen wird, die ebenfalls in Abbildung 3.11 dargestellt ist.

Mit der Toleranzschwelle ε_{tol} wird das Abbruchkriterium definiert. Nach Erreichen der Toleranzschwelle ist eine weitere rechenintensive Berechnung weiterer höherer Ordnungen im Rahmen der SSI nicht mehr sinnvoll, da keine signifikante Informationszunahme mehr zu erwarten ist. Neben dem o.g. Vorteil der Reduktion der Rechenleistung liegt der wesentliche Vorteil in der automatisierten, auf informationstheoretischen Grundlagen

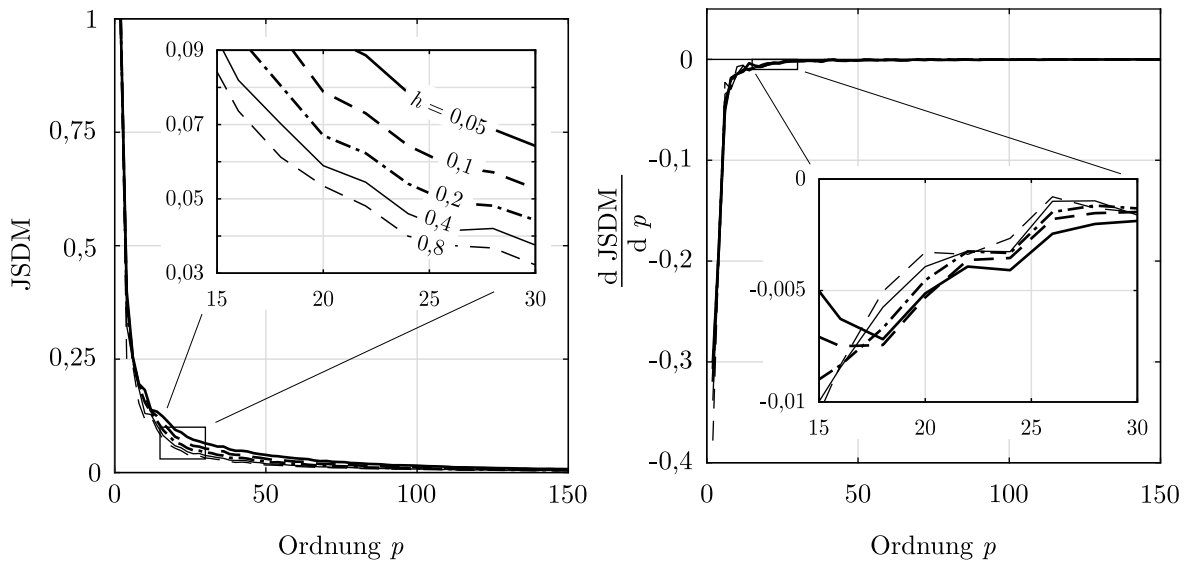


Abbildung 3.12: Abhängigkeit der Jensen-Shannon-Divergenz Metrik und der Änderungsrate von der Wahl der Bandbreite h .

basierenden Auswertung der Stabilisierungsdiagramme und reduziert damit den Interpretationsspielraum bei einer subjektiven, manuell-visuellen Auswertung.

Wesentliche Abhängigkeiten bei der Bildung der MoDE-F

Neben der Ordnung p sind die Bandbreite h , die Anzahl der Signale N und die Anzahl der Freiheitsgrade n_q wesentliche Einflussparameter für die Bildung der *Modal Parameter Density Estimation Function*, die im Folgenden näher betrachtet werden.

Bandbreite h In Abbildung 3.12 ist die JSDM für verschieden Bandbreiten h aufgetragen. Mit zunehmender Bandbreite nimmt die JSDM ab und damit nimmt die Ähnlichkeit der beiden verglichenen Wahrscheinlichkeitsdichten zu. Dieses Phänomen ist auf den smoothing Charakter der Bandbreite zurückzuführen. Bei zunehmender Bandbreite werden die resultierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen immer flacher; mit dem Resultat einer erhöhten Übereinstimmung. Der Faktor $\frac{1}{h}$ kann bei der Berechnung der JSDM herausgezogen werden. JSDM ist damit proportional zu $\frac{1}{h}$.

Anzahl Signalfragmente N Die gleiche Überlegung wie bei der Bandbreite h kann für die Anzahl der Signale N gemacht werden. Der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ kann bei der Berechnung der JSDM herausgezogen werden und damit ist JSDM proportional zum $\frac{1}{N}$. Dieses Verhalten ist in Abbildung 3.13 dargestellt.

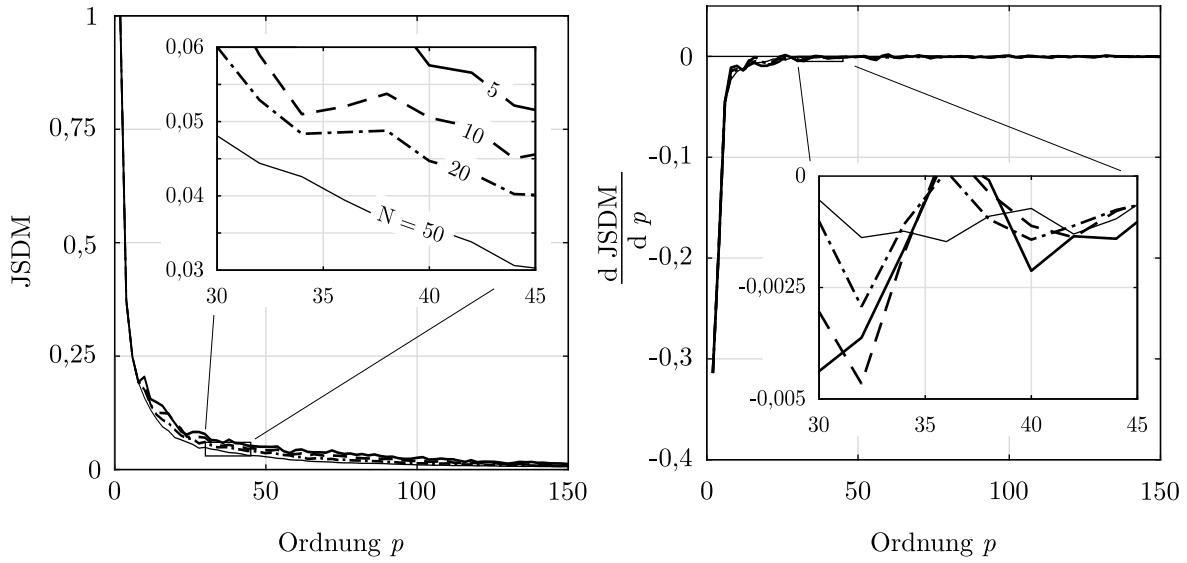


Abbildung 3.13: Abhängigkeit der Jensen-Shannon-Divergenz Metrik und der Änderungsrate von der Wahl der Signalanzahl N bei konstanter Bandbreite $h = 0,2$.

Anzahl Freiheitsgrade n_q Während die vorherigen Parameter direkte Parameter der Methode sind, beschreibt die Anzahl der Freiheitsgrade den Einfluss des zugrunde legenden physikalischen Gesamtsystems. In Abbildung 3.14 ist die JSDM für eine unterschiedliche Anzahl an FHG einer fusspunkterregten Schwingerkette mit n_q Freiheitsgraden dargestellt. Das global monoton abfallende Verhalten ist auch hier deutlich zu erkennen. Der Einfluss der unterschiedlichen Freiheitsgrade wird im Bereich der Ordnung $p = 2n_q$ deutlich. Bis dort sinkt die JSDM stark ab, um in den darauf folgenden Ordnungen wieder anzusteigen und um dann weiter abzufallen und lässt sich durch die kumulative Hinzunahme der Pole und der Philosophie der Stabilisierungsdiagramme erklären. Bis zur Ordnung $p = 2n_q$ treten die diejenigen Pole auf, die das zugrunde legende physikalische System beschreiben. Die Ähnlichkeit der MoDE-F's nimmt stark zu. Wird bei der Systemidentifikation die reale Systemordnung überschritten, so treten neben den realen physikalischen Polen weitere nicht physikalische Pole auf, mit der Folge einer ansteigenden JSDM. Mit zunehmender Ordnung nimmt diese jedoch wieder ab und lässt sich wiederum mit der kumulativen Hinzunahme zusätzlicher Ordnungen und damit der stärkeren Gewichtung der realen Pole begründen. Damit lässt sich auch der Effekt des kurzzeitigen Anstieges bei kleinen Ordnungen p begründen. Bei vielen Freiheitsgraden n_q bzw. großen Ordnungen p machen die realen Systemordnungen einen großen Anteil an der kumulierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus, sodass weitere zusätzlich nicht-physikalische Pole nicht stark ins Gewicht fallen.

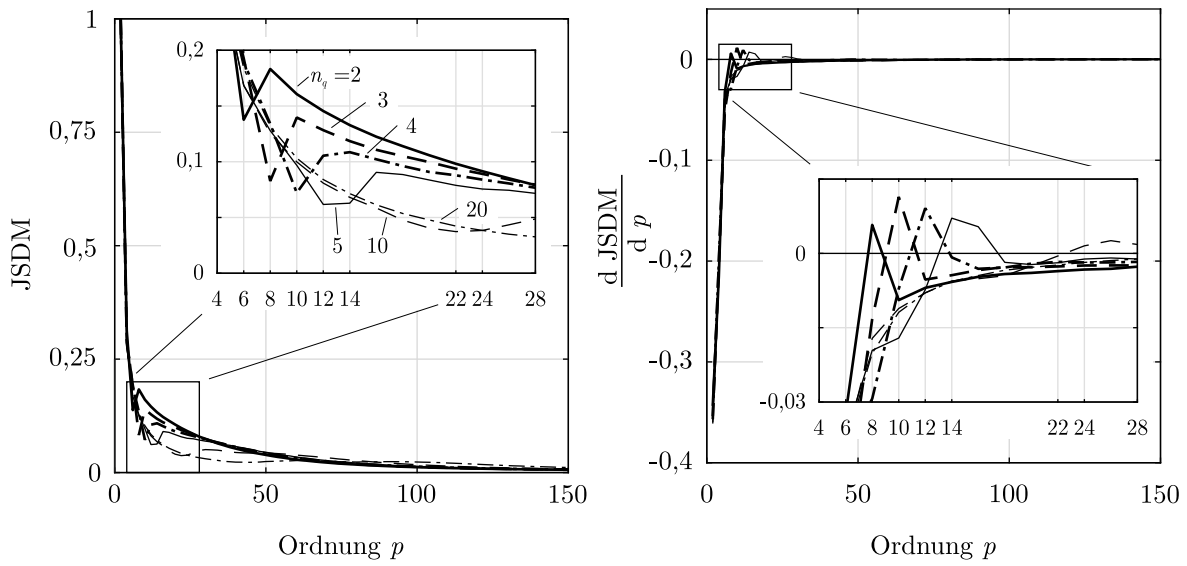


Abbildung 3.14: Abhängigkeit der Jensen-Shannon-Divergenz Metrik und der Änderungsrate von der Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade. $h = 0,2$, $N = 15$.

Änderungsrate Die Änderungsrate ist jedoch nur in geringem Maße von der Bandbreite h der Anzahl der Signale N und den Freiheitsgrade n_q abhängig und bekräftigt die Nutzung als Toleranzschwelle. Die Bandbreiten h und die Anzahl der Signale N sollen daher vornehmlich zur Frequenztrennung, bzw. Verringerung der negativen Effekte durch Verletzung der mathematischen Annahmen genutzt werden. In realen Anwendungen ist die genaue Anzahl der Freiheitsgrade i.d.R. nicht bekannt und kann nicht beeinflusst werden. Der Einfluss ist jedoch sehr lokal im Bereich sich sehr stark ändernder JSDM bei geringen Ordnungen p , der für die adaptive Ordnungsanpassung von realen System mit einer Vielzahl von Freiheitsgraden vorerst irrelevant ist.

3.2 Health Assessment Strategie

Die im vorherigen Abschnitt beschriebene Systematik zur Bildung der *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F) kann zur Bestimmung des Zustandes des technischen Gesamtsystems basierend auf Beschleunigungsmessungen genutzt werden. Die hier vorgestellte Systematik wird den baselineabhängigen Verfahren zugeordnet. Charakterisierend hierfür ist die vorherige Kenntnis verschiedener System- bzw. Schädigungszustände. Dies ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Für die k verschiedenen Schadensszenarien G wird die charakteristische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (MoDE-F) $\hat{p}_k$ unter Berücksichtigung von m_k verschiedenen Anregungsszenarien ermittelt. Diese Phase wird als

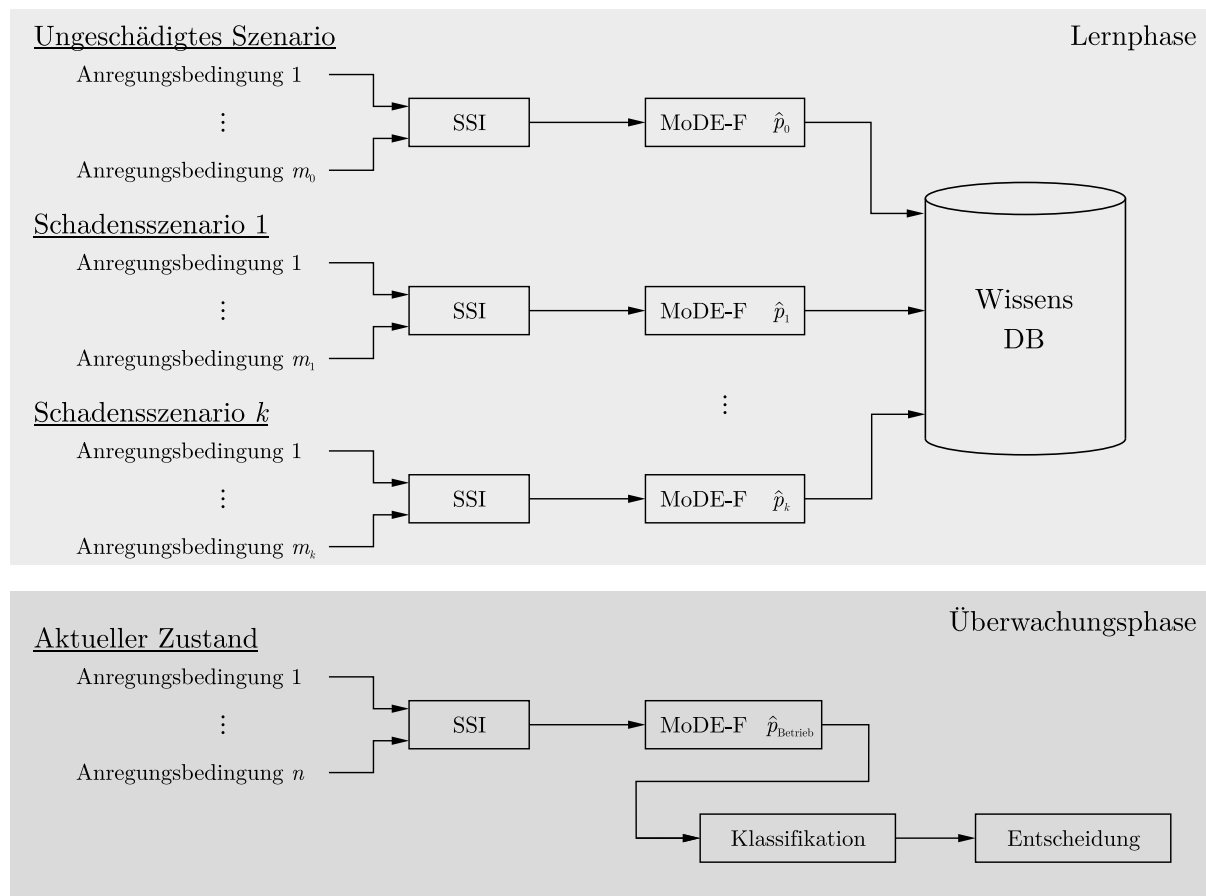


Abbildung 3.15: Schema zum Aufbau eines SHM-Systems.

Lernphase gekennzeichnet. Die ermittelten charakteristischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden in einer Wissensdatenbank (Wissens DB) abgelegt. Die Lernphase ist nicht als abgeschlossen zu sehen. Auch während des Betriebes können neue Zustände angelernt und der Wissensdatenbank zugeführt werden.

In der Überwachungsphase wird analog zur Lernphase aus den aktuellen Messwerten von unterschiedlichen Anregungsszenarien eine charakteristische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gebildet. Mit dem Vergleich der MoDE-F's aus der Wissensdatenbank kann innerhalb der Klassifikation eine Entscheidung zum aktuellen Zustand getroffen werden. Grundlage der Klassifikation bildet eine Klassifikationsregel, mit derer der aktuelle Zustand einer Klasse G zugeordnet werden kann.

3.2.1 Klassifikation mittels Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik

Zur Klassifikation kann ebenfalls die bereits eingeführte Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik herangezogen werden. Als Ähnlichkeitsmaß beschreibt sie die Unterschiedlichkeit zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Diese Eigenschaft macht sich die folgende Klassifi-

kationsregel zu nutze.

$$G(\hat{p}_{\text{Betrieb}}) = \min_{i \in \{1,2,\dots,k\}} (\text{JSDM}(\hat{p}_{\text{Betrieb}}, \hat{p}_i)) \quad (3.13)$$

Der aktuellen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\hat{p}_{\text{Betrieb}}$ wird diejenige Klasse aus der Wissensdatenbank zugeordnet, welche im Vergleich die kleinste JSDM aufweist und damit die größtmögliche Übereinstimmung. Im einfachsten Fall, wenn lediglich der ungeschädigte Zustand in der Wissens DB vorhanden ist, lässt sich damit das Level I – Schadenserkennung – nach Rytter realisieren. Wird die Wissens DB dahingehend erweitert, dass zudem unterschiedliche Schädigungsgrade, -arten und -positionen vorhanden sind, lassen sich ebenfalls die Level II Schadenslokalisierung und Level III Schadensbewertung realisieren, [Rytter, 1993].

3.2.2 Klassifikation mittels Wahrscheinlichkeits-Vergleich

Eine Alternative zur vorherigen Methode bildet der sog. Wahrscheinlichkeitsvergleich. Der bereits in Kap. 3.1.4 zur Erläuterung genutzte Zwei-Massenschwinger wird ebenfalls hier zur anschaulichen Darstellung verwendet. In Abbildung 3.16 sind zwei MoDE-F für zwei unterschiedliche Schadensszenarien G , die sich in dem Tausch eines Federelementes unterscheiden, dargestellt. Sie bilden in diesem einfachen Beispiel die Wissens DB der Lernphase. Werden während der Überwachungsphase keine charakteristischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gebildet, sondern lediglich die Merkmale (hier $f_{0,\text{Betrieb}}^{(p)}$) für eine bestimmte Ordnung p – sofern diese für das zu untersuchende System bekannt ist – ermittelt, so können mit diesen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_k zu einem zugehörigen Schadensszenario k aus der Lernphase ermittelt werden mit

$$P_k^{(p)}(f_{0,\text{Betrieb}}^{(p)}) = \frac{2}{p} \sum_{l=1}^{\frac{p}{2}} \hat{p}_k(f_{0,l,\text{Betrieb}}^{(p)}) \quad (3.14)$$

und die Klassifikationsregel

$$G(f_{0,\text{Betrieb}}^{(p)}) = \max_{i \in \{1,2,\dots,k\}} (P_k^{(p)}(f_{0,\text{Betrieb}}^{(p)})) \quad (3.15)$$

aufgestellt werden. Dem aktuellen Merkmal $f_{0,\text{Betrieb}}^{(p)}$ wird diejenige Klasse aus der Wissensdatenbank zugeordnet, welches im Vergleich den größten Wahrscheinlichkeitswert $P_k^{(p)}$ aufweist.

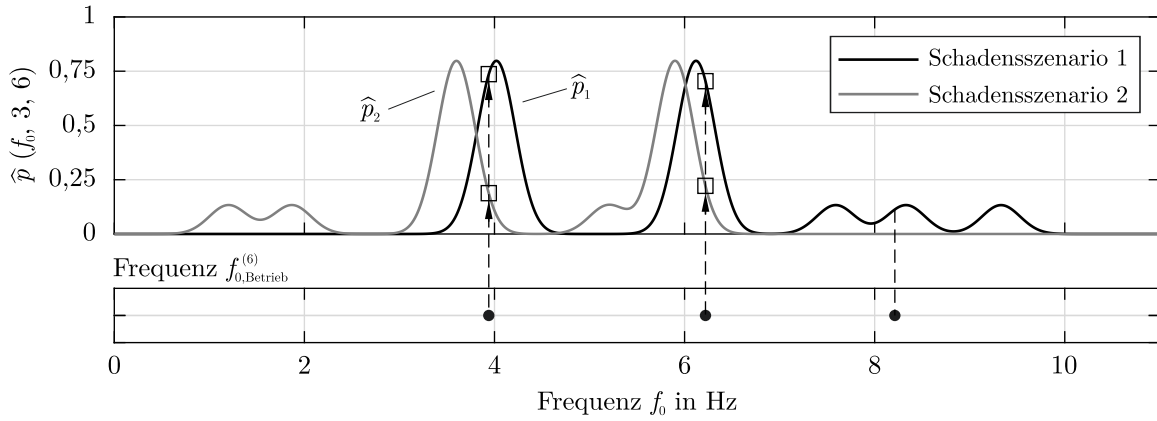


Abbildung 3.16: MoDE-F eines Zwei-Massenschwingers für unterschiedliche Schadensszenarien mit den realen Systemfrequenzen bei 4,03 Hz und 6,12 Hz für das Szenario 1 und bei 3,60 Hz und 5,90 Hz für das Szenario 2 infolge eines Federelementtausches. Die im Betrieb ermittelten Frequenzen $f_{0, \text{Betrieb}}^{(6)}$ sind mit schwarzen Kreisen dargestellt. Nach Anwendung der Klassifikationsregel (3.15) kann der aktuelle Zustand dem Schadensszenario 1 zugeordnet werden, da $P_1^{(6)}(f_{0, \text{Betrieb}}^{(6)}) > P_2^{(6)}(f_{0, \text{Betrieb}}^{(6)})$.

3.2.3 Bewertung des Klassifikationsergebnisses

In dieser Arbeit wird der auf k Klassen erweiterte Matthews Korrelationskoeffizient R_k zur Bewertung des Klassifikationsergebnisses verwendet, der in [Gorodkin, 2004] hergeleitet wurde. Der Index $\square_k$ kennzeichnet dabei die Anzahl der Klassen. Grundlage zur Berechnung von R_k bildet die Konfusionsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{N}^{k \times k}$ (vgl. Tab. 3.1), deren Spalten die wahre Klassenzugehörigkeit der Testdaten abbildet. Die Zeilen geben die durch den Klassifikator ermittelte Klasse wieder. Die Konfusionsmatrix ist eine Zählmatrix. Die Hauptdiagonalelemente repräsentieren die Anzahl der richtig klassifizierten Testdaten. Die Nebendiagonalelemente dem entsprechend die falsch klassifizierten Testdaten, wobei C_{il} mit $i \neq l$ die Anzahl an Testdaten der Klasse l , die fälschlicherweise zur Klasse i zugeordnet wurden, enthält. Im Falle von $k = 2$ enthält man die Konfusionsmatrix für einen binären Klassifikator. C_{11} und C_{22} geben dann die Anzahl der richtig positiven (engl. *True Positive*, TP) bzw. richtig negativen (engl. *True Negative*, TN) klassifizierten Testdaten an. C_{12} und C_{21} sind dann die falsch positiven (engl. *False Positive*, FP) bzw. falsch negativen (engl. *False Negative*, FN) ermittelten Klassen. Stehen pro Klasse m Testdaten zu Verfügung (sog. ausgeglichene Testdaten), werden $N = mk$ Klassifizierungen durchgeführt. Für unausgeglichene Testdaten, d.h. in jeder Klasse steht eine unterschiedliche Anzahl an Testdaten zu Verfügung, gilt $N = \sum_{kl} C_{kl}$. Die Spaltensumme entspricht

		Wahre Klasse						
		Klasse 1	...	Klasse i	...	Klasse l	...	Klasse k
Ermittelte Klasse	Klasse 1	C_{11}	...	C_{1i}	...	C_{1l}	...	C_{1k}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	Klasse i	C_{i1}	...	C_{ii}	...	C_{il}	...	C_{ik}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
	Klasse l	C_{l1}	...	C_{li}	...	C_{ll}	...	C_{lk}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	Klasse k	C_{k1}	...	C_{ki}	...	C_{kl}	...	C_{kk}

Tabelle 3.1: Komponenten der Konfusionsmatrix $\mathbf{C}$ für k Klassen.

stets der Anzahl an Testdaten pro Klasse. Unausgeglichene Testdaten kommen immer dann vor, wenn über einen längeren Zeitraum keine Zustandsveränderung erfolgt. Der Matthews Korrelationskoeffizient ist definiert als

$$R_k = \frac{N \operatorname{tr}(\mathbf{C}) - \sum_{i,l=1}^k \tilde{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_l}{\sqrt{N^2 - \sum_{i,l=1}^k \tilde{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_l^T} \sqrt{N^2 - \sum_{i,l=1}^k \tilde{\mathbf{C}}_i^T \hat{\mathbf{C}}_l}}. \quad (3.16)$$

und lässt sich auch bei unausgebalancierten Testdaten anwenden. Dabei kennzeichnet $(\hat{\bullet})_l$ die l -te Spalte und $(\tilde{\bullet})_i$ die i -te Zeile der Matrix $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{C}^T$. Der erweiterte Matthews Korrelationskoeffizient liegt im Intervall $[-1, 1]$. Die obere Grenze ist stets 1 und zeigt eine hundertprozentig richtige Klassifizierung an. Werden alle Testdaten einer einzigen Klasse i zugeordnet, nimmt R_k den Wert Null an. Auch bei einer zufälligen Klassenverteilung – die Konfusionsmatrix ist an allen Einträgen gleich besetzt – bewertet der Matthews Korrelationskoeffizient den Klassifikator mit Null. Im Fall von mehr als zwei Klassen wird der untere Grenzwert nur asymptotisch erreicht. Dies ist dann der Fall, wenn die Konfusionsmatrix lediglich auf zwei symmetrischen Positionen $C_{il} = C_{li}$ mit $i \neq k$ besetzt ist, [Jurman *et al.*, 2012]. Gegenüber den beiden bekannten und weitverbreiteten Beurteilungskriterien für Klassifikatoren, dem F_1 -Score und der Genauigkeit, bietet der erweiterte Matthews Korrelationskoeffizient den Vorteil, dass er auch bei unausgebalancierten Testdaten verlässliche Ergebnisse bzgl. der Qualität des Klassifikators widerspiegelt [Chicco & Jurman, 2020]. Unausgeglichene Testdaten liegen vor, wenn für eine Klasse wesentlich mehr Testdaten vorliegen, als für die anderen Klassen, was im Bereich des SHM dann auftritt, wenn neue bisher unbekannte Fehlerszenarien auftreten.

Kapitel 4

Anwendung: Analytischer Zwei-Massenschwinger

Bei der Herleitung der SSI zur Identifizierung der modalen Parameter wird in den Gleichungen (2.90) bis (2.92) von einem stationären, stochastischen, mittelwertfreien, weißen Rauschprozess ausgegangen. Dies ist für die theoretische Herleitung eine dankbare Annahme; jedoch in der praktischen Anwendung nicht immer zu realisieren. Charakterisierend für ideales weißes Rauschen ist die konstante Leistungsdichte über alle Frequenzanteile hinweg, was bei Integration über das Leistungsdichtespektrum in einer unendlich großen Signalleistung mündet. In der Praxis haben alle Signale eine endlich beschränkte Signalleistung. Eine praxisnahe Herangehensweise ist daher die Annahme von bandbegrenztem weißen Rauschen zwischen den beiden Frequenzen $f_{\min}$ und $f_{\max}$. Dies führt dazu, dass bei der vorgestellten Methode nicht das ideale Zustandsraummodell aus Abbildung 3.2 identifiziert wird, sondern ein erweitertes Zustandsraummodell, wie es in Abbildung 4.1

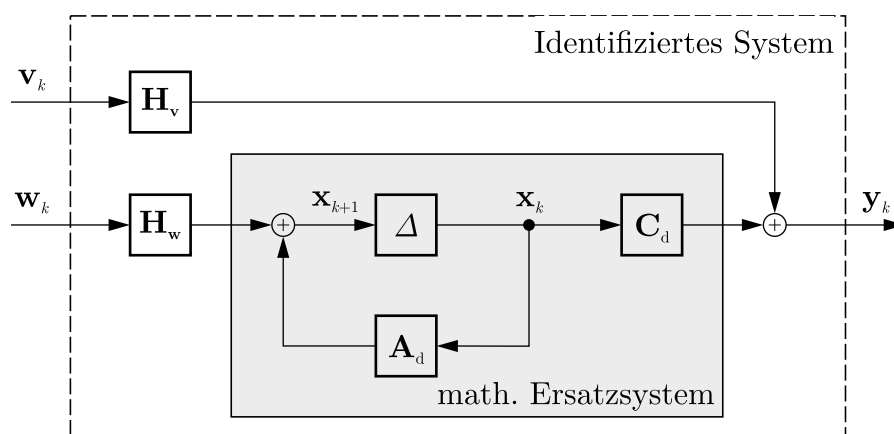


Abbildung 4.1: Ungenauigkeiten bei der Systemidentifikation bei nicht-weißem Rauschen.

dargestellt ist, welches zusätzlich die Filtereigenschaften mit den beiden Übertragungsfunktionsmatrizen $\mathbf{H}_w$ und $\mathbf{H}_v$ des bandbegrenzten weißen Rauschens enthält. Neben dem realen System beinhaltet das Identifikationsergebnis ebenfalls die durch die Filterung der Rauschsignale w und v hervorgerufenen, nicht zum mathematischen Ersatzsystem gehörenden Eigenschaften.

Um den Einfluss des o.g. Sachverhaltes auf die in Kapitel 3 beschriebene Methode zu untersuchen, wird im folgenden Kapitel ein analytischer Zwei-Massenschwinger verwendet, bei dem sich die wesentlichen Parameter gezielt einstellen lassen. Die Eigenschaften und Parameter dieses Systems basieren auf dem an der Universität Siegen vorhandenen Prüfstand, der in [Klein, 2018] beschrieben ist.

4.1 Versuchsumgebung

Der in Abbildung 4.2 dargestellte Zwei-Massenschwinger basiert auf dem realen Versuchsstand der Universität Siegen und besteht aus den zwei Massen m_1 und m_2 , die sich vertikal gegeneinander verschieben können. Die Massen sind durch lineare Zugfedern mit den Federsteifigkeit k_1 , k_2 , und k_3 und den viskosen Dämpfern d_1 , d_2 , und d_3 verbunden und werden reibungsfrei in Gleitluftlagern geführt. Die Federn weisen im entspannten Zustand die Länge l_1 , l_2 , und l_3 auf. Das Schwingungssystem ist der Schwerebeschleunigung g ausgesetzt, am Punkt A fest mit der Umgebung verbunden und wird am Punkt B durch eine Fußpunkterregung (Shaker) angeregt. Solche Modelle werden auch als Schwingerkette

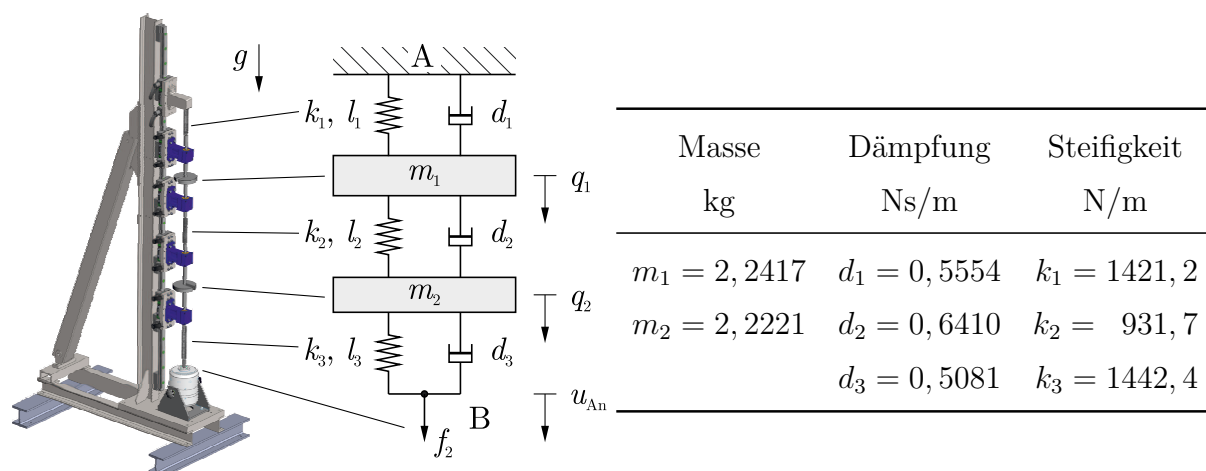


Abbildung 4.2: Akademischer Zwei-Massenschwinger. Links: Modell des Laborprüfstands mit Shaker und Luft-Gleitlagern. Mitte: Mechanisches Ersatzmodell. Rechts: Parameter des Labormodells [Klein, 2018].

bezeichnet. Unter Anwendung der Newtonschen Axiome wird der Zwei-Massenschwinger durch die DGL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 + d_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{z1}(t) \\ q_{z2}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \mathbf{f}(t) \quad (4.1)$$

abgebildet. Die beiden unabhängigen Koordinaten $q_1(t)$ und $q_2(t)$ beschreiben die vertikale Bewegung der beiden Massen um die statische Ruhelage. Der Vektor $\mathbf{f}(t)$ mit

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_3 u_{\text{An}}(t) + d_3 \dot{u}_{\text{An}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

beschreibt die Fußpunkterregung aus der statischen Ruhelage heraus. Mit den zugehörigen Zahlenwerten aus Abb. 4.2 können basierend auf den Ausführungen in Kapitel 2.1.2 die Eigenwerte und -vektoren

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0,4062 \pm 38,4239i & \bar{\mathbf{q}}_{1,2} &= \begin{bmatrix} 1 & -1,0272 \pm 0,0014i \end{bmatrix}^T \\ \lambda_{3,4} &= -0,1192 \pm 25,3665i & \bar{\mathbf{q}}_{3,4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0,9821 \pm 0,0009i \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

und daraus resultierend die modalen Parameter in Tabelle 4.1 berechnet werden.

Masse	Eigenfrequenz in Hz				Dämpfungsgrad in %
	ω_0	f_0	ω_D	f_D	ξ
m_1	38,4260	6,1157	38,4239	6,1154	1,0570
m_2	25,3268	4,0309	25,3265	4,0308	0,4708

Tabelle 4.1: Modale Parameter für den Zwei-Massenschwinger.

4.2 Bestimmung eines Zeitsignals aus einer gegebenen Leistungsdichte

Für die Untersuchung wird ein Zeitsignal verwendet, welches die Eigenschaften des bandbegrenzten weißen Rauschen widerspiegelt. Aus einer vorgegeben Leistungsdichte und der

Anwendung des Wiener-Khintchine-Theorems kann ein Rauschsignal $q(t)$ durch Überlagerung mehrerer harmonischer Signalanteile generiert werden, welches diesen Anforderungen weitestgehend gerecht wird.

Das Wiener-Khintchine-Theorem verknüpft das Leistungsdichtespektrum $S(f)$ und die Autokorrelationsfunktion $R(\tau)$ von stochastisch, stationären Prozessen mittels der Fouriertransformation.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (4.3)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (4.4)$$

Dabei ist τ die Zeit zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten des stochastischen Signals und i die imaginäre Einheit. Wird zusätzlich zur Stationarität noch ein ergodischer Prozess vorausgesetzt, dann lässt sich die Autokorrelationsfunktion eines periodischen Signals mit der Periodendauer T berechnen zu:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} q(t) q(t+\tau) dt \quad \text{bzw.} \quad (4.5)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q(t+\tau) dt, \quad (4.6)$$

wenn vorausgesetzt wird, dass $q(t)$ nur innerhalb einer Periode gegeben ist. Einsetzen in Gleichung (4.3) führt auf die Leistungsdichte

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q(t+\tau) dt e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (4.7)$$

die mit der Substitution $\gamma = t + \tau$ und $d\gamma = d\tau$ zu

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q(\gamma) dt e^{-i2\pi f(\gamma-t)} d\gamma \quad (4.8)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{i2\pi ft} dt \int_{-\infty}^{\infty} q(\gamma) e^{-i2\pi f\gamma} d\gamma \quad (4.9)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F(-f) F(f) \quad (4.10)$$

übergeht. Die beiden Integrale stellen jeweils die Fouriertransformation von $q(t)$ dar und lassen sich als Betrag und Phaseninformation $F(f) = |F(f)| e^{i\varphi(f)}$ bzw. $F(-f) = |F(f)| e^{-i\varphi(f)}$ darstellen und ein Zusammenhang zwischen der Leistungsdichte und der Fouriertransformation herstellen.

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(f)|^2}{T} \quad (4.11)$$

Die in dem Signal enthaltene Phaseninformation geht dabei verloren.

Wird die inverse Fouriertransformation wiederum genutzt, um das ursprüngliche Signal $q(t)$ zu berechnen, folgt aus der Darstellung von Betrag und Phase

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)| e^{i\varphi(f)} e^{i2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)| e^{i(2\pi ft + \varphi(f))} df \end{aligned}$$

und schlussendlich unter Ausnutzung der Eulerschen Formel

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)| \cos(2\pi ft + \varphi(f)) df + i \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)| \sin(2\pi ft + \varphi(f)) df. \quad (4.12)$$

Da es sich bei dem Signal $q(t)$ um eine rein reellwertige Funktionen handelt, ergibt sich der Imaginärteil zu Null mit dem Ergebnis

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)| \cos(2\pi ft + \varphi(f)) df \quad (4.13)$$

$$\approx \sum_{i=1}^{2n_f} |F(f_i)| \cos(2\pi f_i t + \varphi(f_i)) \Delta f, \quad (4.14)$$

wobei die letzte Zeile die Approximation als Riemann-Summe mit $2n_f$ Frequenzanteilen und dem Frequenzinkrement Δf darstellt. Mit der Erkenntnis aus Gleichung (4.11) lässt sich aus einer gegebenen Leistungsdichte ein stochastisches Signal rekonstruieren

$$q(t) \approx \sum_{i=1}^{n_f} \sqrt{2S(f_i) \Delta f} \cos(2\pi f_i t + \tilde{\varphi}_i) \quad \text{für } f_i > 0, \quad (4.15)$$

wobei $\tilde{\varphi}_i$ eine zufällige Phaseninformation darstellt. Mit diesem Zusammenhang können Zeitsignale aus einem Leistungsdichtungsspektrum für unterschiedliche Frequenzbänder zwischen $f_{\min}$ und $f_{\max}$ mit $f_{\max} > f_{\min} > 0$, sowie $f_i = f_{\min} + i\Delta f$ und $\Delta f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{n_f - 1}$ zur systematischen Untersuchung genutzt werden.

4.3 Systemidentifikation mit bandbegrenztem weißem Rauschen

In der folgenden Untersuchung werden vier bandbegrenzte Rauschsignalgruppen mit äquidistant verteilten Frequenzen zwischen $f_{\min} = 0$ Hz und $f_{\max} = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 23 & 39 \end{bmatrix}$ Hz nach Gleichung (4.15) betrachtet. Die Anzahl $n_f = \begin{bmatrix} 1950 & 3315 & 4485 & 7605 \end{bmatrix}$ wird so gewählt, dass sich für den betrachteten Zeitraum ein unkorreliertes Zeitsignal ergibt, wobei die Periodendauer T des erzeugten Signals wesentlich größer ist, als der betrachtete Zeitraum.

Die Leistungsdichte wird an die realen experimentellen Daten aus [Klein, 2018] angepasst. Pro Rauschsignalgruppe werden 20 unterschiedliche Signale verwendet. Für die Extraktion der modalen Parameter werden die Beschleunigungen der Massen m_1 und m_2 aus einem Zeitintervall von 80 s analysiert. Aus diesem Intervall werden 22 Signale mit einer Länge von jeweils 15 s generiert, die jeweils um 3 s verschoben sind. Damit stehen für jede Rauschsignalgruppe 440 Signalteile zu Verfügung, die mittels der SSI-Methode analysiert werden. Im Anschluss wird die MoDE-F mit einer Bandbreite von $h = 0,2$ berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die beiden Systemfrequenzen bei allen Rauschsignalen dominieren. Zusätzlich tritt die obere Bandgrenze in den MoDE-F's in Erscheinung, was auf die Verletzung der Annahme von weißem Rauschen zurückzuführen ist. Gleichzeitig veranschaulicht Abbildung 4.3 einen weiteren Effekt, der aus den physikalischen Gegebenheiten herrührt. In der Abbildung ist links der Frequenzgang dargestellt, in dem deutlich zu erkennen ist, dass Frequenzanteile oberhalb von 23 Hz zu keiner nennenswerten Bewegung führen. Dieser Effekt macht sich auch in der Eigenfrequenz-Dichte-Schätzung mit der oberen Bandbegrenzung von 39 Hz bemerkbar. Trotz Verletzung der Annahme von weißem Rauschen tritt hier nur eine sehr geringe zusätzliche Frequenz aus der Anregung auf. Die Verletzung der Annahme wird durch die Physik kaschiert. Da jedoch in allen Rauschsignalen trotz Verletzung der Annahme von weißem Rauschen die Systemfrequenzen dominieren, lässt sich durch Kombination unterschiedlicher bandbegrenzter Rauschsignale der „Verletzungs“-effekt herausfiltern. Eine Mischung mit jeweils 5 Rauschsignalen aus jeder Gruppe ist ebenfalls dargestellt. Die

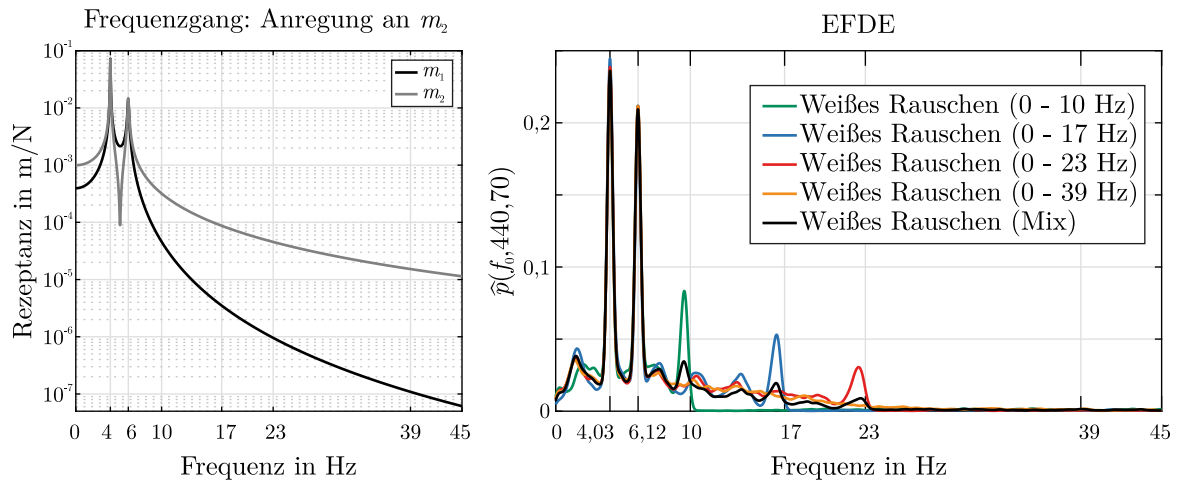


Abbildung 4.3: Einfluss des Anregungssignals auf den Eigenfrequenz-Dichte-Schätzer (MoDE-F) bei bandbegrenztem weißem Rauschen. Links: Frequenzgang des Zwei-Massenschwingers. Rechts: MoDE-F für verschiedene bandbegrenzte weiße Rauschsignale.

beiden Systemfrequenzen lassen sich eindeutig identifizieren. Durch die Mischung der unterschiedlichen Signale werden die Frequenzanteile resultierend aus der oberen Bandbegrenzung weitestgehend unterdrückt. Dieser Effekt der Mittlung wurde bereits in Kapitel 3.1.4 aufgezeigt und kann in Abbildung 3.7 nachvollzogen werden.

4.4 Systemidentifikation mit nicht-weißem Rauschen

Im Bereich der Schienenverkehrstechnik erfolgt die Anregung des Schienenfahrzeuges durch den Rad-Schiene-Kontakt. Wird vorausgesetzt, dass die beiden Kontaktpartner in ständigem Kontakt sind, so erfolgt die Anregungen durch die Schienenunebenheiten, die zufälligen Charakter haben und durch Leistungsdichtespektren beschrieben werden können. Schienenunebenheiten können nach verschiedenen Gleislagefehlern (vgl. Kap. 5.1.2) kategorisiert werden und sind i.d.R. von Streckennetz zu Streckennetz unterschiedlich. Für die Vertikaldynamik sind vor allem die vertikalen Unebenheiten von Interesse, die bspw. durch die Leistungsdichte

$$S(\Omega) = \frac{A_v \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_r^2)(\Omega^2 + \Omega_c^2)}, \quad (4.16)$$

wie in [ORE B 176, 1989] dargestellt, beschrieben werden können. Dabei ist $\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Ortsfrequenz mit der Fehler-Wellenlänge λ und kann im Fall konstanter Fahrgeschwindigkeit v mit

$$\lambda = \frac{f}{v} \quad (4.17)$$

in eine Anregungsfrequenz f überführt werden. Ein ausführliche Übersicht über die Messung, Analyse und mathematische Beschreibung von Schienenunebenheiten ist in [Haigermoser *et al.*, 2015] zu finden. Mit dem Koeffizienten A_v , der in Tabelle 4.2 dargestellt ist, lassen sich unterschiedliche Anregungslevel realisieren.

Anregungslevel	A_v m rad	Ω_c rad m ⁻¹	Ω_r rad m ⁻¹
Vertikal hoch	$1,080 \cdot 10^{-6}$	0,8246	0,0206
Vertikal niedrig	$4,032 \cdot 10^{-7}$	0,8246	0,0206

Tabelle 4.2: Parameter für die Leistungsdichte von vertikalen Schienenunebenheiten nach [ORE B 176, 1989].

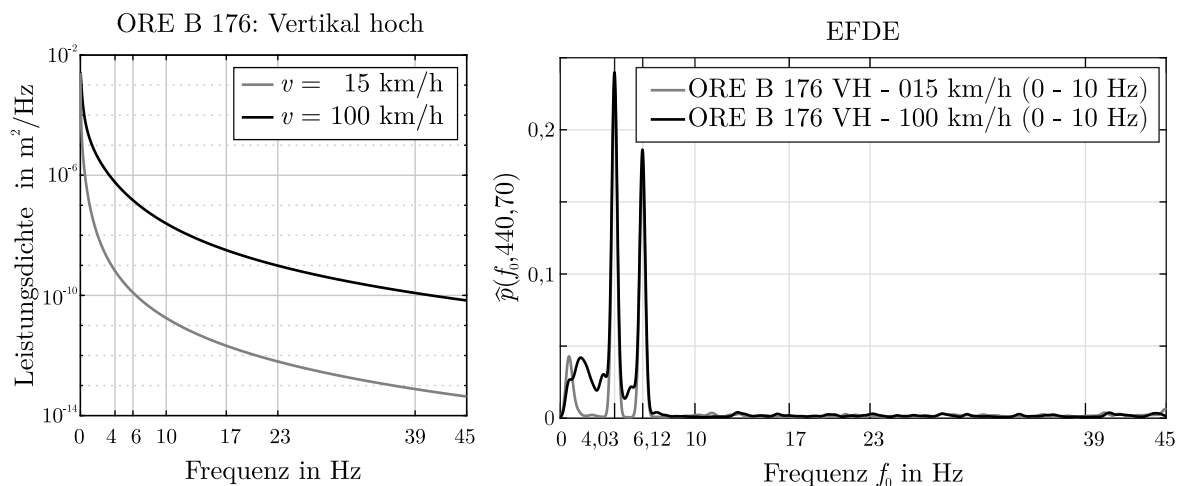


Abbildung 4.4: Einfluss des Anregungssignals auf die MoDE-F bei Schienenunebenheiten. Links: Leistungsdichtespektrum nach Gleichung (4.16). Rechts: MoDE-F für verschiedene Geschwindigkeiten basierend auf der Leistungsdichte von vertikalen Schienenunebenheiten.

In Abbildung 4.4 ist die MoDE-F bei einer Anregung durch die in Gleichung (4.16) beschriebene Leistungsdichte dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit ist die Gesamtsignalleistung und die Bandbegrenzung an das vorherige Beispiel angepasst. Für die beiden dargestellten Geschwindigkeiten 15 km/h und 100 km/h werden die beiden Systemeigenfrequenzen aus 20 zufälligen Signalen der Länge 80 s und denselben Parametern aus dem vorherigen Beispiel sauber identifiziert.

Kapitel 5

Anwendung: Zugmodell in der Simulation

Das vorherige Kapitel hat den Einfluss von bandbegrenztem weißen Rauschen auf die vorgestellte Methode aufgezeigt und die grundlegende Anwendbarkeit der Methode bekräftigt. In diesem Kapitel, welches zum Großteil auf den Veröffentlichungen [Jung *et al.*, 2016, 2017, 2022] basiert, wird an einem Zugmodell gezeigt, dass sich die modalen Parameter eines Schwingungssystems in der charakteristischen *Modal Parameter Density Estimation Function*(MoDE-F) widerspiegeln. Hierzu wird ein Mehrkörpersimulationsmodell (MKS-Modell) verwendet. Nach der Analyse der modalen Parameter des MKS-Modells folgt die Bestimmung mit der in Kapitel 3 vorgeschlagenen Methode, ehe dieser Abschnitt mit der Schadenserkennung von Schäden an der Primärfederung abschließt.

5.1 Mehrkörpersimulations-Modell

Zur Untersuchung verschiedener Schadensszenarien wird ein MKS-Modell bestehend aus einem Versuchszug, einer Teststrecke und einem Gleisoberbau verwendet und in der MKS-Software SIMPACK implementiert. Der modellierte Versuchszug basiert auf dem Personenwagen 1 des Manchester Benchmark [Iwnicki, 1999], der eine vereinfachte Version des ERRI B176 Benchmark-Fahrzeugs ohne Schlingerdämpfer ist. Ebenso werden die Teststrecke und der Gleisoberbau mit den geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Manchester Benchmarks [Iwnicki, 1998] aus Streckenfall 1 versehen. In den folgenden Abschnitten wird die Struktur des MKS-Modells und die Modellierung der verschiedenen Schadensszenarien vorgestellt.

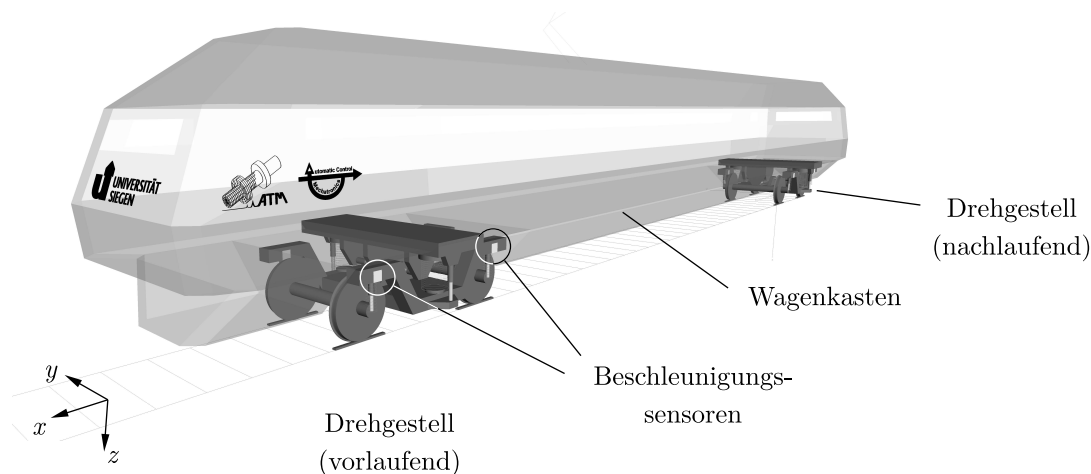


Abbildung 5.1: Mehrkörpersimulations-Modell des Versuchszuges.

5.1.1 Modellierung des Zug- und Gleismodells

Der Versuchszug in Abbildung 5.1 besteht aus einem Wagenkasten, einem vorlaufenden und nachlaufenden Drehgestell mit je zwei Radsätzen. Werden alle Körper als starr angenommen, so besitzt das Modell des Versuchszuges 41 Freiheitsgrade (FHG). Das verwendete Koordinatensystem ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die x -Achse entspricht der Längsrichtung, die y - und z -Achse entsprechen der Quer- bzw. Vertikalrichtung. Das Versuchsfahrzeug ist im schadfreien Zustand symmetrisch sowohl zur y - z -Ebene, als auch zur x - z -Ebene aufgebaut. Die Verbindung der einzelnen Starrkörper untereinander wird im Topologiediagramm in Abbildung 5.2 sichtbar. Der Wagenkasten wird über die Sekundärfederung mit dem Drehgestell verbunden. Jede Sekundärfederung besteht aus zwei lateralen und zwei vertikalen Dämpfern (Dämpfungskonstanten: ${}^L d_{s,lat}$, ${}^R d_{s,lat}$, ${}^L d_{s,vert}$, ${}^R d_{s,vert}$), einem Anti-Roll-Bar (c_{roll}) und einer Zugstange (c_{trod}), einem Anschlagpuffer (c_{bump}) und zwei Sekundärfedern (${}^L c_s$, ${}^R c_s$). Das hochgestellte L und R kennzeichnet die linke bzw. die rechte Seite des Drehgestells. Mit dieser Anordnung lassen sich sowohl longitudinale, laterale Schubsteifigkeiten, als auch vertikale Biegesteifigkeiten abbilden. Die Radsätze sind

Fahrzeug Abmessungen		Massen der Starrkörper	
Drehgestellabstand	19,00 m	Wagenkasten	32 t
Achsabstand	2,56 m	Drehgestell	2,615 t
Raddurchmesser	0,92 m	Radsatz	1,813 t

Tabelle 5.1: Abmessungen und Gewichte des Testzuges.

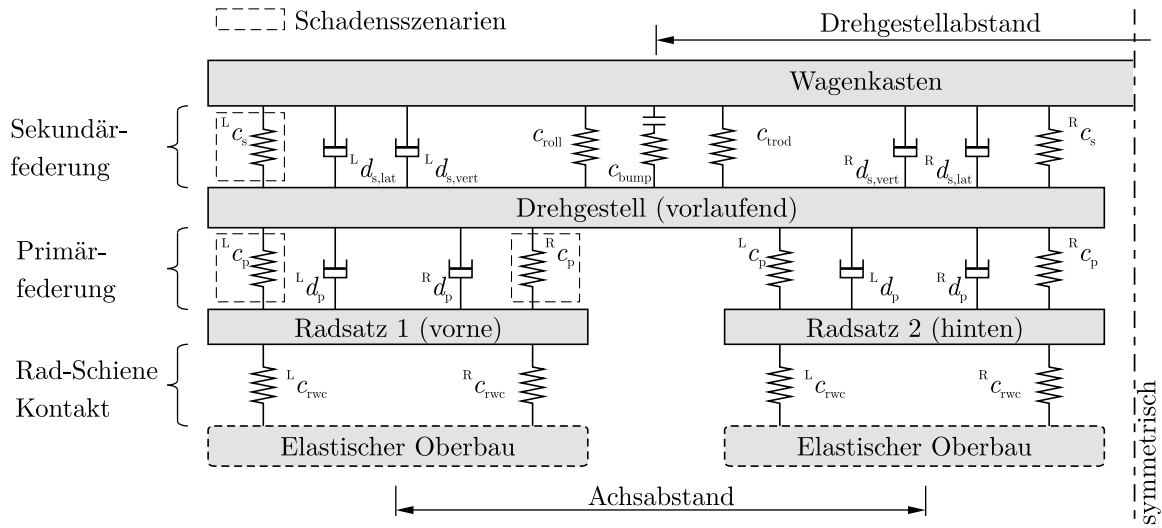
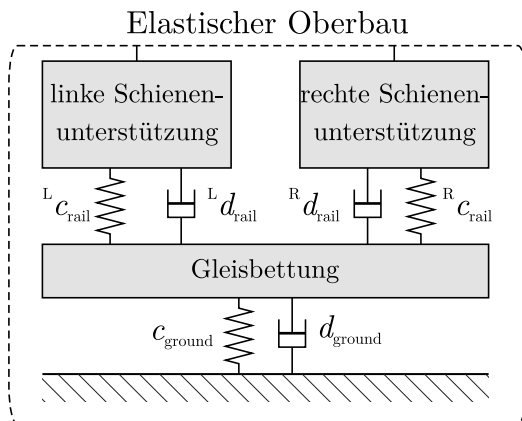


Abbildung 5.2: MKS-Topologie des Versuchszuges mit Kennzeichnung der eingebrachten Schadensszenarien. Der elastische Oberbau ist in Abb. 5.3 zu finden. Der verwendete Parametersatz ist in Tab. 5.1 dargestellt.

über zwei Primärfederstufen an dem linken und rechten Wellenende mit dem Drehgestell verbunden. Jede Primärfederstufe besteht aus einem Primärdämpfer (d_p), sowie einer Primärfeder (c_p) mit Längs-, Quer- und Vertikalsteifigkeit. Bis auf den Anschlagpuffer werden die Federsteifigkeiten und Dämpfungsraten als konstant angenommen. Beim Anschlagpuffer wird eine nicht-lineare Federkennlinie hinterlegt. In Tabelle 5.1 ist eine kurze Zusammenfassung der Fahrzeugabmessungen und Massen angegeben. Die vollständigen Konstruktionsparameter können [Iwnicki, 1999] entnommen werden.

Zur Berechnung der Kontaktkräfte im Rad-Schiene-Kontakt, die die Verbindung mit dem elastischen Oberbau bilden, werden die in SIMPACK implementierten Algorithmen verwendet. Die Normalkräfte werden mit dem Hertz'schen Verfahren berechnet und können bei Interesse in [Kalker, 1982; Claus & Schiehlen, 1998] studiert werden. Die tangentialen Kontaktkräfte hängen von den Normalkräften, dem Reibungskoeffizienten sowie der Geometrie der Kontaktfläche und der Spannungsverteilung innerhalb der Fläche ab und werden mit dem anerkannten FASTSIM-Verfahren berechnet, vgl. [Kalker, 1982, 2013].

Zusätzlich sind acht virtuelle dreidimensionale Beschleunigungsaufnehmer auf den Drehgestellen implementiert; vier davon befinden sich am vorderen Drehgestell und vier am hinteren Drehgestell und sind direkt über den Primärfederverbindungen angebracht.



	Schienen- unterstützung		Gleis- bettung	
Masse	60	kg	500	kg
$c^{\text{Lat.}}$	43,0	MN/m	7,0	MN/m
$d^{\text{Lat.}}$	0,24	MNs/m	0,24	MNs/m
$c^{\text{Vert.}}$	50	MN/m	37,0	MN/m
$d^{\text{Vert.}}$	0,2	MNs/m		

Abbildung 5.3: MKS-Topologie des elastischen Oberbaus (links) mit den verwendeten Parametern (rechts). Die hochgestellten Indizes Lat. und Vert. kennzeichnen die richtungsabhängigen Kennwerte in y - bzw. z -Richtung.

Modellierung des elastischen Oberbaus

Der in Abbildung 5.3 mit seinen verwendeten Parametern dargestellte Gleisoberbau besteht aus einer Gleisbettung, einer linken und rechten Schienenunterstützung und den Schienen. Die Schienen sind mit einer Spurweite von 1435 mm und einer Neigung von 1:40 auf der jeweils linken bzw. rechten Schienenunterstützung befestigt. Die Schienenunterstützung ist mit zwei FHG (y , z) über ein einfaches Feder-Dämpfer-System ($^L c_{\text{rail}}$, $^L d_{\text{rail}}$ bzw. $^R c_{\text{rail}}$, $^R d_{\text{rail}}$) mit der Gleisbettung gekoppelt, welche als 1-FHG-System in z -Richtung (c_{ground} , d_{ground}) mit dem als starr angenommenen Unterbau verbunden wird. Zusammen mit dem Versuchsfahrzeug werden in dem Gesamtmodell insgesamt 61 FHG berücksichtigt.

Modellierung der Teststrecke

Die Teststrecke wird durch das Versuchsfahrzeug mit einer konstanten Geschwindigkeit von $4,4 \text{ m s}^{-1}$ befahren, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zum Manchester Benchmark herzustellen. Sie beginnt mit einem 50 m langen geraden Streckenabschnitt, gefolgt von einem 30 m langen linearen Übergangsbereich der in einer 60 m langen Kurve mit 150 m Radius und 100 mm Überhöhung mündet. Der Kurvenauslauf beinhaltet auf der kurvenäußeren Schiene eine Vertiefung von 20 mm über 6 m Länge. Diese Vertiefung startet 21,56 m nach dem Übergangsbereich. In Summe ist die Teststrecke 190 m lang.

5.1.2 Modellierung von Gleisfehlern

Zur Anregung des Versuchsfahrzeugs werden der oben beschriebenen Teststrecke Gleisunregelmäßigkeiten überlagert. Befährt das Versuchsfahrzeug die Teststrecke mit der konstanten Geschwindigkeit v und wird ein sinus-förmiger Gleisfehler mit der Wellenlänge λ überlagert, so resultiert dies in einer Anregung des Versuchsfahrzeugs mit der Anregungsfrequenz

$$f_{\text{exc}} = \frac{v}{\lambda}. \quad (5.1)$$

Verschiedene Gleisfehler wirken sich auf unterschiedliche Wellenlängenbereiche aus. Gleisunregelmäßigkeiten mit einer Wellenlänge von weniger als 2 - 3 m lassen sich auf unterschiedliche Schienenrauheiten oder Schienenungenauigkeiten zurückführen, wie bspw. Schwankungen des Schienenprofils, verursacht durch Verschleiß oder Produktionstoleranzen. Gleisunregelmäßigkeiten mit Wellenlängen über 2 - 3 m sind bspw. das Ergebnis von Schwankungen in der Schotter- und/oder Fundamentsteifigkeit oder resultieren aus Unregelmäßigkeiten bei der Erstellung des Oberbaus. In Europa unterteilt die EN 13848-1 [DIN EN 13848-1:2019-06, 2019] die Gleisunregelmäßigkeiten in drei verschiedene Wellenlängenbereiche:

- D1: $3 \text{ m} < \lambda \leq 25 \text{ m}$
- D2: $25 \text{ m} < \lambda \leq 70 \text{ m}$
- D3: $70 \text{ m} < \lambda \leq 150 \text{ m}$ (Längs)
- D3: $70 \text{ m} < \lambda \leq 200 \text{ m}$ (Lateral)

Der Wellenlängenbereich D1 resultiert hauptsächlich aus verschiedenen Setzungsmechanismen des Gleisbetts und dem darunter befindlichen Unterbau. Der Bereich D2 wird hauptsächlich durch Unregelmäßigkeiten in der Gleisanlage oder durch unzureichende Tragfähigkeit des Unterbaus beeinflusst. Der Bereich D3 ergibt sich aus Gleisplanungsproblemen und kann in die zwei Teilbereiche, Unregelmäßigkeiten in der Längsrichtung und Unregelmäßigkeiten in der lateralen Ausrichtung, unterteilt werden.

Da alle Effekte nicht einzeln, sondern auch gemeinsam auftreten, werden i.d.R. Gleisfehler durch Zufallsprozesse charakterisiert. Ein weit verbreiteter Ansatz bei der Untersuchung der Fahrzeugdynamik besteht in der Nutzung von Zufallsdaten, die durch eine vorgegebene spektrale Leistungsdichte (engl. *Power Spectral Density*, PSD) definiert sind; vgl. auch [Claus & Schiehlen, 1998] oder [Haigermoser *et al.*, 2015]. In der vorliegenden Studie werden vertikale und laterale Gleisunregelmäßigkeiten sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Schiene verwendet. Die hier verwendete analytische Darstellung der

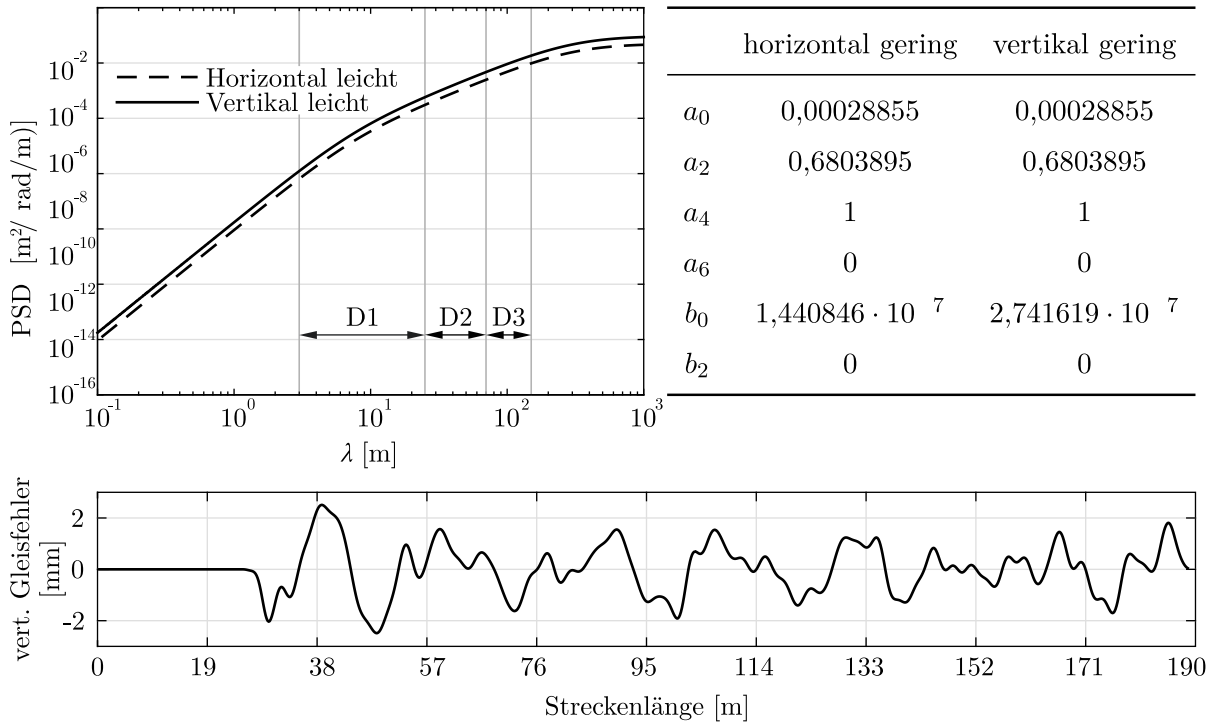


Abbildung 5.4: Wegabhängiger vertikaler Gleisfehler (unten) resultierend aus der spektralen Leistungsdichte nach Gl. (5.2) (oben links) mit den zugehörigen Koeffizienten (oben rechts) [SIMPACK AG, 2016].

PSD folgt der Vorschrift

$$S(\Omega) = \frac{b_0 + b_2 \Omega^2}{a_0 + a_2 \Omega^2 + a_4 \Omega^4 + a_6 \Omega^6} \quad (5.2)$$

mit der Wellenzahl

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.3)$$

und ist [SIMPACK AG, 2016] entnommen. Sie wurde von von der Chinese Academy of Railway Science (CARS) aus einer Vielzahl von Experimenten und Untersuchungen abgeleitet [Chen *et al.*, 2008; Berawi, 2013]. Die Koeffizienten a_0 bis a_6 und b_0 bis b_2 werden für eine leichte vertikale und horizontale (laterale) Anregung gewählt und sind in Abbildung 5.4 neben den daraus resultierenden spektralen Leistungsdichten dargestellt. In dieser Studie wird gemäß EN 13848-1 [DIN EN 13848-1:2019-06, 2019] der Wellenlängenbereich D1 von $\lambda_1 = 3$ m bis $\lambda_2 = 25$ m für den öffentlichen Personennahverkehr gewählt. Zur Erzeugung eines wegabhängigen Gleisfehlersignals werden aus diesem vorgenannten Wellenlängenbereich 300 äquidistante Punkte gewählt und mit dem in Kapitel 4.2 vorgestellten Ansatz und Gleichung (4.15) ein kontinuierliches Fehler-Signal erstellt, welches beispielhaft für den vertikalen Gleisfehler in Abbildung 5.4 dargestellt ist.

Fall	Federstufe	Position	Schädigung
1	Primärfeder	Drehgestell vorlaufend - Radsatz vorne - links	30 %
2	Primärfeder	Drehgestell vorlaufend - Radsatz vorne - links	70 %
3	Primärfeder	Drehgestell vorlaufend - Radsatz vorne - rechts	30 %
4	Primärfeder	Drehgestell vorlaufend - Radsatz vorne - rechts	70 %
5	Sekundärfeder	Drehgestell vorlaufend - links	30 %
6	Sekundärfeder	Drehgestell vorlaufend - links	70 %

Tabelle 5.2: Schadensszenarien an der Primär- und Sekundärfederung.

5.1.3 Modellierung der Schadensszenarien

Als Schadensszenarien (vgl. Abb. 5.2) werden Defekte an der Primär- und Sekundärfederstufe des vorlaufenden Drehgestells in dieser Studie betrachtet. Insgesamt werden sechs unterschiedliche Schadensszenarien durch Reduktion der Federsteifigkeiten von 30 % und 70 % erstellt, die in Tabelle 5.2 aufgelistet sind.

5.2 Analyse der modalen Parameter

Defekte an der Federung haben einen direkten Einfluss auf die modalen Parameter des Schienenfahrzeugs. Um einen ersten Eindruck von der Dynamik des Versuchsfahrzeuges zu erhalten, wird eine Eigenfrequenzanalyse des oben beschriebenen Modells durchgeführt, mit dem Ziel, erkennbare und individuelle Veränderungen in den Eigenfrequenzen zu identifizieren. In Tabelle A.1 sind die mit SIMPACK ermittelten Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenformen für den ungeschädigten Zustand aufgeführt. Gleichphasige Schwingbewegungen werden mit IP (in phase) gekennzeichnet. Gegenphasige Schwingbewegungen werden mit OOP (out of phase) bezeichnet.

In Abbildung 5.5 sind die Änderungen der Eigenfrequenzen in Bezug auf den angegebenen Fehlerfall dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass ein Fehler in der Sekundärfeder einen großen Einfluss auf die Dynamik des Wagenkastens hat, was auch der Erwartung entspricht. Es sind Änderungen von etwa -3 bis -5 % im Schadensfall mit einer niedrigen und bis zu -14 % mit einer hohen Schädigung zu beobachten. Eine Verringerung der Steifigkeit der Primärfeder hat vor allem Einfluss auf das dynamische Verhalten des Drehgestells. Vor allem die Tauch-, Roll- und Nickmoden liegen in einem

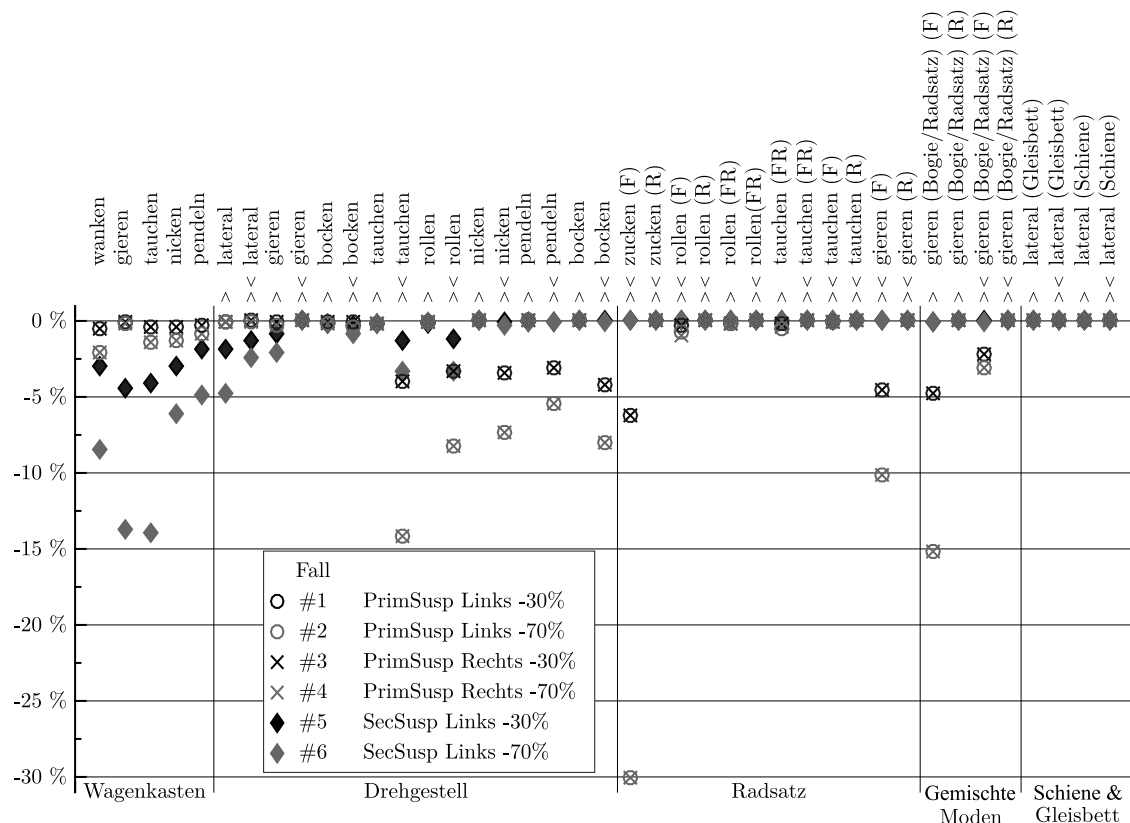


Abbildung 5.5: Änderung der ungedämpften Eigenfrequenzen bei unterschiedlichen Schadensszenarien (>< gegenphasig, > gleichphasig), (F) nur Bewegung der Radsätze des vorderen Drehgestells, (R) nur Bewegung der Radsätze des hinteren Drehgestells, (FR) Bewegung der Radsätze im vorderen und hinteren Drehgestell (gleichphasig im selben Drehgestell).

Bereich zwischen -3 bis -6 % im Fall eines geringen Schadens und -7 bis -30 % im Fall eines hohen Schadens. Diese Informationen können für die Entwicklung eines SHM-Systems genutzt werden. Ein besonderes Augenmerk sollte auf Frequenzänderungen bei etwa 7 bis 12 Hz (Tauch-, Roll- und Nickmoden, vgl. Tab. A.1) gelegt werden, um Fehler in der Primärfederung zu erkennen, und bei 0,5 bis 1,5 Hz (Moden des Wagenkastens, vgl. A.1), um Fehler in der Sekundärfederung zu erkennen.

5.3 Ermittlung der modalen Parameter via MoDE-F

Das oben beschriebene MKS-Modell wird zur Erzeugung von unterschiedlichen Anreizungsbedingungen verwendet. Hierzu werden 100 Simulationen mit dem Versuchszug und der Versuchsstrecke aus Kap. 5.1.1 bzw. 5.1.1 durchgeführt. Bei der verwendeten

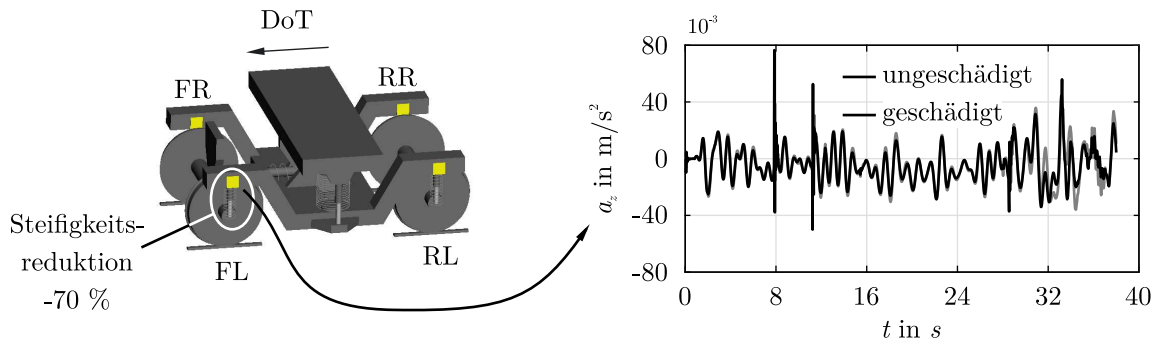


Abbildung 5.6: Links: Vorlaufendes Drehgestell mit Beschleunigungssensoren an der vorderen rechten (FR, *Front Right*), vorderen linken (FL, *Front Left*), hinteren rechten (RR, *Rear Right*) und hinteren linken (RL, *Rear Left*) Primärfederung. Die Fahrtrichtung wird mit DoT (engl. *Direction of Travel*) gekennzeichnet. Rechts: Vertikales Beschleunigungssignal für den geschädigten und ungeschädigten Fall.

Geschwindigkeit ergeben sich Signallängen von ca. 38 s. Für die Ermittlung der modalen Parameter nach Kapitel 3 wird lediglich das vertikale Beschleunigungssignal des führenden Drehgestells an der linken Seite verwendet, da die Analyse der modalen Parameter aus dem vorherigen Kapitel 5.2 gezeigt hat, dass vor allem die Nickbewegungen des Drehgestellrahmens sensitiv auf einen Schadfall in der linken Primärfeder reagieren. Bei einer Reduktion der Federsteifigkeit um 70 % der linken Primärfeder (vgl. Abb. 5.2) reduziert sich die Eigenfrequenz im o.g. Frequenzbereich der Nick-Mode von 11,87 Hz zu 11,04 Hz. In Abbildung 5.6 ist das Test-Setup und ein exemplarischer Verlauf eines Beschleunigungssignals im un- und geschädigten Zustand dargestellt. Alleine durch den Vergleich der beiden Signale kann keine direkte Unterscheidung zwischen dem geschädigten und dem „gesunden“ Zustand gemacht werden. Die Auswertung der Beschleunigungssignale mittels der in Kap. 3.1.2 vorgestellten Stabilisierungsdiagramme ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Eine klare Unterscheidung der beiden Schadenszustände ist hier nicht möglich.

Das Ergebnis der Anwendung der Methode aus Kapitel 3 ohne die adaptive Ordnungsanpassung für eine vorgegebene Ordnung $p = 36$ ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Verwendet werden 30 zufällig ausgewählte Anregungsszenarien aus den 100 Simulationen. Die Ordnung wurde entsprechend der 18 FHG des vorlaufenden Drehgestells (6 FHG) und der beiden zugehörigen Radsätzen ($2 \times 6 = 12$ FHG) gewählt. Mittels der neu entwickelten Methode ist es möglich, die charakteristischen Eigenfrequenzen klar zu identifizieren. Ebenso lässt sich ein direkter Unterschied zwischen den beiden Schadenszuständen ermitteln. Deutlich zu sehen ist, dass die Frequenz Nick-Mode sich wie erwartet reduziert.

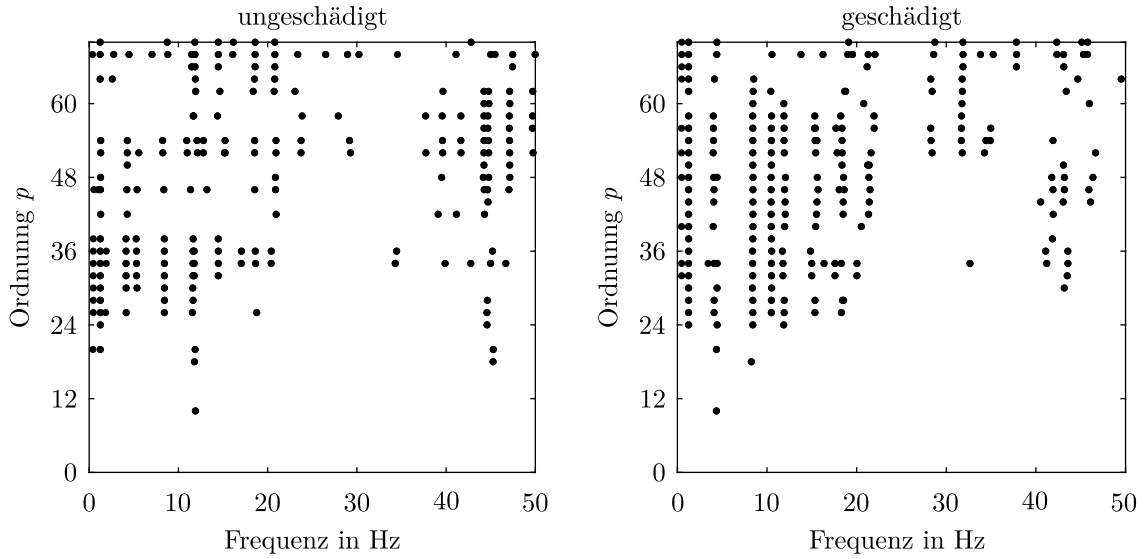


Abbildung 5.7: Stabilisierungsdiagramme für den ungeschädigten Zustand (links) und den geschädigten Zustand (rechts, Reduktion der vorderen Primärfeder um 70 %) für eine zufällig gewählte Überfahrt. Parameter: SSI $r = 480$, $s = 480$ - Stabilisierungsdiagramm $f_{\text{tol}} = 1\%$, $d_{\text{tol}} = 5\%$, $f_{\text{tol}} = 1\%$, $\text{MAC}_{\text{tol}} = 0,99$.

Dieser Einfluss lässt sich auf die defekte Primärfederung und damit auf ein physikalisch zu begründende Änderung zurück führen.

5.3.1 Robustheit der MoDE-F Methode

Das vorherige Kapitel zeigt die Anwendung mit mehreren Anregungsbedingungen ($N = 30$), jedoch kann dieses auch als eine Momentaufnahme angesehen werden. Bei SHM-

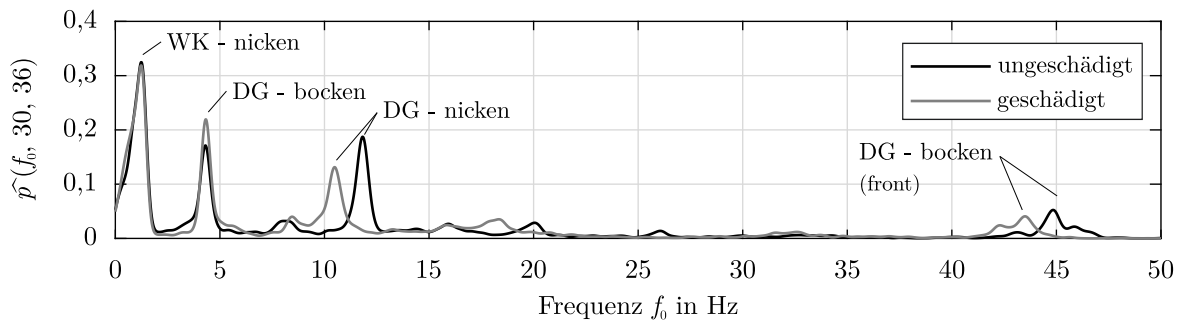


Abbildung 5.8: Ergebnis der Systemidentifikation mittels MoDE-F für die Ordnung $p = 36$ mit 30 unterschiedlichen Gleisanregungen bei einer Geschwindigkeit von $4,4 \text{ m s}^{-1}$. WK - Wagenkasten, DG - Drehgestell. Parameter: SSI $r = 480$, $s = 480$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$.

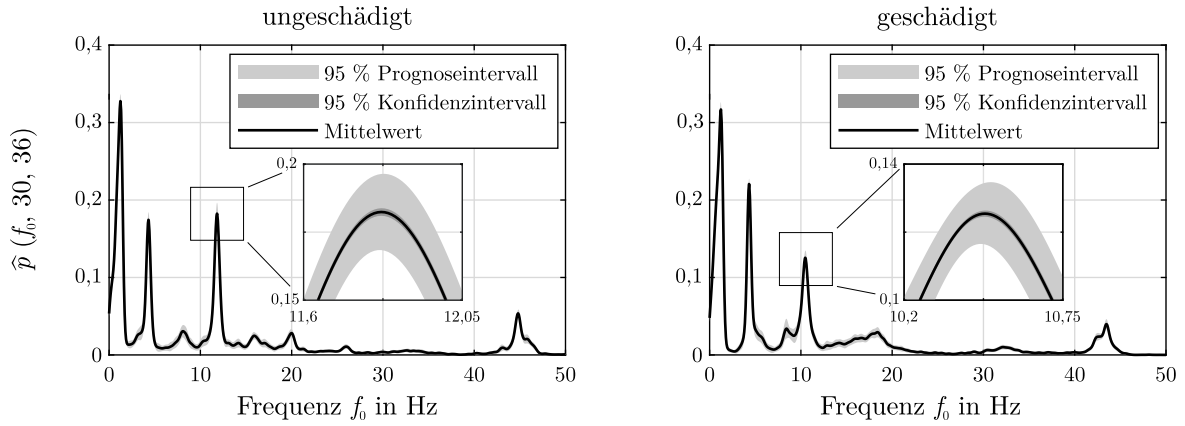


Abbildung 5.9: Prognose- und Konfidenzintervall bei der Erstellung der charakteristischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (MoDE-F) zur Beurteilung der Robustheit der Methode. 100 Berechnungen der PDF mit jeweils 30 zufälligen Anregungsbedingungen. Parameter: SSI $r = 480$, $s = 480$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$.

Systemen, und vor allem deren Methoden, ist es wichtig, dass diese zuverlässig und weitestgehend robust gegenüber äußeren Einflüssen auf das zu untersuchende System reagieren. Um den Einfluss der verwendeten Anregungsbedingungen zu untersuchen, werden 100 unterschiedliche *Modal Parameter Density Estimation Functions* mit je 30 unterschiedlichen Anregungsbedingungen generiert. Dieses Verfahren wird für jedes der beiden Schadensszenarios durchgeführt. Zur Beurteilung der Robustheit werden das Prognose- und das Konfidenzintervall hinzugezogen, die für diese Studie in Abbildung 5.9 dargestellt sind. Ebenso ist der Mittelwert abgebildet. Stark auffällig ist, dass das 95 %-Konfidenzintervall in beiden Schädigungszenarien sehr eng um den abgebildeten Mittelwert sichtbar wird, bzw. fast deckungsgleich ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass bei der zukünftigen Bildung der charakteristischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (vor- ausgesetzt der Schädigungszustand ist derselbe) mit unterschiedlichen Anregungssignalen im Mittel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % ebenfalls in diesem aktuell sehr engen Bereich liegen wird. Ein ähnliches Bild zeigt das 95 %-Prognoseintervall in beiden Schädigungszenarien. Naturgemäß ist dieses Intervall betragsmäßig größer, als das zugehörige Konfidenzintervall, zeigt aber an dem ausgewählten Beispiel ein ausgesprochen zuverlässiges Verhalten. Die zukünftig berechneten charakteristischen MoDE-F's mit unterschiedlichen Anregungsbedingungen werden mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit in den dargestellten Grenzen bleiben. Im charakteristischen Frequenzbereich zwischen geschädigtem ($10,2 \text{ Hz} < f_0 < 10,75 \text{ Hz}$) und ungeschädigten ($11,6 \text{ Hz} < f_0 < 12,05 \text{ Hz}$) Zustand gibt es keine Überschneidungen der Konfidenz- bzw. Prognoseintervalle, sodass eine Fehlinter-

pretation vermieden wird. Somit kann eine zuverlässige Zustandsbewertung durchgeführt werden. Das gerade beschriebene Verhalten zeigt, dass die neue vorgestellte Methode robust die Hauptfrequenzen ermittelt und für eine Zustandsbewertung verwendet werden kann.

5.4 Schadenserkennung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsmethode

Im vorherigen Abschnitt konnte gezeigt werden, dass für das verwendete Simulationsmodell zuverlässig und robust die charakteristischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ermittelt werden können. Der nun folgende Abschnitt untersucht die Sensitivität bezüglich der erkennbaren Schadensgröße.

Für diese Untersuchung wird die Steifigkeit der linken Primärfeder stufenweise um 5 % bis hin zu einer maximalen Schädigung von 70 % reduziert. Insgesamt werden für jeden Schädigungsgrad 100 Schadensbewertungen zwischen geschädigtem und ungeschädigten Zustand durchgeführt. In der Lernphase wird jeweils eine charakteristische MoDE-F mit der Ordnung $p = 36$ mit 30 zufälligen Anregungsszenarien sowohl für den ungeschädigten als auch für die geschädigten Zustände gebildet. In der Überwachungsphase werden jeweils 50 zufällig gewählte Datensätze der Ordnung $p = 36$ des ungeschädigten und geschädigten Zustandes aus den bisher noch nicht genutzten Simulationen verwendet und den charakteristischen MoDE-F's aus der Lernphase gegenüber gestellt. Zur Klassifikation wird das Verfahren aus Kapitel 3.2.2 verwendet.

5.4.1 Sensitivität der Schadenserkennung

Neben der Robustheit der verwendeten Methode ist zusätzlich die Sensitivität eine entscheidende Größe. Die Sensitivität wird in diesem Anwendungsfall verstanden, als der Wert der Schädigung, ab dem eine zuverlässige Unterscheidung zwischen un- und geschädigtem Zustand möglich ist. Zur Bewertung wird der Matthews Korrelationskoeffizient R_k nach Gleichung (3.16) basierend auf der Konfusionsmatrix herangezogen. Da es sich hier um eine Klassifikation von zwei Klassen handelt, wird von einer binären Klassifikation gesprochen, dessen Ergebnis die 2×2 Konfusionsmatrix ist. Am Ende der Studie stehen somit je Schädigungsgrad 100 Werte von R_k zur Verfügung.

Zur Bewertung wird der Median und der MAD (Median der absoluten Abweichung)

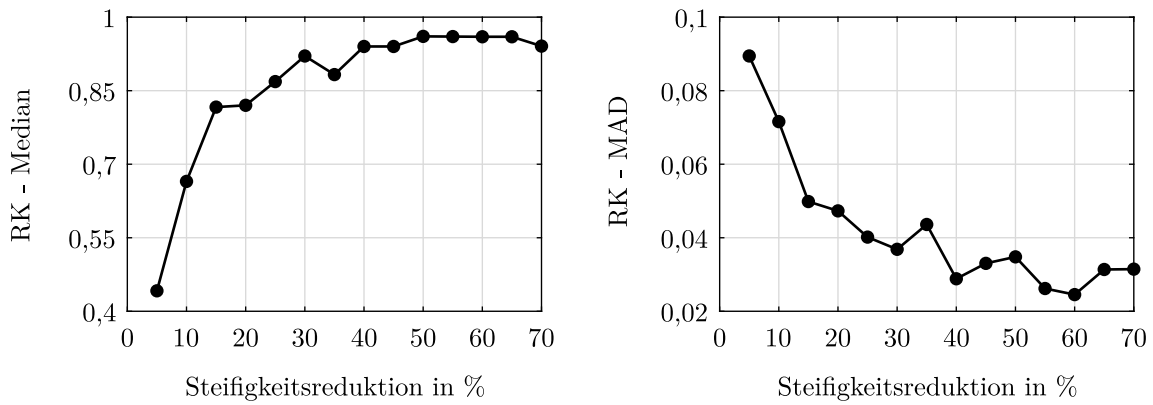


Abbildung 5.10: Sensitivität der Schadenserkennung in Abhängigkeit der Steifigkeitsreduktion der vorderen linken Primärfeder. Links: Median des Matthew Korrelationskoeffizients R_k . Rechts: Zugehöriger Median der absoluten Abweichung (MAD).

herangezogen. Beide sind für diese Studien in Abbildung 5.10 dargestellt. Im Bereich von 5 % bis ca. 20 % liegt nur eine geringe Sensitivität bei der Schadensbewertung vor. Eine zuverlässige Unterscheidung zwischen einem geschädigten und ungeschädigten Zustand ist nicht möglich. Eine Reduktion um mehr als ca. $1/3$ der ursprünglichen Steifigkeit kann jedoch zuverlässig gegenüber dem gesunden Zustand erkannt werden. Dies lässt sich zum einen an einem R_k -Wert von über 0,9 erkennen, aber auch an einem sehr geringen MAD von 0,04, welcher eine geringe Streuung um den Median attestiert, was positiv hervorzuheben ist.

5.4.2 Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall

Im vorangegangenen Beispiel konnte anschaulich gezeigt werden, dass mit der vorgestellten Methode selbst mit nur einem Sensorsignal eine Schadensidentifizierung durchgeführt werden kann. Stehen mehrere Sensoren zur Verfügung, können weitere Features gebildet und zur Bildung der charakteristischen multivariaten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verwendet werden. Die Bildung von multivariaten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ist in Kapitel 2.3.2 beschrieben. Bei mehr als einem Beschleunigungssensorsignal können die Eigenformen bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\bar{\mathbf{q}}$ verwendet werden. Zusätzlich zu dem bisher verwendeten Sensorsignal an der vorderen linken Position wird zusätzlich das vertikale Sensorsignal des rechten hinteren Sensors berücksichtigt. Der zugehörige zweidimensionale Eigenvektor hat die Gestalt,

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

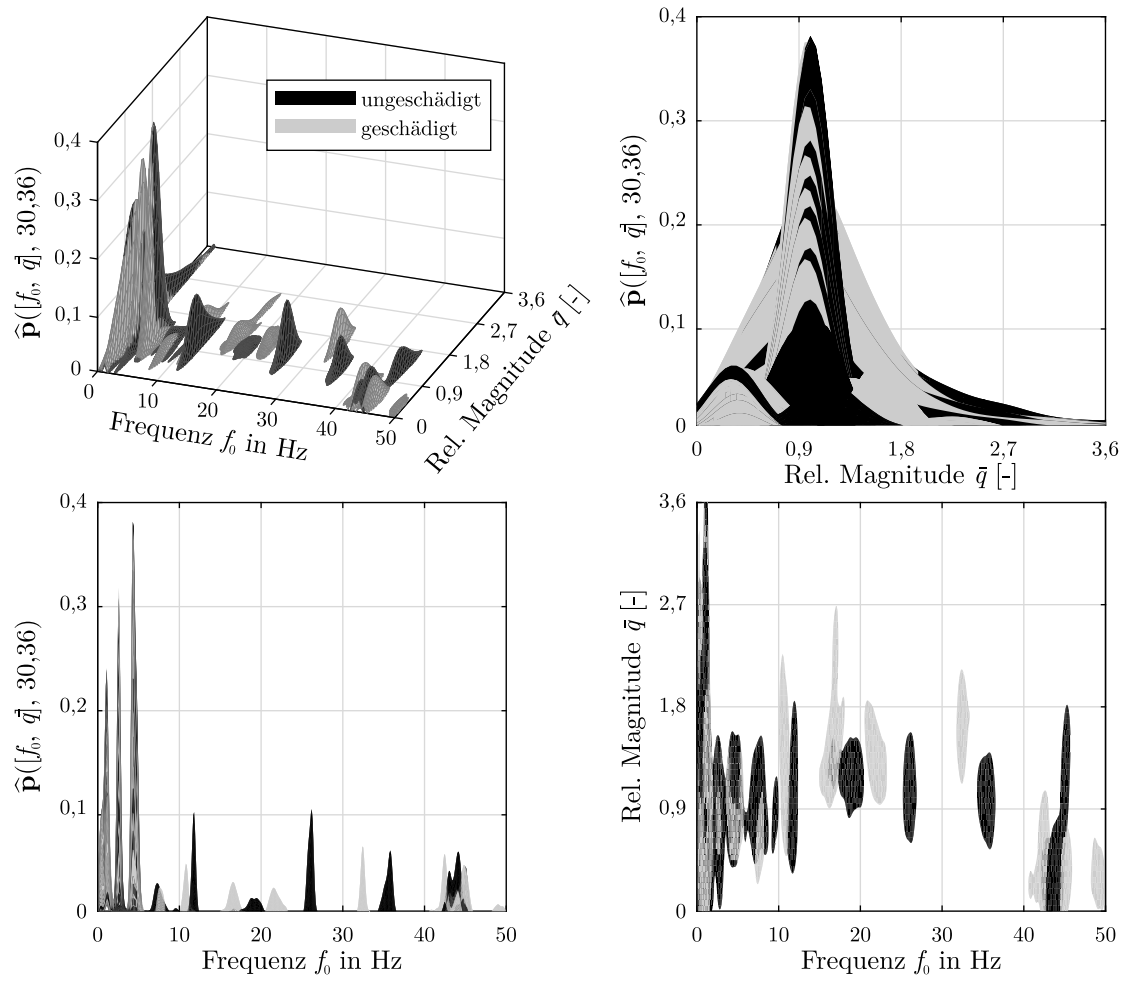


Abbildung 5.11: Multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\hat{\mathbf{p}}$ gebildet mit den Frequenzen f_0 und der relativen Magnitude $\bar{q}$ für den geschädigten und ungeschädigten Zustand. Parameter: SSI $r = 480$, $s = 480$ - Feature Selection $f_0, \bar{q}$ - Density Estimation $\mathbf{H} = 0, 2$.

Aus diesem lässt sich als zusätzliches Feature die sog. relative Magnitude nach

$$\bar{q} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} \quad (5.5)$$

berechnen. In Abbildung 5.11 ist solch eine multivariate MoDE-F für die Ordnung $p = 36$ für den geschädigten und ungeschädigten Fall dargestellt. Auch hier lässt sich eine Unterscheidung der beiden Zustände klar erkennen, mit dem Vorteil, dass beide Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit den in Kapitel 3.2 vorgestellten Health Assessment Strategien bewertet werden können.

Kapitel 6

Anwendung: Eisenbahndrehgestell auf einem Rollenprüfstand

Die in Kapitel 3 vorgestellte Methode zur Schadensdetektion wird im folgenden Kapitel an einem realen Versuchsobjekt angewendet. Ziel dabei ist es, verschiedene Schädigungsszenarien basierend auf Beschleunigungsmessdaten zu detektieren. Als Versuchsobjekt wird ein Eisenbahndrehgestell verwendet, welches auf einem Rollenprüfstand angetrieben wird. Neben der reinen Schadensdetektion gibt das Kapitel einen detaillierten Einblick in die Funktionsweise der *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F).

6.1 Versuchsumgebung

Die in Abbildung 6.1 dargestellte Versuchsumgebung besteht aus einem Drehgestell der Baureihe BR 442 - Talent 2 für Regionalzüge, welches auf einem Rollenprüfstand betrieben wird. Wie bereits in Kapitel 2.4 vorgestellt, bilden die Drehgestelle das Herzstück der Schienenfahrzeuge. Sie verbinden das spurführende Gleis mit dem lasttragenden Wagenkasten, führen das Gesamtfahrzeug im Gleis und übertragen die Lasten resultierend aus der Beladung. Sie beeinflussen in hohem Maße die Fahrdynamik des gesamten Schienenfahrzeugs und bestehen i. d. R. aus zwei Radsätzen mit dem Radradius r_W die in den Radsatzlagern geführt werden und über die Primärfederstufe mit dem Drehgestellrahmen verbunden werden. Der Drehgestellrahmen bildet die Basis für alle Anbauteile wie Antriebseinheiten, Bremsen etc. und ist das zentrale strukturmechanische Bauteil. Über die Sekundärfederstufe wird der darüber liegenden Wagenkasten mit dem Drehgestell verbunden.

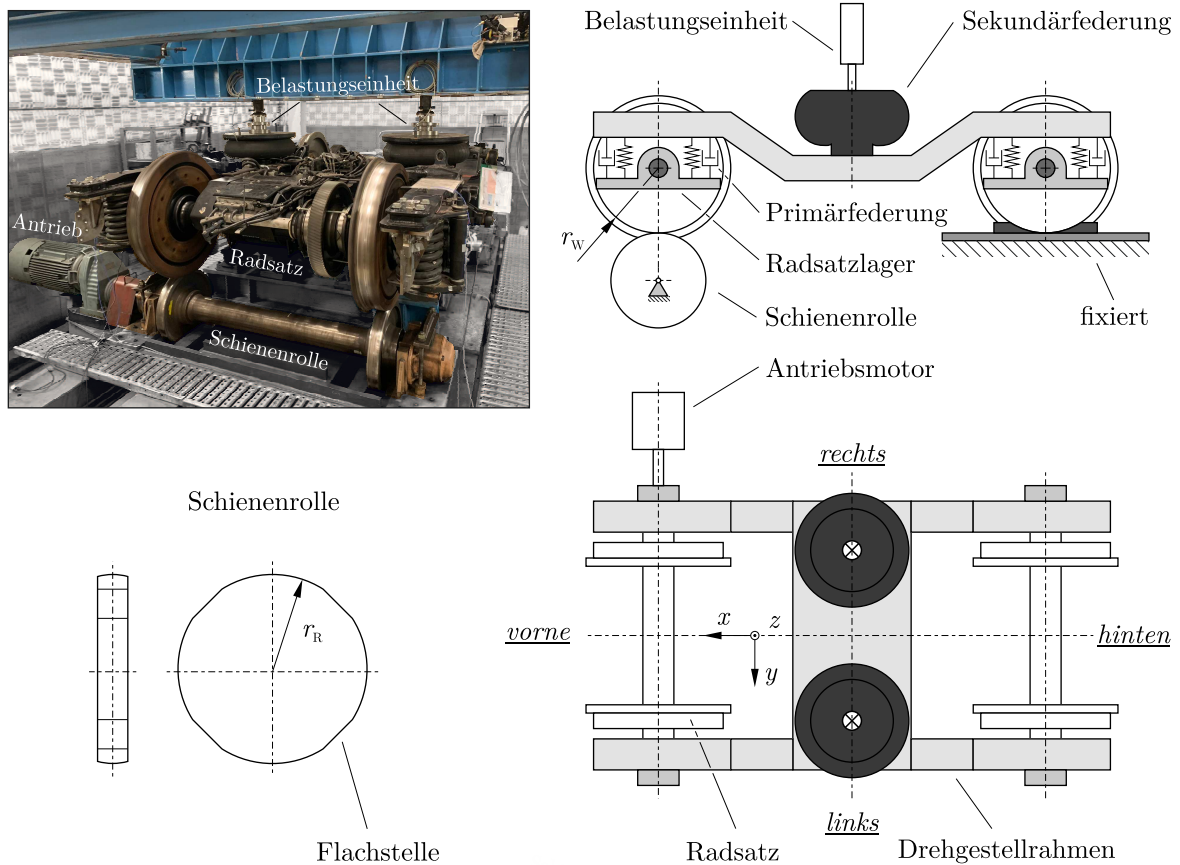


Abbildung 6.1: Versuchsumgebung auf dem Rollenprüfstand.

Das Drehgestell ist mit seinem hinteren Radsatz am Prüfstand fixiert und steht mit seinem vorderen Radsatz auf einer Schienenrolle. Das Profil der Rolle entspricht dem Schienenprofil UIC 60. Durch einen Antriebsmotor wird sie in Rotation proportional zur gewünschten äquivalenten Fahrgeschwindigkeit versetzt und bildet somit ein unendlich langes Gleis ab. Damit kann das Drehgestell bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten dynamisch angeregt werden. Hierzu sind zusätzlich vier Flachstellen symmetrisch am Umfang der Rolle mit dem Radius r_R angebracht. Flachstellen werden im realen Betrieb u.a. durch Bremsvorgänge mit blockierenden Rädern erzeugt und führen zu einer erhöhten strukturmechanischen Belastung der Drehgestellkomponenten.

Neben einer dynamischen Anregung durch die Schienenrolle bietet der Rollenprüfstand zusätzlich die Möglichkeit, geregelte Kräfte durch zwei Hydraulikzylinder auf die Sekundärfederungen aufzubringen um damit die Belastungen resultierend aus dem Wagenkasten zu simulieren.

6.1.1 Messdatenakquise

Die Messdatenakquise erfolgt mit dem mobilen Mehrkanaldatenerfassungssystem GEN7i der Firma HBM. Mit der Universal-Eingangskarte GN1640B werden 21 Messgrößen zeit-synchron mit einer Abtastfrequenz von 5 kHz gemessen, die bei der analog/digital Wandlung mit einem analog/digitalen Bessel IIR Antialiasing-Filter mit einer Tiefpassfrequenz von 500 Hz aufgenommen werden. Wie in Abbildung 6.2 dargestellt, werden die theoretische Fahrgeschwindigkeit¹ v , die aus der Antriebsdrehzahl der Schienenrolle errechnet wird, die aufgebrachten Belastungskräfte links (FL) und rechts (FR), die longitudinalen, lateralen und vertikalen Beschleunigungen an vier Positionen am Drehgestellrahmen (BFL, BFR, BRL, BRR), sowie die longitudinalen, lateralen und vertikalen Beschleunigungen am linken und rechten Radsatzlager (AFL, AFR) gemessen. Die Geschwindigkeit und die Kraftgrößen werden direkt von der Prüfstandssteuerung abgegriffen. Die Beschleunigungen am Drehgestellrahmen werden mit Sensoren vom Typ T356A16 (Sensitivität: 100 mV/g, Messbereich: ± 50 g pk), die Beschleunigungen am Achslager mit Sensoren vom Typ T356A02 (Sensitivität: 10 mV/g, Messbereich: ± 500 g pk) der Firma PCB aufgenommen.

6.2 Methodik zur Studie

Für die nachfolgenden Studien werden drei Szenarien betrachtet. Dabei wird der Fokus auf eine defekte Dämpfungsfunktion der primären Federstufe gelegt, die durch den Ausbau des jeweiligen vertikalen Dämpfers realisiert wird (vgl. Abb. 6.3). Das Szenario 1 bildet das Referenzszenario. Dies ist der gesunde Zustand, bei dem alle Dämpfungseinheiten eingebaut sind. Im Szenario 2 sind die beiden vorderen Dämpfer ausgebaut. Das Szenario 3 stellt den extremen Fall dar, bei dem alle vier Dämpfer der primären Federstufe ausgebaut sind.

6.2.1 Signalauswahl

Der Vorteil der verwendeten Methode liegt darin, dass durch die Berücksichtigung unterschiedlicher Anregungsszenarien der Einfluss des Anregungssignals bei der Systemidentifikation verringert wird. Auf dem Rollenprüfstand können durch unterschiedliche Antriebsdrehzahlen der Schienenrolle solche unterschiedlichen Anregungsszenarien in Form

¹ $v = -\omega_R r_R$; mit dem Radius r_R der Schienenrolle und der Winkelgeschwindigkeit ω_R des Antriebes.

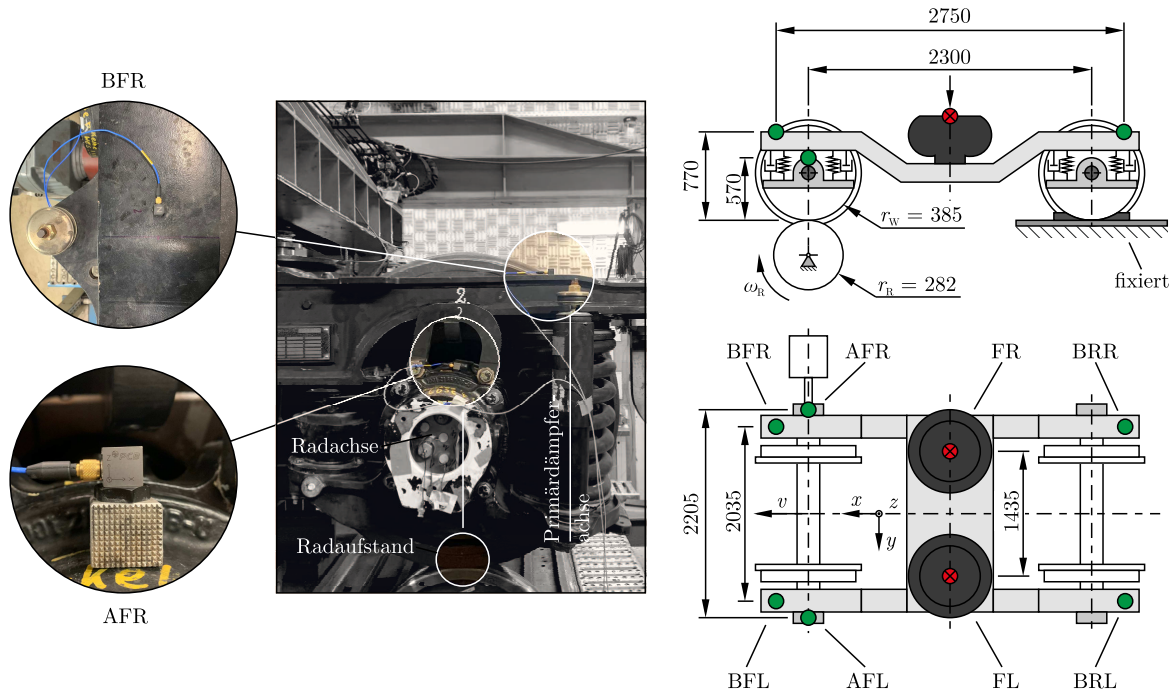


Abbildung 6.2: Sensorpositionen und -anbringung am Drehgestellrahmen und Radsatzlager. Gemessen werden Beschleunigungen (grün) in drei Raumrichtungen am Drehgestellrahmen in der Flucht zur Primärdämpferachse (BFL, BFR, BRL, BRR), Beschleunigungen (grün) in drei Raumrichtungen an den vorderen Radsatzlagern in der Flucht von Radachse und Radaufstandspunkt (AFL, AFR), die Krafteinleitung (rot) über die Sekundärfederstufe (FL, FR), sowie die Fahrgeschwindigkeit v .

unterschiedlicher Fahrgeschwindigkeiten abgebildet werden. Bei den vorliegenden Untersuchungen wird ein rampenförmiger Fahrgeschwindigkeitsverlauf (vgl. Abb. 6.4), der beginnend bei 0 km/h bis auf den die maximale Fahrgeschwindigkeit $v_{\max}$ ansteigt und von dort geregelt wieder auf 0 km/h absinkt, verwendet. Dadurch ergeben sich während einer Messfahrt unterschiedliche Anregungsbedingungen und -frequenzen von bis zu 37,63 Hz bei vier Flachstellen auf einem Schienenrollenradius von 0,282 m und einer maximalen Geschwindigkeit $v_{\max} = 60 \text{ km/h}^2$. Am eck-artigen Übergang von Kreissegment und Flachstelle wird das Drehgestell impulsartig angeregt und führt zu weiteren höherfrequenten Anteilen. Aus dieser Messfahrt lassen sich N Signalfragmente mit der Signallänge t_{sec} gem. Kapitel 3.1.1 aus den gemessenen Beschleunigungsdaten extrahieren, die dann verschiedenen Anregungsbedingungen bei einem zugehörigen Schädigungszustand reprä-

²Anregungsfrequenz f_{exc} der Schienenrolle in Abhängigkeit der Fahrgeschwindigkeit v : $f_{\text{exc}} = \frac{v}{2\pi r_R} n_F$. Mit dem Rollenradius r_R und der Anzahl der am Umfang gleichmäßig verteilten Flachstellen n_F .

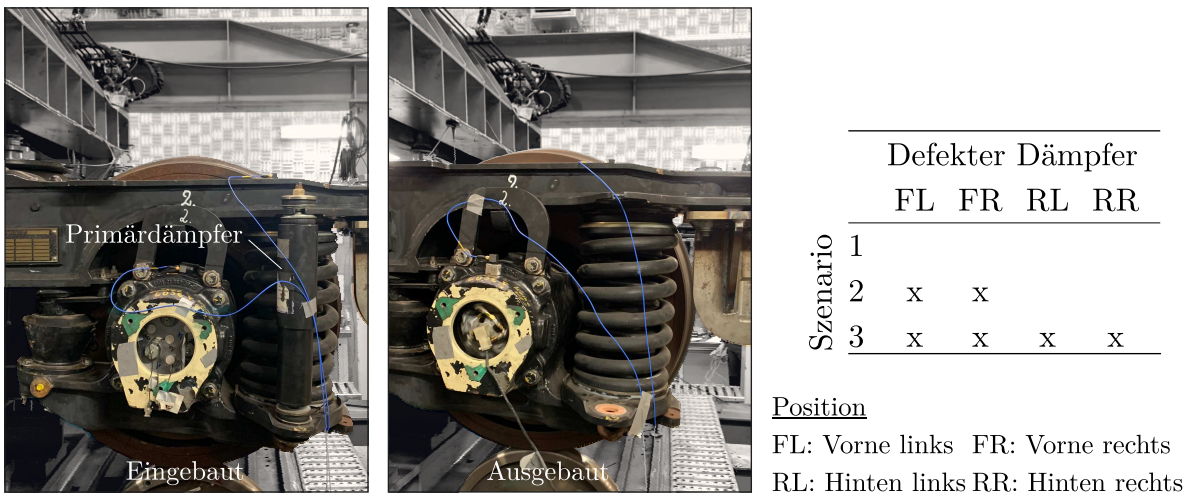


Abbildung 6.3: Realisierung verschiedener Dämpferschadensszenarien. Links: Eingebauter Primärdämpfer. Mitte: Ausgebauter Primärdämpfer. Rechts: Schadensszenarien; x kennzeichnet die Stelle des ausgebauten (defekten) Dämpfers.

sentieren. Die Startzeitpunkte der Signalfragmente werden zufällig gewählt und sind für das Szenario 1 unten in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Messfahrt ist dabei in eine Hoch- und Runterlaufphase eingeteilt, erkennbar an den nicht vorhandenen Startzeitpunkten an den Enden der Hoch- und Runterlaufphase.

Für die weitere Schadensdetektion werden die Beschleunigungsmessungen (vgl. Abb. 6.5) an den vier Positionen BFL, BFR, BRL und BRR am Drehgestellrahmen herangezogen. Da die Hauptanregungsrichtung vertikal erfolgt und eine starke longitudinale Bewegung auf Grund des fixierten hinteren Radsatzes verhindert wird, wird lediglich die vertikale z -Komponente der Beschleunigungen herangezogen. Eine spektrale Darstellung der Messsignale aus Szenario 1 mittels Kurzzeit-Fourier-Analyse als Spektrogramm in Abbildung 6.6 zeigt deutlich die dominierenden Frequenzanteile, die von der harmonischen Anregung der Schienenrolle herrühren und dem Geschwindigkeitsprofil folgen. Eine vergleichende Übersicht aller Schadensszenarien ist im Anhang in Abbildung A.1 gegeben. Auch hier sticht die Anregungsfrequenz aus der Schienenrolle stark hervor. Aufgrund des fixierten hinteren Radsatzes liegt hier das Beschleunigungsniveau leicht unterhalb des vorderen Radsatzes, welcher angeregt wird. Dieses ist zum einen in den Zeitsignalen, als auch in den Spektrogrammen zu erkennen. Zwischen den drei unterschiedlichen Szenarien ist kein evidenter Unterschied sowohl in den Zeitsignalen, als auch in den Spektrogrammen zu erkennen, welcher keine Rückschlüsse auf unterschiedliche Schädigungen ermöglicht, jedoch enthalten diese Signale unterschiedliche Anregungsszenarien, die für

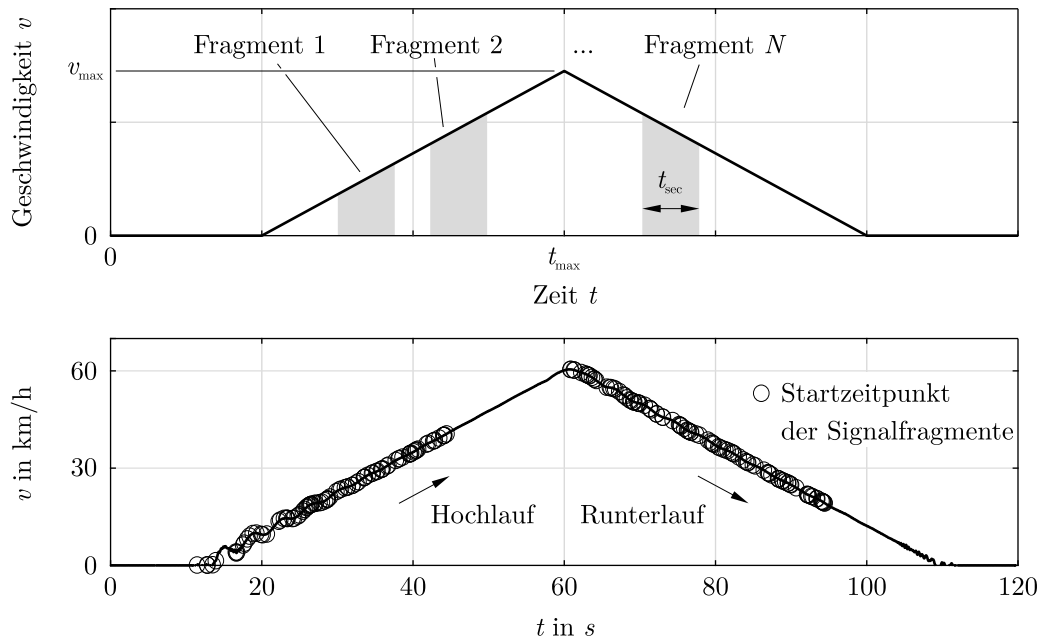


Abbildung 6.4: Oben: Prinzipdarstellung eines Geschwindigkeitsprofils einer Messfahrt auf dem Rollenprüfstand und Darstellung unterschiedlicher Zeitfragmente, bei denen unterschiedliche Anregungsbedingungen vorherrschen. Unten: Gemessenes Fahrprofil im Schadensszenario 1 mit 200 zufällig gewählten Startzeitpunkten für die einzelnen Signalfragmente mit einer Signallänge von $t_{\text{sec}} = 16$ s.

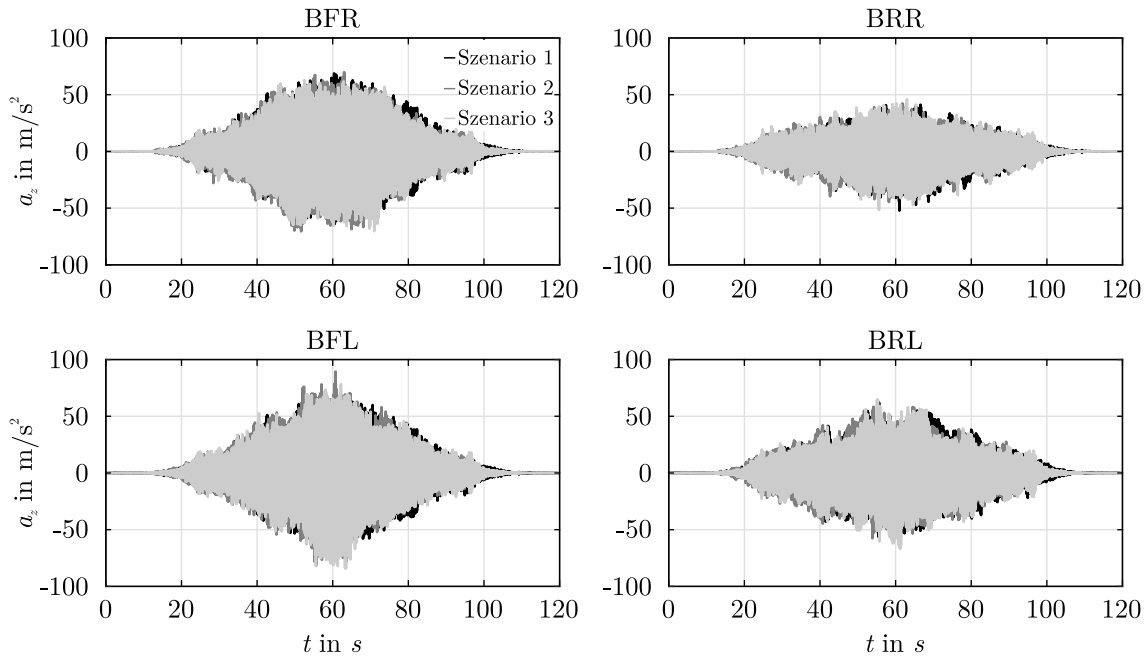


Abbildung 6.5: Gemessene Vertikalbeschleunigungen a_z am Drehgestellrahmen an den Positionen BFR, BFL, BRR und BRL für die drei unterschiedlichen Schadensszenarien.

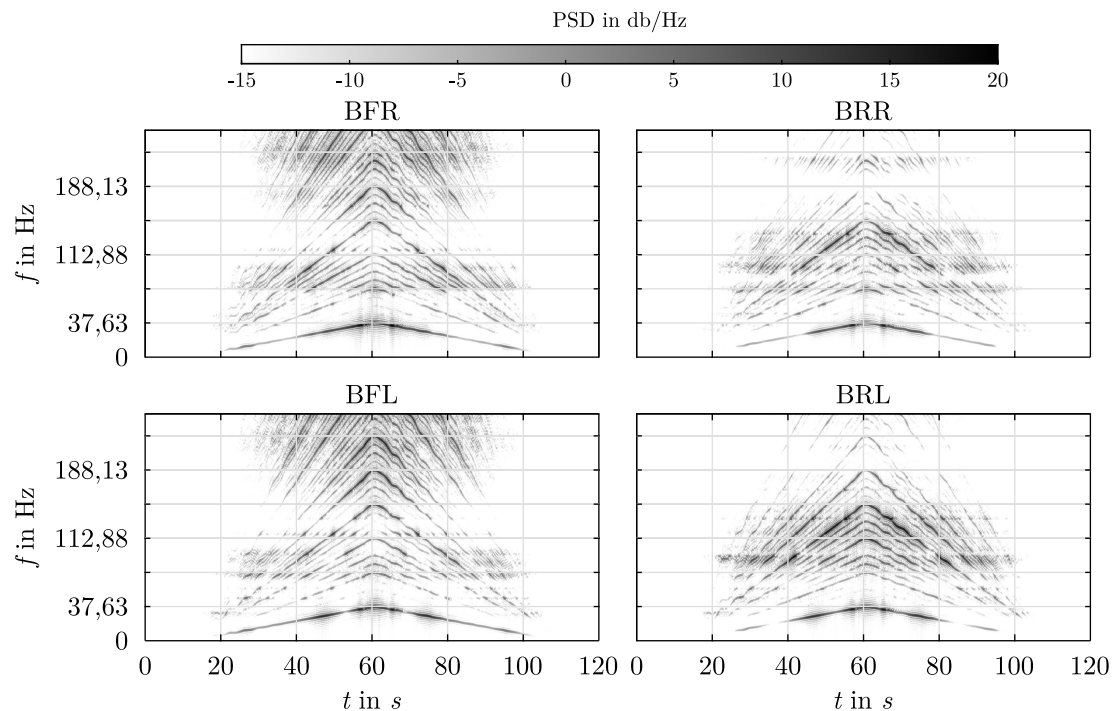


Abbildung 6.6: Spektrogramme der gemessenen Beschleunigungssignale für das Szenario 1 (ungeschädigt). Ausgewertet mit einem Rechteckfenster mit einer Signallänge von 0,5 s und 50 % Überlappung.

die vorgeschlagene Methode genutzt werden.

Für die weiteren Untersuchungen werden pro Szenario jeweils 200 zufällige Signalabschnitte erzeugt, die für die weiteren Untersuchungen als Signal-Sets verwendet werden.

6.2.2 Erzeugen der MoDE-F

Zur Erzeugung der charakterisierenden *Modal Parameter Density Estimation Function* wird der Zusammenhang Gl. (3.7) aus der in Kapitel 3 vorgestellte Methode verwendet. Da hier als Feature die Eigenfrequenz f_0 verwendet wird, wird diese charakterisierende Funktion im Folgenden als Eigenfrequenzdichtefunktion bezeichnet und ist exemplarisch für die drei Szenarien in Abbildung 6.7 oben dargestellt. Verwendet werden $N = 50$ zufällig ausgewählte Signalfragmente aus dem im vorherigen Kapitel erstellten Signal Set. Allen drei Szenarien zeigen eine individuelle ausgeprägte Charakteristik bei den Frequenzen 25,79 Hz (Szenario 2), 35,25 Hz (Szenario 1) und 70,86 Hz (Szenario 3). Ebenso ist zu erkennen, dass die jeweiligen Eigenfrequenzdichtefunktionen die Informationen aus unterschiedlichen Ordnungen p aus der Systemidentifikation enthalten, bevor die adaptive Ordnungsanpassung die Bestimmung automatisch beendet. Als Toleranzgrenze ϵ für die

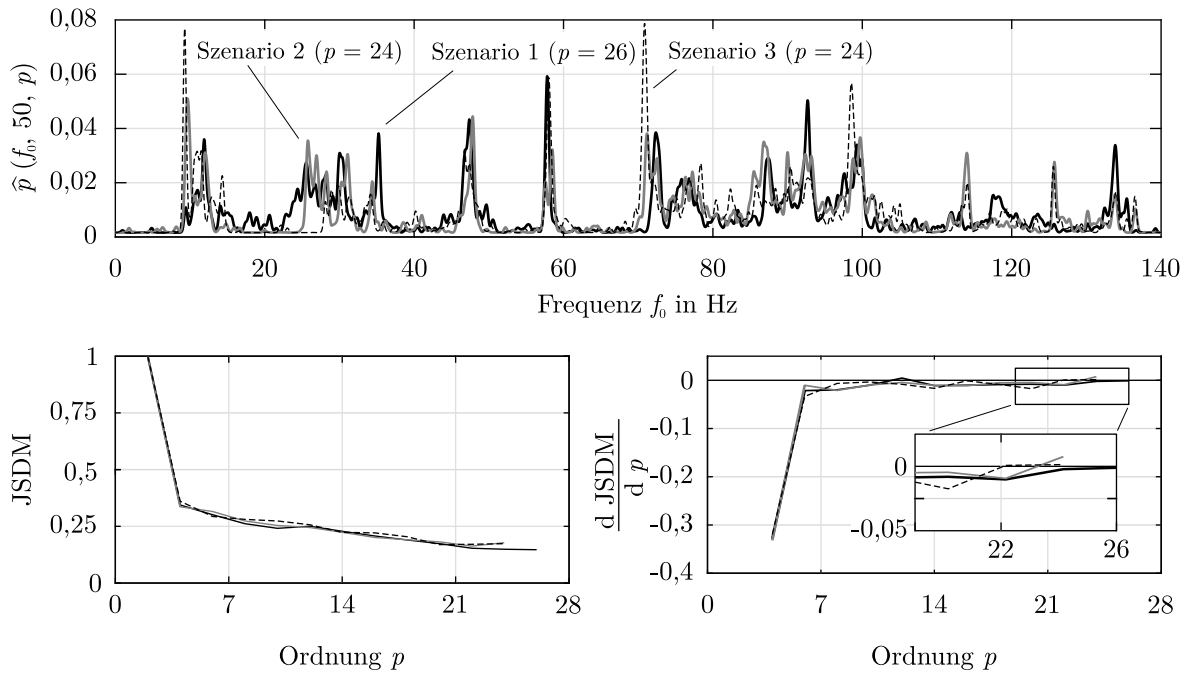


Abbildung 6.7: Charakteristische *Modal Parameter Density Estimation Functions* $\hat{p}(f_0, N, p)$ (oben) für die drei Schadensszenarien mit $N = 50$ zufällig gewählten Signalfragmenten mit der Länge $t_{\text{sec}} = 16$ sec. Entwicklung der JSDM (unten links) und der Änderungsrate $\frac{dJSDM}{dp}$ (unten rechts) bei der Bildung von $\hat{p}$. Parameter: SSI $r = 1250$, $s = 1250$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$, $\epsilon = 0,0021$.

Änderungsrate der JSDM wird ein Wert 0,0021 verwendet. Im unteren Teil der Abbildung 6.7 sind die JSDM und die Änderungsrate $\frac{dJSDM}{dp}$ dargestellt und zeigt den bereits in Kapitel 3 eingeführten Begriff der *information monotonicity*. Mit zunehmender Ordnung p steigt zu Beginn der Informationsgehalt stetig, was sich in einer stark sinkenden JSDM bemerkbar macht. Bei höheren Ordnungen p stagniert jedoch der Informationsgehalt obwohl durch zusätzliche höhere Ordnungen vermeintlich mehr Systemwissen hinzu kommen sollte. Das Ergebnis hier zeigt deutlich die Wirkungsweise des in Kapitel 3 vorgeschlagene Verfahrens zur adaptiven Ordnungsanpassung.

6.3 Einflussanalyse

In den folgenden Unterkapiteln wird ein detaillierter Einblick in die Funktionsweise der MoDE-F gegeben. Ziel ist es, vor allem die Einflüsse der vom Anwender zu definierenden Eingangsparameter auf die Bestimmung der MoDE-F sichtbar und erklärbar zu machen. Dies sind vor allem die Anzahl der Anregungsbedingungen N und die Wahl der Toleranz-

klasse ε auf die Abbruch-Ordnung p bei der adaptiven Ordnungsanpassung.

6.3.1 Einfluss der Anzahl der Anregungsbedingungen N

Der vorherige Abschnitt zeigt, dass bei der Anwendung der adaptiven Ordnungsanpassung die Berechnung der *Stochastic Subspace Identification* bei einer Ordnung $p = 24$, bzw. $p = 26$ abgebrochen werden kann. In diesem Abschnitt soll der Einfluss der Anzahl der Anregungsbedingungen bzw. Signalfragmente N untersucht werden; vor allem der Einfluss auf die Abbruchordnung p , sowie die beim Abbruch erreichte JSMD. Die Abbruchordnung kennzeichnet diejenige Ordnung, die zum Erreichen der Toleranz ε für die Systemidentifikation benötigt wurde.

Aus den 200 Signalfragmenten werden für diese Untersuchung jeweils 5000 unterschiedliche Signalvariationen mit N Signalfragmenten verwendet, wobei jedes Signalfragment in der Signalvariation nur einmal vorkommt. Lediglich bei kleinen $N = 1 \dots 2$ wird eine kleinere Anzahl an Signalvariationen verwendet. Bei $N = 1$ stehen lediglich 200 Signalvariationen zu Verfügung. Bei $N = 2$ werden 4700 Variationen verwendet. Es wird eine Toleranz $\varepsilon = 0,0021$ verwendet. Damit lässt sich der Einfluss der unterschiedlichen Anzahl an Anregungsbedingungen auf die Ordnung p und die JSMD statistisch auswerten und eine allgemeine Aussage über das Verhalten der vorgestellten Methode treffen.

In Abbildung 6.8 wird zur Darstellung der Ergebnisse aus den 5000 Signalvariationen der Median als Lagemaß und Bestimmung der zentralen Tendenz, sowie der Median der absoluten Abweichung (MAD) als zugehöriges Streuungsmaß für die Abbruchordnung p dargestellt. Vorteil von Median und MAD gegenüber dem vielfach verwendeten Mittelwert und der Standardabweichung ist die Robustheit gegenüber extrem abweichenden Werten (Ausreißern). Deutlich zu sehen ist eine anfängliche Abnahme der Abbruchordnung p bei steigender Anzahl N der Signalfragmente. Gleichzeitig sinkt stark der MAD und bildet ein nahezu konstantes Niveau aus, bis zu dem Punkt, wo die Abbruchordnung ein konstantes Niveau ausbildet und der MAD gegen Null absinkt. In dem aktuellen Beispiel lässt sich dies bei ca. $N = 50$ beobachten. Das Streumaß bleibt dann vergleichsweise konstant auf einem Niveau zwischen 0 und 2. Daraus lässt sich ableiten, dass für die adaptive Ordnungsanpassung eine gewisse Anzahl an Signalfragmenten notwendig ist. Signalfragmente stellen hier unterschiedliche Anregungsszenarien dar. Somit kann auch gezeigt werden, dass durch Hinzunahme von unterschiedlichsten Anregungsszenarien, die einzeln nicht die Annahme des weißen Rauschens erfüllen, in der Summe jedoch die Annahme des weißen Rauschens gut abgebildet werden kann und somit ein stabiles Identifikationsergebnis er-

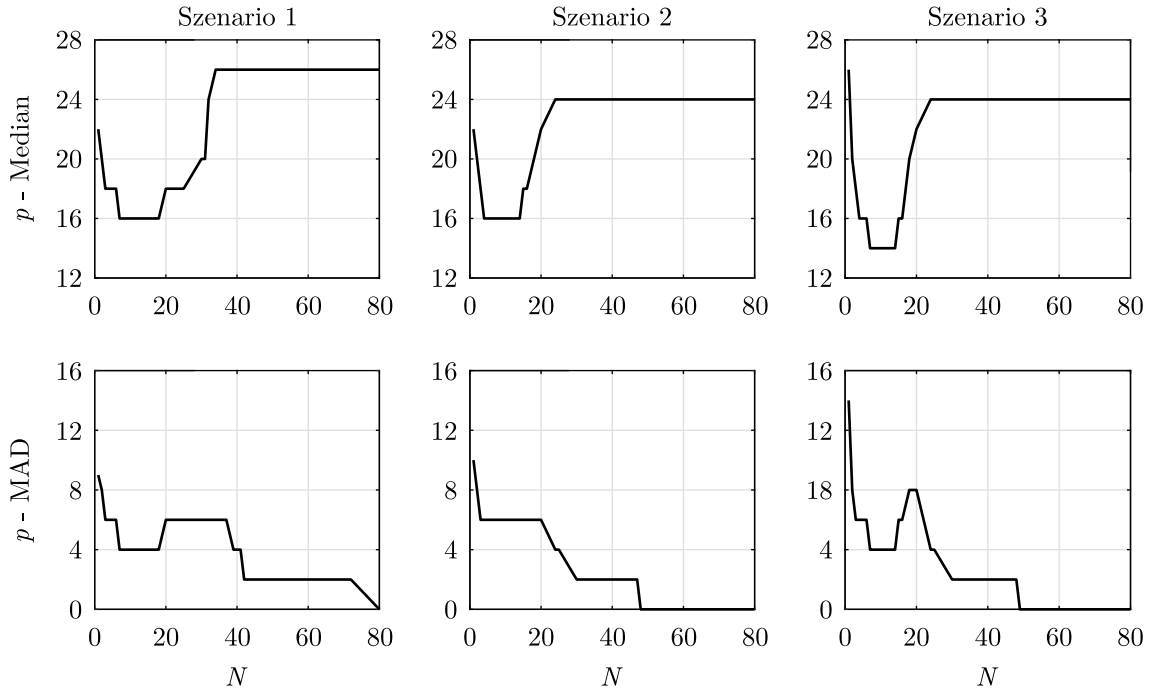


Abbildung 6.8: Abhängigkeit der Abbruchordnung p von der Anzahl N unterschiedlicher Anregungsbedingungen für die drei Schadensszenarien. Oben: Median. Unten: MAD. Parameter: SSI $r = 1250$, $s = 1250$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$, $\epsilon = 0,0021$. Für jedes $N \geq 3$ wurden 5000 unterschiedliche Signalvariationen verwendet. Für $N = 1$ wurden 200 und für $N = 2$ wurden 4700 Signalvariationen verwendet.

reicht wird. Ebenso kann gezeigt werden, dass numerisch verursachte Fehler bei der SSI und die Verletzung der Annahme von weißem Rauschen gerade bei einer kleinen Anzahl an Signalfragmenten das Ergebnis beeinflussen, erkennbar durch ein hohes Streumaß in diesem Anfangsbereich.

In Abbildung 6.9 sind die jeweiligen Median-Werte und MAD der JSMD in Abhängigkeit der Anzahl der Signalfragmente N für die o.g. Studie dargestellt. Der Median zeigt für alle drei Schadensszenarien einen monoton-fallenden Verlauf, dessen Änderungsrate mit zunehmenden N abnimmt. Daraus lässt sich ableiten, dass ab einer bestimmten Anzahl N der Zugewinn an Informationsgehalt nicht mehr stark zunimmt. In der Systemidentifikation dominieren die physikalischen Eigenschaften des mechanischen Systems. Ungenauigkeiten bei der Systemidentifikation, die aus numerischen Fehlern oder Verletzung der Annahme von weißem Rauschen herrühren, spielen nur noch eine untergeordnete Rolle. Dies ist auch am Streumaß MAD zu erkennen, dessen Abfall zu dem Zeitpunkt korreliert, wo die Abbruchordnung p den schlussendlichen konstanten Wert annimmt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass numerische Fehler und Verletzung der

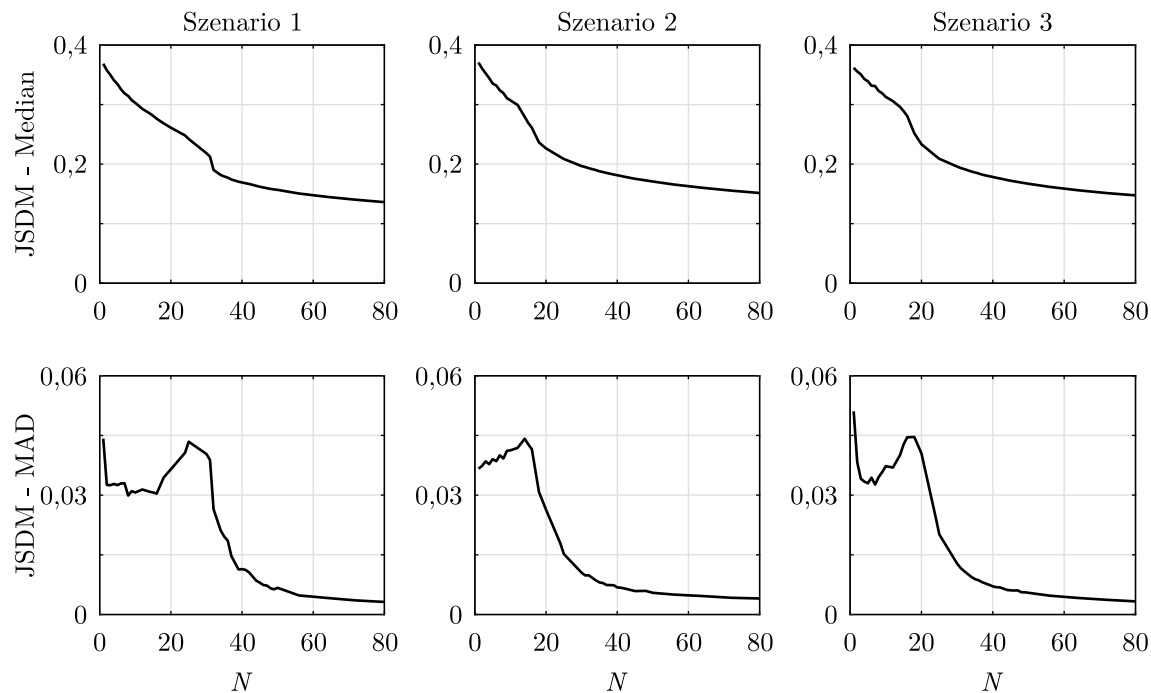


Abbildung 6.9: Abhängigkeit der Abbruch-JSDM von der Anzahl N unterschiedlicher Anregungsbedingungen für die drei Schadensszenarien. Oben: Median. Unten: MAD. Parameter: SSI $r = 1250$, $s = 1250$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$, $\epsilon = 0,0021$. Für jedes $N \geq 3$ wurden 5000 unterschiedliche Signalvariationen verwendet. Für $N = 1$ wurden 200 und für $N = 2$ wurden 4700 Signalvariationen verwendet.

Annahme von weißem Rauschen bei der Systemidentifikation durch unterschiedliche Anregungsbedingungen N kompensiert werden können. Die physikalischen Informationen des zugrundeliegenden mechanischen Systems, die in allen Signalfragmenten enthalten sind, dominieren bei einer ausreichenden Anzahl N das Identifikationsergebnis. Demnach sollte die Anzahl N nicht zu klein gewählt werden. Als Beurteilungskriterium kann hier der MAD der JSDM herangezogen werden, ab dem sich ein nahezu flacher Verlauf einstellt. Die Bereits in Kapitel 3.1.4 festgestellte $1/N$ Proportionalität von JSDM kann auch im realen Experiment beobachtet werden. Des Weiteren kann hervorgehoben werden, dass für die Systemidentifikation lediglich eine bestimmte Ordnung p , die sich durch die adaptive Ordnungsanpassung automatisch einstellt, notwendig ist und ab einem bestimmten N konstant wird.

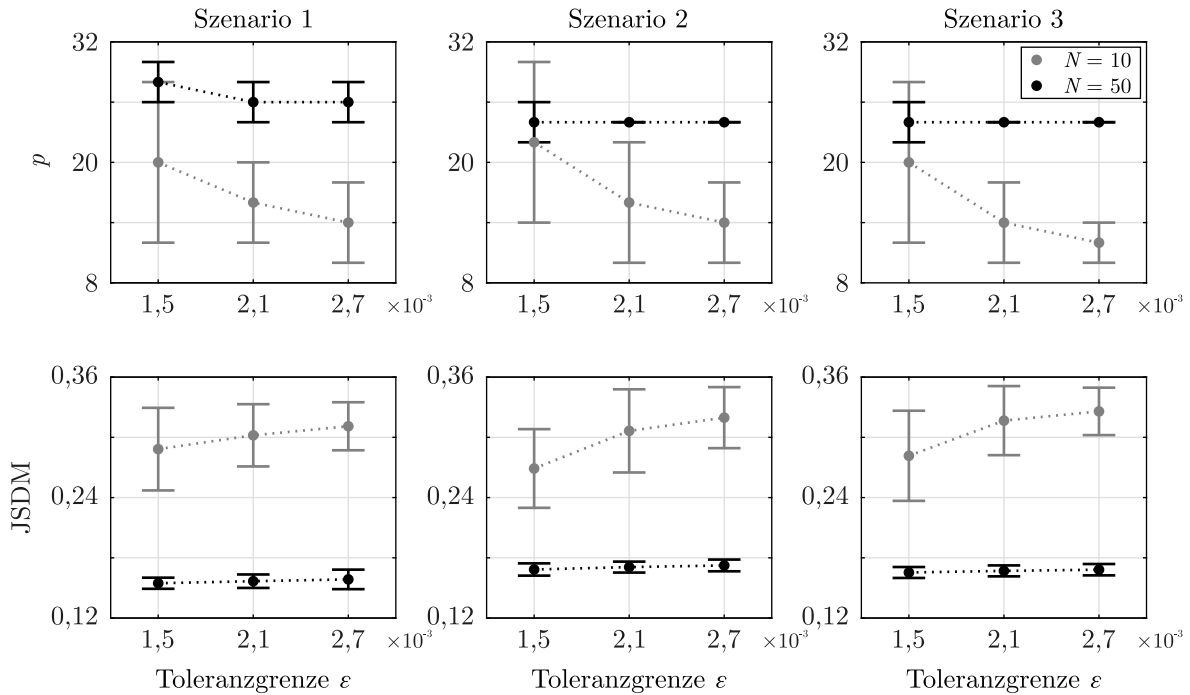


Abbildung 6.10: Einfluss der Toleranzgrenze ε auf die Abbruchordnung p (oben) und die Abbruch-JSDM (unten). Dargestellt ist der Median und der MAD für $N = 10$ und $N = 50$ mit jeweils 5000 Signalvariationen und Signalfragmenten je Schädigungsszenario. Parameter: SSI $r = 1250$, $s = 1250$ - Feature Selection f_0 - Density Estimation $h = 0,2$.

6.3.2 Einfluss der Toleranzklasse ε auf die Abbruch-Ordnung p

Wie der vorherige Abschnitt zeigt, ist die Anzahl N der Signalfragmente entscheidend, ab wann alle notwendigen Systeminformationen vorhanden sind. Dabei wurde die Toleranzgrenze ε konstant bei 0,0021 gehalten. Im folgenden Abschnitt wird die Toleranzgrenze um ca. $\pm 30\%$ auf 0,0015 bzw. 0,0027 variiert um den Einfluss auf die Abbruchordnung zu beleuchten. Die Ergebnisse hierzu sind in Abbildung 6.10 für die zwei Fälle $N = 10$ und $N = 50$ dargestellt. Der Fall $N = 50$ repräsentiert den Zustand, wenn genügend Signalfragmente vorhanden sind. Der Fall $N = 10$ steht stellvertretend für den Zustand nach der Initialisierungsphase. Dargestellt sind der Median und der zugehörige MAD.

Im direkten Vergleich zwischen $N = 10$ und $N = 50$ fällt auf, dass der Median bei $N = 50$ sowohl für die Abbruchordnung p , als auch für die Abbruch-JSDM bei vergleichsweise geringem Streumaß (MAD) ein nahezu konstantes Verhalten aufweist. Der Einfluss der Toleranzgrenze ε ist bei $N = 50$ nicht so stark ausgeprägt. Dieses Verhalten deckt sich mit den Erkenntnissen aus dem vorherigen Abschnitt, in dem gezeigt werden konnte, dass ab großen N 's ein stabiles Identifikationsergebnis erreicht werden kann. Das

Streumaß und das nicht konstante Verhalten des Lagemaßes bei $N = 10$ bringen eine sichtbare Unsicherheit des Systemidentifikationsergebnisses zum Ausdruck, welche auch in Abbildungen 6.8 und 6.9 im Anfangsbereich zwischen $p = 2$ und $p = 40$ gezeigt wird.

Die in Kapitel 3.1.4 eingeführte und in Abbildung 3.11 dargestellte Toleranzschwelle ε gibt den Punkt an, ab dem eine gewisse Änderungsrate der JSDM in Abhängigkeit der Ordnung p erreicht wird. Wie Abbildung 3.11 zeigt, ändert sich der Informationsgewinn, ausgedrückt durch eine sich stark ändernde JSDM, bei kleinen Ordnungen p stark. Es liegt zu Anfang ein hoher Erkenntnisgewinn vor. Durch ständiges Hinzufügen weiterer Ordnungen p (vgl. Gl. (3.12)) nimmt die Änderungsrate auf Grund der Informations-Monotonie stetig ab. Demnach führen große Toleranzschwellen ε (hier: 0,0027) zu einem früheren Abbruch bei der Bildung der MoDE-F $\hat{p}(f, N, p)$, was direkt einhergeht mit einer kleiner Abbruchordnung p . Genau dieses Verhalten wird in Abbildung 6.10 bei allen drei Szenarien sichtbar. Besonders anschaulich beim Fall $N = 10$. Kleine Toleranzschwellen führen zu einer strengeren Bewertung und späterem Abbruch bei der Bildung der MoDE-F, was sich durch eine höhere Abbruchordnung p und ein größeres Streumaß bemerkbar macht. Große Toleranzschwellen führen zu einer weichen Bewertung mit einem frühen Abbruch bei einer kleineren Abbruchordnung p und geringerem Streumaß.

Ebenso führt eine strengere Toleranzgrenze bei der Abbruch-JSDM zu einer erhöhten Streuung im Gegensatz zu einer weichen Toleranzschwelle bei gleichzeitiger Reduktion der JSDM. Durch die Zunahme höherer Ordnungen p bei kleinen Toleranzschwellen erhöht sich jedoch der Informationsgehalt und führt hier zu einer Reduktion der Abbruch-JSDM.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Wahl der Toleranzschwelle die Bildung der MoDE-F beeinflusst. Jedoch hängt die Stärke des Einflusses maßgeblich von der Anzahl N der gewählten Signalfragmente ab. Ab einer ausreichend großen Anzahl N ist der Einfluss der Toleranzschwelle als gering einzustufen.

6.4 Health Assessment eines Eisenbahndrehgestells

In den vorangegangenen Abschnitten konnte gezeigt werden, wie aus den Messdaten individuelle Eigenfrequenzdichtfunktionen – *Modal Parameter Density Estimation Functions* – für die unterschiedlichen Szenarien gebildet werden können. Im folgenden Abschnitt wird dargestellt, wie sich mit Hilfe der Klassifikationsregel (3.13) eine Unterscheidung zwischen den drei Schadensszenarien ermöglichen lässt. Die vorgeschlagenen Health Assessmentstrategie wird für das SHM-System im Hinblick auf seine Leistungsfähigkeit un-

tersucht. Hierzu wird die JSMD zum direkten Vergleich zwischen den Eigenfrequenzdichtefunktionen der verschiedenen Szenarien verwendet. Zur Bewertung wird anschließend der Matthews Korrelationskoeffizient nach Gleichung (3.16) herangezogen. Hierzu werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: Klassifikation mit 2 Szenarien (Szenario 1 und 3)
2. Fall: Klassifikation mit 3 Szenarien (Szenario 1,2 und 3)

Im ersten Schritt werden Trainings- und Test-PDFs aus dem vorhandenen Signalset mit 200 Signalfragmenten generiert. Im zweiten Schritt wird die Klassifikation durchgeführt und der Matthews Korrelationskoeffizient berechnet. Um die Leistungsfähigkeit des SHM-Systems zu zeigen, wird diese Prozedur 100 Mal mit jeweils zufällig gewählten Signalfragmenten durchgeführt und anschließend bewertet. Hierzu werden der Median und der MAD des Matthews Korrelationskoeffizienten R_k herangezogen.

Schritt 1: Bildung der Trainings und Test PDFs

Wie in Abbildung 6.11 aufgezeigt, wird für jedes Szenario aus dem Signalset mit 200 zufälligen Signalabschnitten im ersten Schritt eine sog. Trainings- oder Referenz PDF mit m Signalfragmenten (unterschiedliche Anregungsbedingungen) erstellt. Jedes Signalfragment kommt hier nur einmal vor. Diese PDFs stellen die Wissens DB dar. Im nächsten Schritt werden die für die Klassifizierung benötigten Test- bzw. Betriebs PDFs ermittelt. Hierzu werden n zufällige Signalfragmente (unterschiedliche Anregungsbedingungen) aus dem Signalset herangezogen und β_k Test PDFs generiert. β_k ist die Anzahl der Test-PDF für jede Klasse (Szenario) k . Wenn β_k für alle Klassen gleich ist ($\beta_k = \beta$), werden diese als ausgeglichene Testdaten bezeichnet. Wenn β_k jedoch unterschiedlich für die k Klasse ist, handelt es sich um unausgeglichene Testdaten. In jeder Test PDF kommt ein Signalfragment nur einmal vor. Alle Signalfragmente können in den β_k Test-PDF verwendet werden. Damit stehen k Trainings PDFs und $\sum_{i=1}^k \beta_i$ Test PDFs zu Verfügung. In dieser Studie werden für jedes Szenario 50 Test PDFs verwendet.

Die unterschiedliche Anzahl an Signalfragmenten m und n ist dem Sachverhalt geschuldet, dass in der Regel für die Trainingsdaten in einem SHM-System bereits eine große Anzahl an unterschiedlichen Anregungsszenarien vorhanden ist, wohingegen die aktuellen Betriebsdaten i.d.R. nur wenige, auch unterschiedliche Anregungsszenarien beinhalten. Mit der hier gewählten Unterscheidung verschiedener Signalsets lässt sich u.a. der Einfluss eines Ungleichgewichts zwischen unterschiedlichen N 's untersuchen. Das Verhältnis

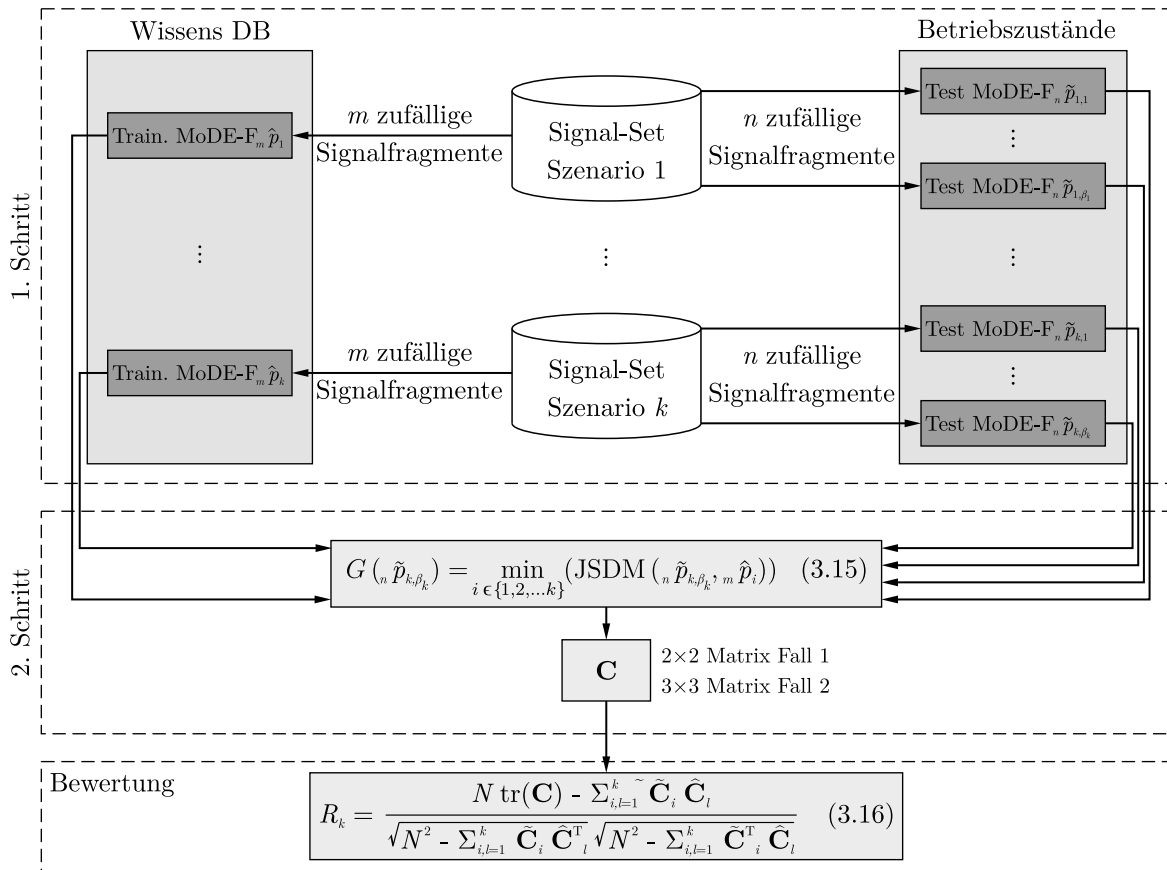


Abbildung 6.11: Systematik zur Generierung der Trainings- und Test MoDE-F's basierend auf den Signalfragmenten aus unterschiedlichen Szenarien. Mit k : Gesamtanzahl der Szenarien, $\hat{p}$: Trainings MoDE-F, m : Anzahl der Signalfragmente beim Training, $\tilde{p}$: Test MoDE-F, n Anzahl der Signalfragmente beim Testen, β_k : Anzahl der Test MoDE-F's.

von $\frac{n}{m}$ wird mit x bezeichnet und bietet die Möglichkeit unterschiedliche Varianten einfach mit einander zu vergleichen.

Schritt 2: Klassifikation und Bildung der Konfusionsmatrix $\mathbf{C}$

Wie bereits in Abbildung 6.7 dargestellt, weist jedes Szenario eine charakteristische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf. Ziel des SHM-Systems ist es, automatisch einen aktuellen Betriebszustand einem bereits bekannten Zustand zuzuweisen um im Anschluss den Gesamtzustand der Struktur zu bewerten. Durch das gewählte rampenförmige Geschwindigkeitsprofil sind die erzeugten PDF geschwindigkeitsunabhängig und stellen damit eine reales Anregungsszenario dar. Ebenso werden Hochlauf- und Runterlauf-Phase nicht unterschieden, d.h. Daten aus Beschleunigungs- und Bremszustand können in gleichem Maße verwendet werden.

Fall 1 : Wahre Klasse - $R_k = 0,98$		Fall 2 : Wahre Klasse - $R_k = 0,96$		
Szenario 1	Szenario 3	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3
49	0	49	0	0
1	50	1	48	1
		0	2	49

Tabelle 6.1: Exemplarische Konfusionsmatrix $\mathbf{C}$ und Matthews Korrelationskoeffizient R_k eines Durchlaufes für $m = 50$ Anregungsbedingungen in der Trainingsphase und $n = 20$ Anregungsbedingungen in der Testphase für Fall 1 (links) und Fall 2 (rechts); mit jeweils 50 Test PDFs pro Szenario.

Die Betriebs PDF werden, wie in Abbildung 6.11 dargestellt, mit Hilfe der Klassifikationsregel (3.13) einer der in der Wissens DB bereits vorhandenen Trainings PDF zu geordnet. Dazu wird die JSMD verwendet. Das Ergebnis der Zuordnung wird in der Konfusionsmatrix $\mathbf{C}$ (vgl. auch Tabelle 3.1) festgehalten und bildet die Basis für die Bewertung der Klassifikation. Im Fall 1 entspricht $\mathbf{C}$ einer 2×2 Matrix, im Fall 2 einer 3×3 Matrix, die beispielhaft in Tabelle 6.1 dargestellt sind.

Bewertung

In Abbildung 6.12 ist das Ergebnis dieser Studie dargestellt, welches durchaus positiv zu bewerten ist. Hervorstechen die Ergebnisse mit $m = 80$ Anregungsszenarien der Trainings-PDF. Bereits ab bei kleinen Verhältnissen von $\frac{n}{m} \geq 0,2$ erreicht der Median von R_k einen konstanten Wert von 1. Dieser gibt eine hundertprozentig richtige Klassifizierung an, sowohl im Fall 1 mit zwei Klassen, als auch im Fall 2 mit drei Klassen. Jeder Betriebs PDF wurde die richtig Trainings-PDF zugeordnet; der richtige Zustand des Systems wurde zuverlässig ermittelt. Und dies bei einem MAD von 0. D.h. mit einer geringen Streubreite und unterstreicht die Zuverlässigkeit der Klassifikation. Im direkten Vergleich zwischen Fall 1 und Fall 2 wird deutlich, dass die binäre Klassifikation (Fall 1) etwas schneller das perfekte Klassifikationsergebnis erreicht; sichtbar a) durch die höhere Steigung zu Beginn und b) der schneller absinkende MAD. Dieses Verhalten ist durchaus nachvollziehbar. Im Fall 1 wurden zwei extreme Szenarien mit einander verglichen. Zum einen der intakte Fall mit Szenario 1 und zum anderen der total geschädigte Fall 3, Szenario 3, mit allen vier

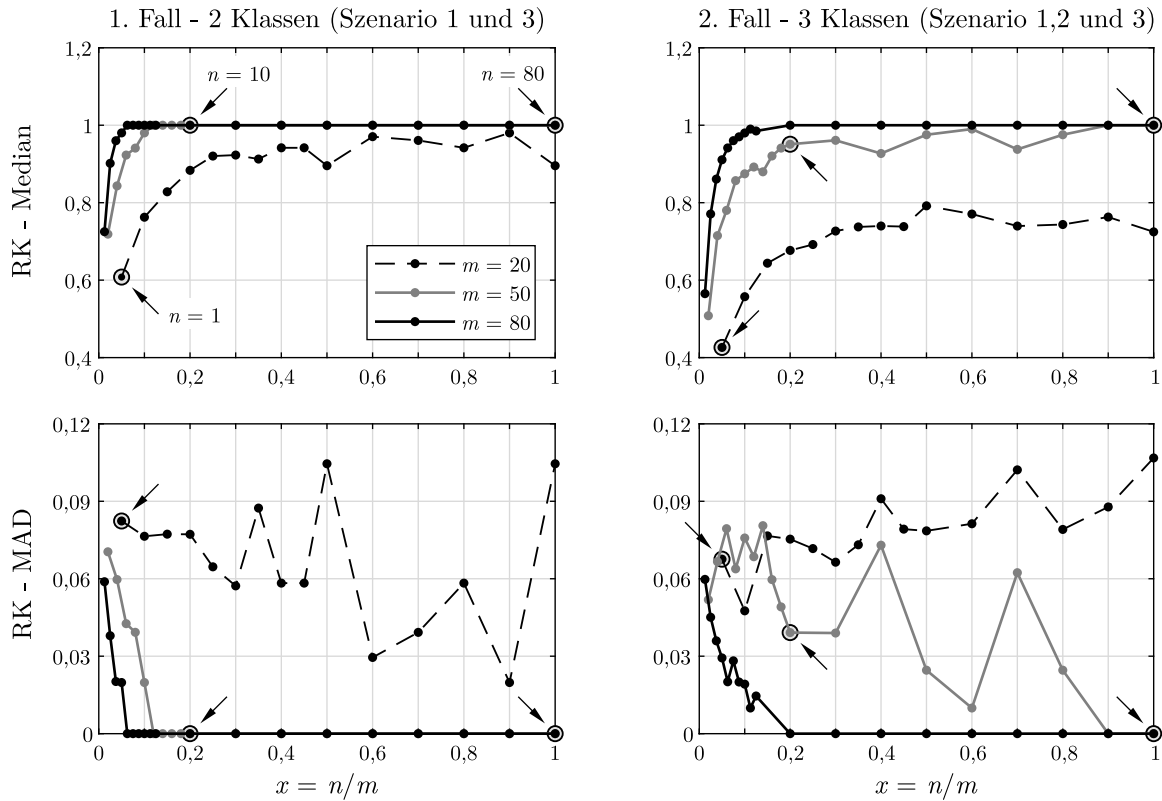


Abbildung 6.12: Bewertung des Klassifikationsergebnisses anhand des Median (oben) und des MAD (unten) für Fall 2 (links) und Fall 2 (rechts). Dargestellt ist der Matthews Korrelationskoeffizient R_k von je 100 Wiederholungen bei unterschiedlichen Verhältnissen von n zu m . Die Pfeile kennzeichnen die Beispiele zu Abbildung 6.13.

ausgebauten Dämpfern. Bei einem Verhältnis von $x = 0,2$ sind in dieser Studie lediglich $n = 8$ Anregungsszenarien notwendig, um ein gutes Klassifikationsergebnis zu erhalten.

Das oben beschriebene Verhalten für $m = 80$ lässt sich prinzipiell auch auf die Variationen mit $m = 50$ und $m = 20$ übertragen. Das Ergebnis im Fall 1 ist besser, als das des Falls 2. Zu Beginn steigt der Median von R_k schnell an und erreicht dann ein konstantes Niveau. Dieses unterscheidet sich jedoch bei den unterschiedlichen Varianten von $m = 20$ bis $m = 80$. Die Variante mit $m = 20$ Anregungsszenarien schneidet dabei am schlechtesten ab und erreicht R_k -Werte von um die 0,8. Das entspricht einer guten Klassifizierung, jedoch wird durch die Auswertung des MAD eine deutliche Streuung sichtbar, die bei SHM-Systemen unerwünscht ist. Die Variante $m = 50$ ordnet sich zwischen den beiden vorgenannten ein.

In Abbildung 6.13 sind exemplarisch die zugrundeliegenden Histogramme für ausgewählte Klassifikationsergebnisse für Fall 1 und Fall 2 dargestellt. Eine erweiterte Übersicht ist in den Abbildungen A.2 und A.3 im Anhang enthalten. Ausgewählt wurden die cha-

Charakteristischen Punkte (vgl. Pfeilmarkierung in Abbildung 6.12) mit dem schlechtesten Klassifikationsergebnis bei $m = 20$ und $x = 0,05$ mit einem hohen MAD, dem besten Klassifikationsergebnis bei $m = 80$ und $x = 1$ und $\text{MAD} = 0$ und einem Zwischenzustand bei $x = 0,2$ für $m = 50$. Deutlich zu erkennen ist, wie sich die Verteilung anfänglich von einer Normalverteilung mit steigendem x hin zu einer stark linksschiefen Verteilung entwickelt und zeigt, dass zur Bewertung der Ergebnisse der Median und MAD sinnvoll gewählt wurden.

Zusammenfassend lässt sich der gerade beschriebene Sachverhalt mit den Erkenntnissen und Ergebnissen aus Kapitel 6.2.2 in Einklang bringen: Für eine zuverlässige Ermittlung des Zustandes des betrachteten System ist eine gewisse Anzahl an unterschiedlichen Anregungsszenarien notwendig. Zum einen wird dies sichtbar, dass eine zuverlässige Klassifikation erst ab einem Wert $x = 0,2$ und damit einer Anzahl $n > 10$ (bei $m = 50$) möglich ist. D.h., für die zuverlässige Bestimmung muss eine gewisse Anzahl an Anregungsbedingungen N vorliegen. Zum anderen kann auch festgehalten werden, dass für eine zuverlässige Generierung der Referenz-PDF eine ausreichend große Anzahl an unterschiedlichen Anregungsbedingungen m vorhanden sein muss. Ist diese Anzahl entspre-

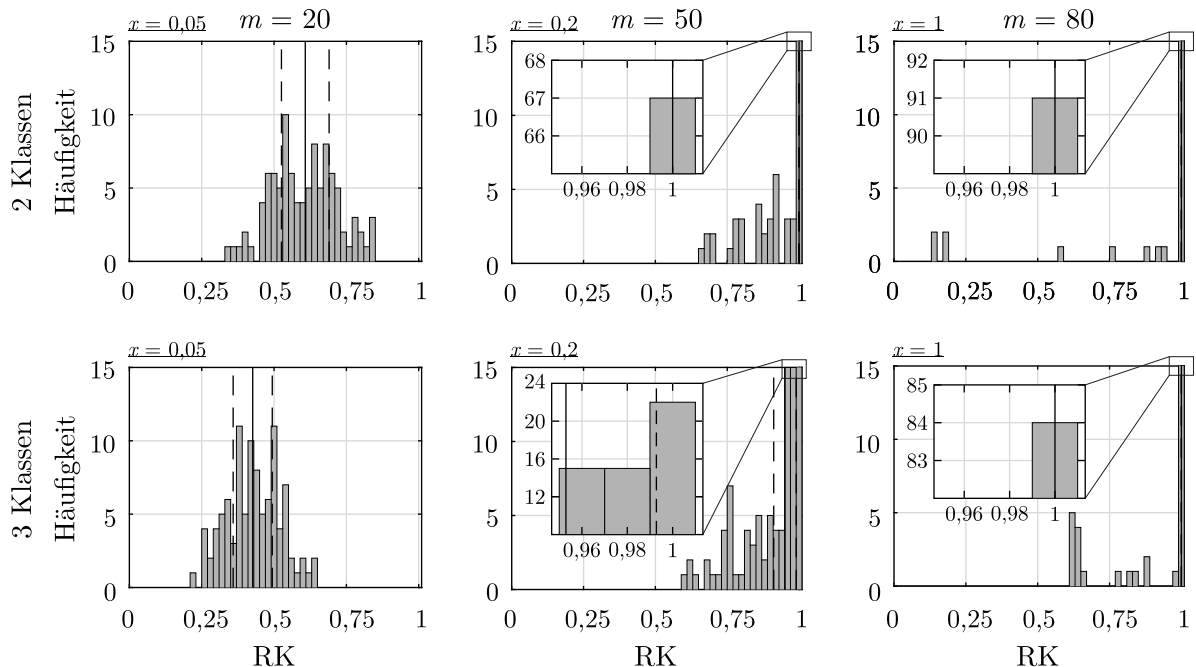


Abbildung 6.13: Häufigkeitsverteilung des Matthews Korrelationskoeffizient R_k zu ausgewählten Klassifikationsergebnissen. Oben: Klassifikation von 2 Klassen (Szenario 1 und 3). Unten: Klassifikation von 3 Klassen. Dargestellt ist zusätzlich der Median (—) und der MAD (---).

chend groß, hier im Fall $m = 80$, können bereits bei kleineren Verhältnissen x sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Die hier gezeigten Ergebnisse unterstreichen gleichzeitig die zu Beginn der Arbeit eingebrachte Hypothese, dass die Betrachtung von unterschiedlichen Anregungsszenarien bei der Anwendung der *Stochastic-Subspace-Identification* die Annahme des weißen Rauschens am besten abbildet bzw. gerecht wird und damit zu einem zuverlässigen SHM-System beitragen kann.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Entwicklung eines passiven *Structural Health Monitoring*-Systems zur Identifikation von geschädigten Komponenten an Schienenfahrzeugen basierend auf Beschleunigungsmessungen am Fahrwerk, wobei der Fokus auf der Erarbeitung eines automatisierten und intelligenten Auswertalgorithmus liegt.

SHM-Systeme ermöglichen mit ihren permanent installierten bzw. integrierten Aufnehmern – auch an schwer zugänglichen und prüfbareren Stellen – eine kontinuierliche Bestimmung des aktuellen Zustandes des Überwachungsobjektes und eignen sich besonders als integraler Bestandteil einer präventiven zustandsbasierten Wartungs- und Instandhaltungsstrategie. Damit ist es möglich, Schädigungen, die zu einem vorzeitigen Funktionsverlust führen, frühzeitig zu detektieren, analysieren und kontrolliert zu beheben. Außerplanmäßig, meist überraschende, aber kostenintensive, korrektive Maßnahmen zur Erhaltung der Funktionssicherheit werden damit verhindert. Des Weiteren können mit einer aktuellen Zustandsbewertung Komponenten bis an ihre reale physikalische Lebensdauer betrieben werden. Eine vorzeitige technisch-unwirtschaftliche Ausnutzung wird vermieden und eine Reduzierung von Wartungsmaßnahmen führt infolge Dessen zu einer Reduzierung der Instandhaltungskosten. SHM-Systeme tragen somit maßgeblich zur Steigerung der Sicherheit, Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit von Investitionsgütern wie bspw. Schienenfahrzeugen bei.

Schienenfahrzeuge sind während des Fahrbetriebes ständigen Vibrationen ausgesetzt, die vor allem durch den Rad-Schiene-Kontakt angeregt werden und im direkten Zusammenhang mit dem Schwingungsverhalten der Komponenten stehen. Veränderung der technischen Parameter führen zu einem geänderten Vibrationsverhalten. Durch die Messung von Beschleunigungen kann das Schwingungsverhalten bestimmt werden. Somit ist

es möglich, Rückschlüsse auf Veränderungen, bspw. herbeigeführt durch Beschädigungen von Komponenten, zu ziehen. Den automatisierten Auswertelgorithmen der SHM-Systeme kommen dabei eine besondere Bedeutung zu.

In dieser Arbeit wird die Auswertung der Ergebnisse der *Subspace System Identification* Methode signifikant erweitert und optimiert. Sie SSI ist eine datenbasierte Methode zur Durchführung von operationalen Modalanalysen. Aufgrund der Eigenschaft, dass lediglich die gemessenen Beschleunigungswerte für die Auswertung herangezogen werden, wird die SSI den *Output-Only* Methoden zugeordnet. Die wesentliche Neuerung ist die Verwendung einer Vielzahl von unterschiedlichen, stochastischen Anregungsszenarien in Kombination mit der Kerndichteschätzung der modalen Parameter zur Minimierung falscher Identifikationsergebnisse, die durch eine Verletzung der Annahme von weißem Rauschen als Systemanregung – so wie sie bei der Herleitung der SSI verwendet wird – entstehen. Ergebnis der neuen Methode ist die sog. *Modal Parameter Density Estimation Function* (MoDE-F). Weiterhin wurde eine adaptive Ordnungsanpassung basierend auf der Änderungsrate der Jensen-Shannon-Divergenz Metrik in die automatisierte Auswertung der Stabilisierungsdiagramme eingeführt, die nunmehr eine manuelle, im Vorfeld vom Anwender zu definierende maximalen Systemordnung für die SSI vermeidet. Zudem wurde ein neuartiger merkmalsbasierter Bandbreitenselektor für die Kerndichteschätzung entwickelt, der unabhängig von der Anzahl der zu Verfügung stehenden Datenpunkte die Bandbreite (*smoothing* Parameter h) der Gauß-Kerne basierend auf der gewünschten Merkmalsauflösung (bspw. eine bestimmte Frequenzauflösung) bestimmt. Die automatisierte Auswertung und Klassifikation der erzeugten MoDE-F wird mittels der Jensen-Shannon-Divergenz-Metrik (JSDM) realisiert. Neben den physikalisch interpretierbaren Ergebnissen besteht der zusätzliche Vorteil der Methode darin, dass keine detaillierten Parameter für das verwendete Zustandsraummodell der zu überwachenden Struktur notwendig sind.

Die wissenschaftlich, methodische Herangehensweise in dieser Arbeit umfasst die theoretischen Analysen, numerischen Simulationen und experimentelle Studien, die sich im chronologischen Aufbau der Arbeit widerspiegelt. Beginnend mit einer thematischen Einführung in das Thema *Structural Health Monitoring*, einem Literaturüberblick, der Motivation und Zielsetzung in Kapitel 1 werden in Kapitel 2 die notwendigen theoretischen Grundlagen für die Themengebiete der mathematischen Modellierung technischer Schwingungssysteme, Systemidentifikation, Kerndichteschätzung, Klassifikation und Schienenfahrzeuge dargelegt.

Kapitel 3 ist der Entwicklung der neuartigen SHM-Methode basierend auf dem *Parzen Estimator* gewidmet. Hier werden die bereits in den vorherigen Abschnitten aufgezeigten Neuerungen und Erweiterungen vorgestellt. Bereits in der theoretischen Herleitung zeigt vor allem die Studie zu den wesentlichen Abhängigkeiten (Bandbreite h , Anzahl der Signalfragmente N , Anzahl der Freiheitsgrade n_q , Änderungsrate der JSDM), dass die eingeführte adaptive Ordnungsanpassung sinnvoll ist. Ab einer bestimmten Systemordnung p ist kein wesentlicher Informationszuwachs mehr zu verzeichnen und weitere aufwendige Berechnungen werden nicht benötigt.

Kapitel 4 thematisiert die Fragestellung, wie sich die neue Methode gegenüber einer Verletzung der Annahme von weißem Rauschen bei der Berechnung der modalen Parameter verhält. Für die Beantwortung dieser Fragestellung wird ein in all seinen Parametern kontrollierbares analytisches Schwingsystem verwendet. Durch ein band-begrenztes weißes Rauschen Signal mit unterschiedlichen Bandgrenzen wird bewusst die Annahme bei der Herleitung der SSI verletzt. Die Auswertungen der individuellen Testsignale zeigen, dass durch diese Maßnahme zusätzliche, nicht-physikalische Ergebnisse bei der ursprünglichen Variante der SSI zum Vorschein treten. Werden die modalen Parameter jedoch mit der neuen MoDE-F berechnet, die alle unterschiedlichen Testsignale berücksichtigt, zeigt sich, dass das Endresultat die nicht-physikalischen Ergebnisse reduziert bzw. sogar eliminiert und damit das Grundprinzip der neu entwickelten Methode unterstreicht. Zur weiteren Verifizierung wird das analytische Modell mit einem stochastisches Signal basierend auf einem Leistungsdichtespektrum für vertikale Schienenunebenheiten angeregt. Auch hier zeigt sich, dass durch Anwendung des Kerndichtschätzers die nicht-physikalischen Ergebnisse durch Verletzung der Annahme von weißem Rauschen eliminiert werden.

Kapitel 5 wendet die neuartige Methode an einem Versuchszug bestehend aus zwei Drehgestellen und einem Wagenkasten – als MKS-Modell in SIMPACK aufgebaut – an. Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln hat sich die Komplexität, vor allem durch die Steigerung der Freiheitsgrade, die realitätsnahen Modellierung der Gleislagefehler, die Berücksichtigung der Kräfte im Rad-Schiene-Kontakt und die Einführung von unterschiedlichen Schadensszenarien des technischen Schwingsystems erhöht. Eine Studie zur Robustheit der MoDE-F Methode zeigt, dass die modalen Parameter bei unterschiedlichen Anregungsbedingungen und Schädigungsszenarien zuverlässig bestimmt werden ohne Überschneidung der Konfidenz- und Prognoseintervalle, was eine Fehlinterpretation der MoDE-F's in den unterschiedlichen Schadensszenarien verhindert. Die Sensitivität, ab dem eine zuverlässige Unterscheidung zwischen einem un- und geschädigtem Zustand

möglich ist, wurde ebenfalls am MKS-Modell analysiert. Mit steigendem Schädigungsgrad steigt gleichzeitig die Sensitivität. Ab einem Schädigungsgrad von ca. $1/3$ gegenüber dem ungeschädigten Zustand kann eine zuverlässige Unterscheidung durchgeführt werden. Mit der gestiegenen Komplexität des Schwingungssystems konnte ebenfalls die MoDE-F für den mehrdimensionalen Fall – durch Hinzufügen der rel. Magnitude der Eigenformen – erstellt werden.

Kapitel 6 widmet sich der Erprobung der Methode an einem realen Versuchsobjekt. Hierzu wird ein Drehgestell der Baureihe BR 442 - Talent 2 als Versuchsobjekt auf einem Rollenprüfstand betrieben. Als Schadensszenarien wird ein Dämpferschaden an der Primärfederung an verschiedenen Positionen durch Ausbau des Dämpfers eingebracht. Neben dem intakten Zustand werden in einem zweiten Schadensszenario zwei Dämpfer der vorderen Achse und in einem dritten Schadensszenario alle vier Dämpfer ausgebaut. Mit der neu vorgestellten Methode basierend auf dem *Parzen Estimator* ist es möglich, alle drei Schädigungsszenarien zu identifizieren und zu klassifizieren. Als wesentliche Erkenntnis hat die Einflussanalyse die notwendige Anzahl an unterschiedlichen Anregungsszenarien zur Berechnung der MoDE-F hervorgebracht. Zum einen begünstigt eine möglichst hohe Anzahl unterschiedlicher Anregungsszenarien in der Lernphase das korrekte *Health Assessment*. Zum anderen hat sich gezeigt, dass eine sinnvolle und zuverlässige Klassifikation ab einem Verhältnis von $x = \frac{n}{m} = 0,2$ (Verhältnis der Anzahl der Anregungssignale in der Lernphase zur Betriebsphase) möglich ist. Wird dieser Sachverhalt berücksichtigt, zeigt sich, dass der Einfluss und die Wahl der Toleranzschwelle für die adaptive Ordnungsanpassung als gering einzustufen sind.

Als nächsten Schritt muss die vorgestellte Methode ihre Anwendbarkeit unter realen Betriebs- und Einbaubedingungen in einem Zugverbund unter Beweis stellen. In diesem Zusammenhang lässt sich vor allem die Erweiterung der MoDE-F auf den mehrdimensionalen Fall genauer untersuchen, der in dieser Arbeit nur angeschnitten wurde. Hier ist vor allem das Augenmerk auf den merkmalsselektiven Bandbreitenselektor zu legen.

Werden die bisherigen Erkenntnisse der einzelnen Kapitel zusammengefasst, trägt diese Arbeit wesentlich zur automatisierten und intelligenten Auswertung von Beschleunigungsmessungen zur Zustandsbewertung und Identifikation von geschädigten Komponenten innerhalb eines passiven SHM-Systemen bei. Als zukünftiger Baustein präventiv zustandsbasierter Instandhaltungskonzepte unterstützt der Inhalt dieser Arbeit die Fortentwicklung der Instandhaltung zur Sicherstellung und Erhöhung der Sicherheit, Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit technischer Güter.

Anhang A

Anhang

A.1 Transformierter Zustandsraum

Gegeben ist die folgende zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{A.1}$$

Mit einer invertierbaren Transformationsmatrix $\tilde{\mathbf{T}}$ kann der alte Zustand $\mathbf{x}_k$ in einen neuen Zustand $\tilde{\mathbf{x}}_k$ überführt werden. Es gilt:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{x}_k\tag{A.2}$$

Einsetzen von (A.2) in (A.1) führt zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

und damit zur transformierten Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}_d \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{y}_k &= \tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{D}}_d \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Damit ergeben sich folgenden Zusammenhänge zwischen dem transformierten und nicht-transformierten Zustandsraum:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_d &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{C}}_d &= \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{w}}_k &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{w}_k \\ \tilde{\mathbf{B}}_d &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{B}_d & \tilde{\mathbf{D}}_d &= \mathbf{D}_d & \tilde{\mathbf{v}}_k &= \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{A.4}$$

A.2 Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix im transformierten Zustandsraum

Für die nicht-transformierte Zustandsraumdarstellung gilt:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \lambda\bar{\mathbf{x}},$$

wobei λ ein Eigenwert und $\bar{\mathbf{x}}$ der zugehörige Eigenvektor der Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist. Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix. Unter Vernachlässigung der trivialen Lösung $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ muss $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ singulär sein. D.h.:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Analog gilt für die transformierte Zustandsraumdarstellung:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{x}},$$

wobei $\tilde{\lambda}$ ein Eigenwert und $\tilde{\mathbf{x}}$ der zugehörige Eigenvektor der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ist. Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix. Mit den Beziehungen aus (A.4) gilt

$$(\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Erweiterung mit $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}$ und Multiplikation zum Schluss von links mit $\tilde{\mathbf{T}}$ führt zu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{I}\tilde{\mathbf{T}}^{-1})\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der trivialen Lösung $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ muss $(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})$ singulär sein. D.h.:

$$\det(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Aus dem Vergleich der charakteristischen Gleichung (A.5) und (A.6) folgt sofort:

$$\tilde{\lambda} = \lambda \quad (\text{A.7})$$

D.h. die Eigenwerte der transformierten und der nicht-transformierten Systemmatrix sind identisch. Ebenfalls durch Vergleichen kann die Beziehung für die Eigenvektoren abgeleitet werden. Es gilt:

$$\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{A.8})$$

A.3 Beobachtbarkeitsmatrix im transformierten Zustandsraum

Die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix wird für das Zustandsraummodell (A.1) wie folgt definiert:

$$\Theta_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Für die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix kann mit den Beziehungen aus Gl. (A.4) geschrieben werden:

$$\tilde{\Theta}_r = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_d \\ \tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{A}}_d \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{A}}_d^{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \mathbf{T} \\ \mathbf{C}_d \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{T} \prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (\text{A.10})$$

Damit gilt für die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix in der transformierten Zustandsraumdarstellung:

$$\tilde{\Theta}_r = \Theta_r \mathbf{T}. \quad (\text{A.11})$$

A.4 SIMPACK Zugmodell

Wagenkasten		Drehgestell		Radsatz	
Wanken	0,54 Hz	Lateral	IP	Zucken	OOP (F) 29,68 Hz
Gieren	0,88 Hz		OOP		OOP (R) 29,68 Hz
Tauchen	1,08 Hz	Gieren	IP	Rollen	OOP (F) 34,74 Hz
Nicken	1,31 Hz		OOP		OOP (R) 34,74 Hz
Pendeln	1,39 Hz	Bocken	IP	Rollen	IP (FR) 34,88 Hz
			OOP		OOP (FR) 34,88 Hz
		Tauchen	IP	Tauchen	IP (FR) 36,88 Hz
			OOP		OOP (FR) 36,88 Hz
		Rollen	IP	Tauchen	OOP (F) 36,95 Hz
			OOP		OOP (R) 36,95 Hz
		Nicken	IP	Gieren	OOP (F) 37,81 Hz
			OOP		OOP (R) 37,81 Hz
		Pendeln	IP		
			OOP		
Schiene & Gleisbett				Gemischte Moden	
Lateral	IP (FR) 39,25 Hz	Bocken	OOP (F) 47,05 Hz	Gieren (Bogie/Radsatz)	IP (F) 15,09 Hz
(Gleisbett)	OOP (FR) 39,25 Hz		OOP (R) 47,05 Hz		IP (R) 15,09 Hz
Lateral	OOP (F) 39,25 Hz			Gieren (Bogie/Radsatz)	OOP (F) 50,87 Hz
(Schiene)	OOP (R) 39,25 Hz				OOP (R) 50,87 Hz

Tabelle A.1: Ungedämpfte Eigenfrequenzen und zugehörige Eigenformen des Versuchszuges im ungeschädigten Zustand. (IP) gleichphasig, (OOP) gegenphasig, (F) Bewegung der Radsätze des vorderen Drehgestells, (R) Bewegung der Radsätze des hinteren Drehgestells, (FR) Bewegung der Radsätze im vorderen und hinteren Drehgestell.

A.5 Rollenprüfstandsexperimente

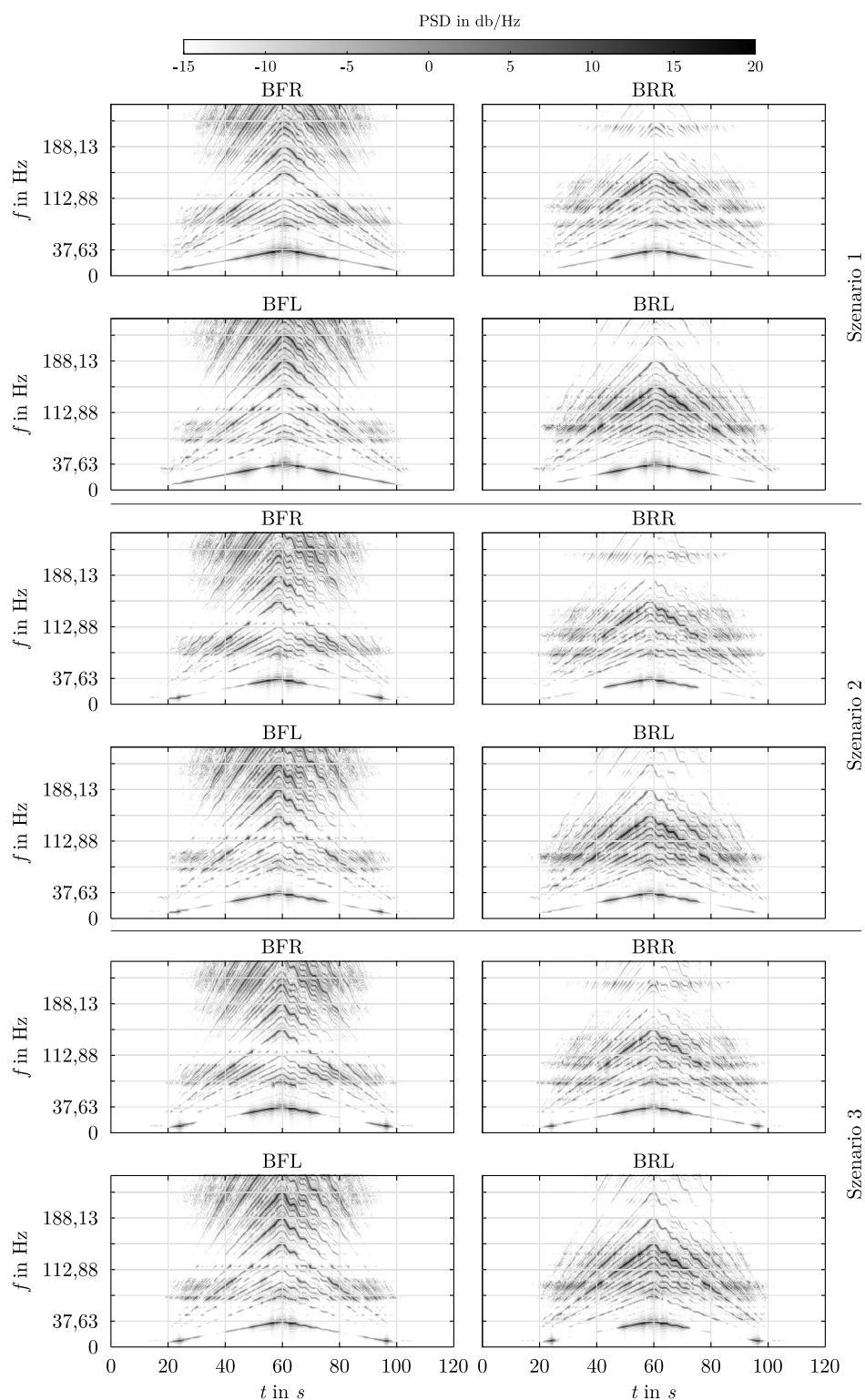


Abbildung A.1: Spektrogramme der gemessenen Beschleunigungssignale für die Schadensszenario 1 (oben), 2 (mitte) und 3 (unten). Ausgewertet mit einem Rechteckfenster mit einer Signallänge von 0,5 s und 50 % Überlappung.

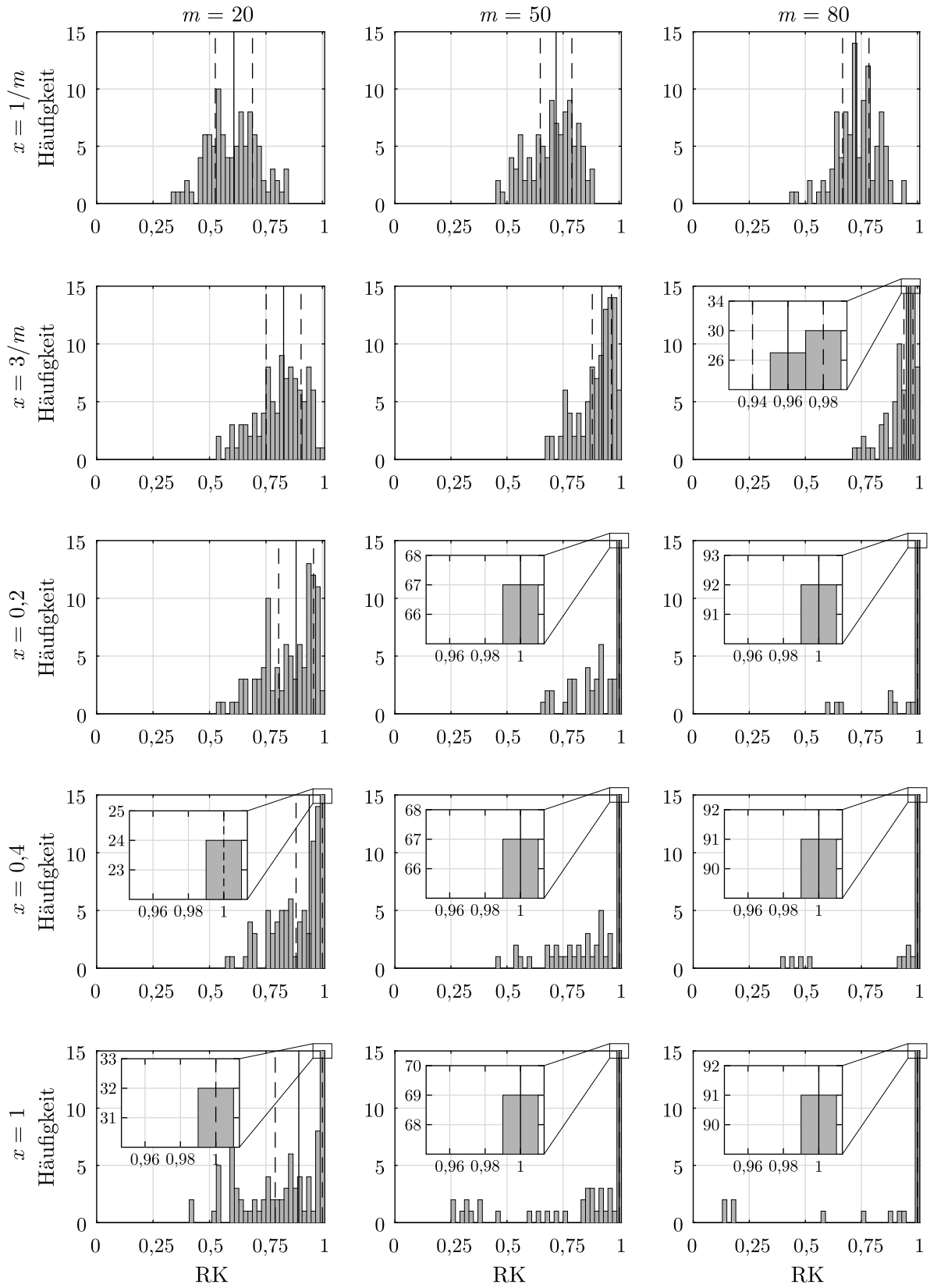


Abbildung A.2: Häufigkeitsverteilung des des Matthews Korrelationskoeffizient R_k bei der Klassifikation von 2 Klassen (Szenario 1 und 3) für unterschiedliche Verhältnisse $x = \frac{n}{m}$ bei konstanter Anzahl an Signalfragmenten m zur Bildung der Referenz PDF. Dargestellt ist zusätzlich der Median (—) und der MAD (---).

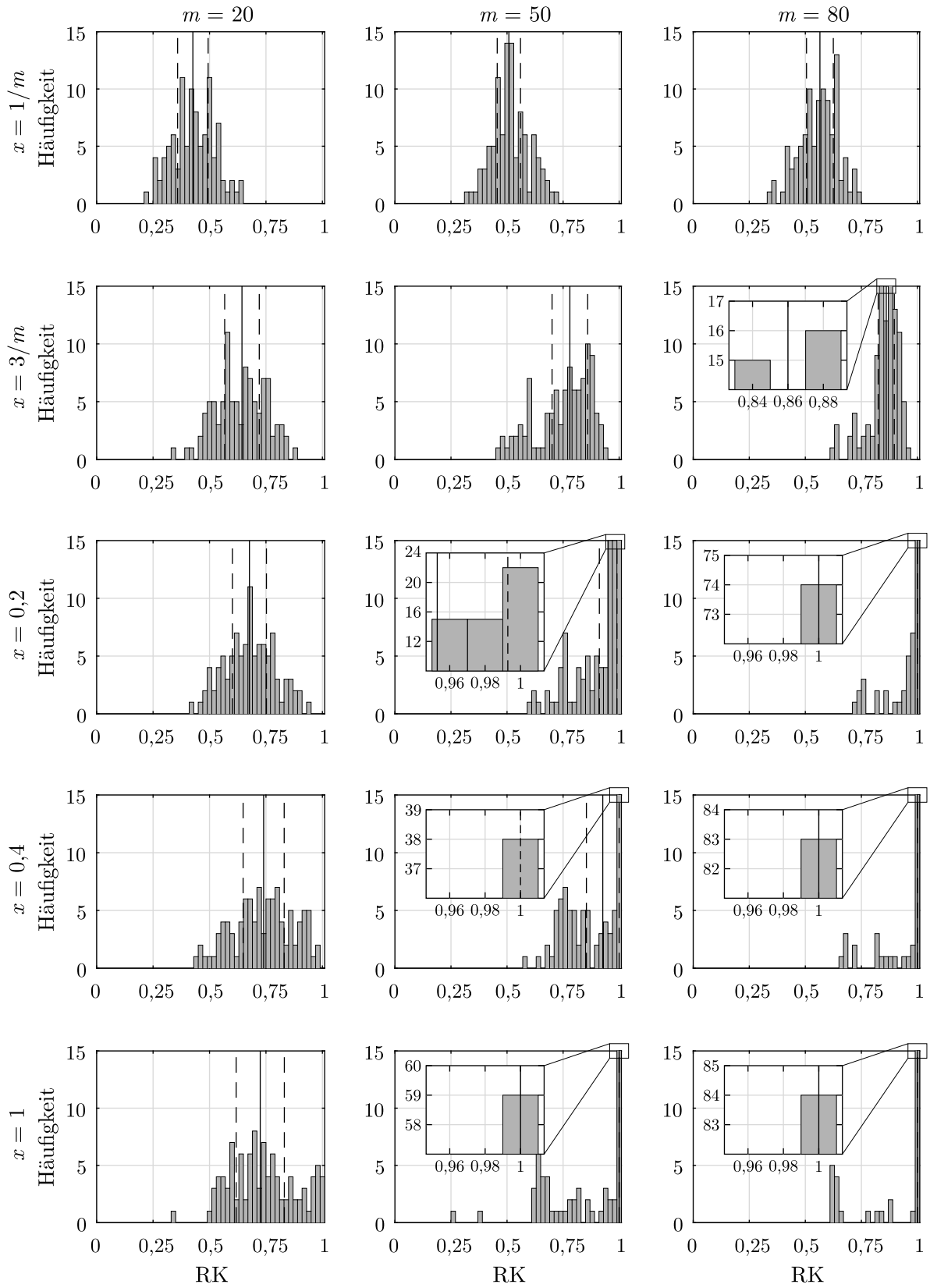


Abbildung A.3: Häufigkeitsverteilung des des Matthews Korrelationskoeffizient R_k bei der Klassifikation von 3 Klassen (Szenario 1,2 und 3) für unterschiedliche Verhältnisse $x = \frac{n}{m}$ bei konstanter Anzahl an Signalfragmenten m zur Bildung der Referenz PDF. Dargestellt ist zusätzlich der Median (—) und der MAD (---).

Literaturverzeichnis

- ALFI, S., BIONDA, S., BRUNI, S. & GASPARETTO, L. (2011). Condition monitoring of suspension components in railway bogies. In: *5th IET Conference on Railway Condition Monitoring and Non-Destructive Testing*. Derby, GBR.
- ALLEMANG, R. J. (2003). The modal assurance criterion: Twenty years of use and abuse. *Sound and Vibration* **37**(8), 14–21.
- ALLEMANG, R. J. & BROWN, D. L. (1982). A correlation coefficient for modal vector analysis. In: *1st International Modal Analysis Conference*. Orlando, USA.
- AMARI, S.-I. (2016). *Information Geometry and Its Applications*. Springer.
- AVITABILE, P. (2018). *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. Wiley.
- BALAGEAS, D. (2006). Introduction to structural health monitoring. In: *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd, S. 13–43.
- BALAGEAS, D., FRITZEN, C.-P. & GÜEMES, A. (2006). *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd.
- BERAWI, A. R. B. (2013). *Improving Railway Track Maintenance using Power Spectral Density (PSD)*. Dissertation, Universidade do Porto.
- BOWMAN, A. W. (1985). A comparative study of some kernel-based nonparametric density estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **21**(3-4), 313–327.
- BRUNI, S., GOODALL, R. M., MEI, T. X. & TSUNASHIMA, H. (2007). Control and monitoring for railway vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics* **45**(7-8), 743–779.
- CHANG, F.-K. (1999). Structural health monitoring: A summary report on the first international workshop on structural health monitoring. In: *2nd International Workshop on Structural Health Monitoring*. Stanford, USA.
- CHEN, X., WANG, L., TAO, X., CUI, G., YANG, F., CHAI, X. & WU, W. (2008). Study on the judgment method for track regularity of the main railway lines in china. *Journal of China Railway Science* **29**(4), 21–27.

- CHICCO, D. & JURMAN, G. (2020). The advantages of the matthews correlation coefficient (mcc) over f1 score and accuracy in binary classification evaluation. *BMC Genomics* **21**(1).
- CLAUS, H. & SCHIEHLEN, W. (1998). Modeling and simulation of railway bogie structural vibrations. *Vehicle System Dynamics* **29**(S1), 538–552.
- COVER, T. M. & THOMAS, J. A. (2006). *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons.
- DIN 31051:2019-07 (2019). *Grundlagen der Instandhaltung*.
- DIN EN 13306:2018-02 (2018). *Instandhaltung - Begriffe der Instandhaltung: Dreisprachige Fassung EN 13306:2017*.
- DIN EN 13848-1:2019-06 (2019). *Bahnanwendungen – Oberbau – Gleislagequalität – Teil 1: Beschreibung der Gleisgeometrie, Deutsche Fassung EN 13848-1:2019*.
- DIN EN 17023:2019-07 (2019). *Bahnanwendungen – Instandhaltung von Eisenbahnfahrzeugen – Erstellung und Änderung von Instandhaltungsplänen: Deutsche Fassung EN 17023:2018*.
- DIN ISO 17359 BBL 1:2017-02 (2017). *Zustandsüberwachung und -diagnostik von Maschinen – Allgemeine Anleitungen: Beiblatt 1: Erläuterungen zu Fachbegriffen*.
- DIN ISO 17359:2018-05 (2018). *Zustandsüberwachung und -diagnostik von Maschinen – Allgemeine Anleitungen (ISO 17359:2018)*.
- DUIN, R. P. W. (1976). On the choice of smoothing parameters for parzen estimators of probability density functions. *IEEE Transactions on Computers* **C-25**(11), 1175–1179.
- DUONG, T. (2004). *Bandwidth Selectors for Multivariate Kernel Density Estimation*. Dissertation, University of Western Australia.
- EBERT, C. (2011). *Systemidentifikation zur Modellierung mechanischer Strukturen: Markovparameter zur experimentellen Schadenserfassung*. Dissertation, Universität Siegen.
- ENDRES, D. M. & SCHINDELIN, J. E. (2003). A new metric for probability distributions. *IEEE Transactions on Information Theory* **49**(7), 1858–1860.
- EPANECHNIKOV, V. A. (1969). Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory of Probability & Its Applications* **14**(1), 153–158.
- EWINS, D. J. (2000). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press.

-
- FA SHM (2014). 15. Sitzung des Fachausschusses Zustandsüberwachung. *ZfP-Zeitung* **139**, 4.
- FARRAR, C. R. & WORDEN, K. (2012). *Structural Health Monitoring: A Machine Learning Perspective*. Wiley & Sons Ltd.
- FIGUEIREDO, E., PARK, G., FIGUEIRAS, J., FARRAR, C. R. & WORDEN, K. (2009). *Structural Health Monitoring Algorithm Comparisons Using Standard Data Sets*. Tech. Report, Los Alamos National Laboratory.
- FRITZEN, C.-P. (2006). Vibration-based techniques for structural health monitoring. In: *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd, S. 45–224.
- FUGATE, M. L., SOHN, H. & FARRAR, C. R. (2001). Vibration-based damage detection using statistical process control. *Mechanical Systems and Signal Processing* **15**(4), 707–721.
- FUGLEDE, B. & TOPSOE, F. (2004). Jensen-shannon divergence and hilbert space embedding. In: *Proceedings of International Symposium on Information Theory*. Chicago, Illinois, USA.
- GASCH, R., KNOTHE, K. & LIEBICH, R. (2012). *Strukturodynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer.
- GIURGIUTIU, V. (2014). *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier.
- GOLUB, G. H. & VAN LOAN, C. F. (2013). *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press.
- GOODALL, R. M. (Ed.) (2004). *IEE Seminar: Railway Condition Monitoring -Why? What? How?* Derby, GBR: Institution of Engineering & Technology.
- GOODALL, R. M. & ROBERTS, C. (2006). Concepts and techniques for railway condition monitoring. In: *IET International Conference On Railway Condition Monitoring*. Birmingham.
- GORODKIN, J. (2004). Comparing two k-category assignments by a k-category correlation coefficient. *Computational biology and chemistry* **28**(5-6), 367–374.
- GÜEMES, A. & SIERRA-PEREZ, J. (2013). Fibre optic sensors. In: *New Trends in Structural Health Monitoring*. Springer, S. 276–316.
- HABBEMA, J. D. F., HERMANS, J. & VAN DEN BROEK, K. (1974). A stepwise discriminant analysis program using density estimation. In: *Computational Statistics (COMPSTAT) 1974*.

- HAIGERMOSER, A., LUBER, B., RAUH, J. & GRÄFE, G. (2015). Road and track irregularities: Measurement, assessment and simulation. *Vehicle System Dynamics* **53**(7), 878–957.
- HALL, P., MARRON, J. S. & PARK, B. U. (1992). Smoothed cross-validation. *Probability Theory and Related Fields* **92**(1), 1–20.
- HANNEFORTH, W. & FISCHER, W. (1986). *Laufwerke*. Transpress Verlag für Verkehrswesen.
- HAYASHI, Y., TSUNASHIMA, H. & MARUMO, Y. (2008). Fault detection of railway vehicle suspension systems using multiple-model approach. *Journal of Mechanical Systems for Transportation and Logistics* **1**(1), 88–99.
- HEIDENREICH, N.-B., SCHINDLER, A. & SPERLICH, S. (2013). Bandwidth selection for kernel density estimation: a review of fully automatic selectors. *AStA Advances in Statistical Analysis* **97**(4), 403–433.
- HEYLEN, W., LAMMENS, S. & SAS, P. (1997). *Modal analysis theory and testing*. Katholieke Universiteit Leuven - Departement Werktuigkunde.
- IHME, J. (2016). *Schienenfahrzeugtechnik*. Springer Vieweg.
- IWNICKI, S. (1998). Manchester benchmarks for rail vehicle simulation. *Vehicle System Dynamics* **30**(3-4), 295–313.
- IWNICKI, S. (1999). *The Manchester benchmarks for rail vehicle simulation*. Swets & Zeitlinger.
- IWNICKI, S., SPIRYAGIN, M., COLE, C. & MCSWEENEY, T. (2020). *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press/Taylor & Francis Group.
- JÄNSCH, E., LANG, H. P. & NIESSEN, N. (2021). *Handbuch: Das System Bahn*. PMC.
- JUNG, H., MÜNKER, T., KAMPMANN, G., NELLES, O. & FRITZEN, C.-P. (2017). A probabilistic approach for fault detection of railway suspensions. In: *11th International Workshop on Structural Health Monitoring*. Stanford, USA.
- JUNG, H., MÜNKER, T., KAMPMANN, G., RAVE, K., FRITZEN, C.-P. & NELLES, O. (2016). A novel full scale roller rig test bench for shm concepts of railway vehicles. In: *8th European Workshop on Structural Health Monitoring*. Bilbao, Spain.
- JUNG, H., NELLES, O., KRAEMER, P., WEINBERG, K., KAMPMANN, G. & FRITZEN, C.-P. (2022). Automatic system identification for robust fault detection of railway suspensions. In: *5th International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance*. Montpellier, FRA.

-
- JURMAN, G., RICCADONNA, S. & FURLANELLO, C. (2012). A comparison of mcc and cen error measures in multi-class prediction. *PloS one* **7**(8), e41882.
- KALKER, J. J. (1982). A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle system dynamics* **11**(1), 1–13.
- KALKER, J. J. (2013). *Three-dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Band 2. Springer.
- KLEIN, H. (2018). *Entwicklung eines Prüfstandes und Messtechnikkonzeptes für schwingungsbasierte Structural-Health-Monitoring-Systeme*. Bachelorarbeit, Universität Siegen.
- KNOTHE, K. & STICHEL, S. (2003). *Schienenfahrzeugdynamik*. Springer.
- KOSTRZEWSKI, M. & MELNIK, R. (2021). Condition monitoring of rail transport systems: A bibliometric performance analysis and systematic literature review. *Sensors* **21**(4710).
- KULLBACK, S. & LEIBLER, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics* **22**(1), 79–86.
- KUMAR, R., YADAV, O. P., PANDEY, M. & VYAS, N. S. (2022). Suspension failure detection in railway bogies using artificial neural network. In: *12th International Conference on Railway Bogies and Running Gears*. Budapest.
- LAGNEBÄCK, R. (2007). *Evaluation of wayside condition monitoring technologies for condition-based maintenance of railway vehicles*. Licentiate thesis, Luleå University of Technology.
- LI, C., LUO, S., COLE, C. & SPIRYAGIN, M. (2017). An overview: Modern techniques for railway vehicle on-board health monitoring systems. *Vehicle System Dynamics* **55**(7), 1045–1070.
- LI, P. & GOODALL, R. M. (2004). Model-based condition monitoring for railway vehicle systems. In: *Control 2004*. University of Bath, GBR.
- LI, P., GOODALL, R. M. & KADIRKAMANATHAN, V. (2003). Parameter estimation of railway vehicle dynamic model using rao-blackwellised particle filter. In: *European Control Conference (ECC)*. Cambridge, GBR.
- LI, P., GOODALL, R. M., WESTON, P. F., LING, C. S., GOODMAN, C. & ROBERTS, C. (2007). Estimation of railway vehicle suspension parameters for condition monitoring. *Control Engineering Practice* **15**(1), 43–55.
- LIN, J. (1991). Divergence measures based on the shannon entropy. *IEEE Transactions on Information Theory* **37**(1), 145–151.

- LIU, F. (2020). *Online Identification of Vehicle Dynamic Systems for Condition Monitoring*. Dissertation, University of Huddersfield.
- LIU, F., ZHANG, H., HE, X., ZHAO, Y., GU, F. & BALL, A. D. (2020). Correlation signal subset-based stochastic subspace identification for an online identification of railway vehicle suspension systems. *Vehicle System Dynamics* **58**(4), 569–589.
- LJUNG, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall PTR.
- LUNZE, J. (2014). *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer Berlin Heidelberg.
- MARCHESIELLO, S., FASANA, A. & GARIBALDI, L. (2016). Modal contributions and effects of spurious poles in nonlinear subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing* **74**(3-5), 111–132.
- MELNIK, R. & KOSTRZEWSKI, M. (2012). Rail vehicle’s suspension monitoring system - analysis of results obtained in tests of the prototype. *Key Engineering Materials* **518**, 281–288.
- NGIGI, R. W., PISLARU, C., BALL, A. D. & GU, F. (2012). Modern techniques for condition monitoring of railway vehicle dynamics. *Journal of Physics: Conference Series* **364**, 012016.
- NIELSEN, F. & SUN, K. (2016). Guaranteed bounds on information-theoretic measures of univariate mixtures using piecewise log-sum-exp inequalities. *Entropy* **18**(12), 442.
- NOWLAN, F. S. & HEAP, H. F. (1978). *Reliability-Centered Maintenance*. Tech. Report, United Air Lines International Airport.
- O’HANLON, T. (2022). *The Introduction of the S-D-I-P-F Safety Reliability Curve*. Tech. Report, Reliabilityweb.
- ORE B 176 (1989). *Question B 176 - Bogies with steered or steering wheelsets: Specifications and preliminary studies*.
- OSTACHOWICZ, W., MALINOWSKI, P. & WANDOWSKI, T. (2013). Damage localisation using elastic waves propagation method: Experimental techniques. In: *New Trends in Structural Health Monitoring*. Springer, S. 317–371.
- PARK, G., SOHN, H., FARRAR, C. R. & INMAN, D. J. (2003). Overview of piezoelectric impedance-based health monitoring and path forward. *The Shock and Vibration Digest* **35**(6), 451–463.
- PARZEN, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics* **33**(3), 1065–1076.

-
- PEETERS, B. & DE ROECK, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**(6), 855–878.
- PEETERS, B. & DE ROECK, G. (2001). Stochastic system identification for operational modal analysis: A review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **123**(4), 659–667.
- PLUCKNETTE, D. J. (2006). Expanding the curve. *uptime magazine* **1**(9), 4–14.
- POPP, K. & SCHIEHLEN, W. (1993). *Fahrzeugdynamik: Eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug - Fahrweg*. Teubner.
- REYNDERS, E. (2012). System identification methods for (operational) modal analysis: Review and comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering* **19**(1), 51–124.
- REYNDERS, E., HOUBRECHTS, J. & DE ROECK, G. (2012). Fully automated (operational) modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* **29**, 228–250.
- ROBINSON, M., SCOTT, P., LAFAIX, B., KOZYR, G. & ZAREMBSKI, A. (2012). *Summary Report and Database of Derailments Incidents: Deliverable D1.1*. Tech. Report, European Commission.
- ROSENBLATT, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics* **27**(3), 832–837.
- RUDEMO, M. (1982). Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics* **9**(2), 65–78.
- RYTTER, A. (1993). *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Dissertation, Aalborg University.
- SCHARNHORST, K. (2001). Angles in complex vector spaces. *Acta Applicandae Mathematica* **69**(1), 95–103.
- SCHINDLER, C. (2014). *Handbuch Schienenfahrzeuge: Entwicklung - Produktion - Instandhaltung*. Global Rail Group.
- SCOTT, D. W. & TERRELL, G. R. (1987). Biased and unbiased cross-validation in density estimation. *Journal of the American Statistical Association* **82**(400), 1131.
- SHEATHER, S. J. & JONES, M. C. (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **53**(3), 683–690.
- SILVERMAN, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall.

- SILVESTER, J. R. (2000). Determinants of block matrices. *The Mathematical Gazette* **84**(501), 460–467.
- SIMONOFF, J. S. (1996). *Smoothing Methods in Statistics*. Springer New York.
- SIMPACK AG (2016). *SIMPACK Documentation, Release 9.9.2*. Dokumentation.
- SNEED, W. H. & SMITH, R. L. (1998). On-board real-time railroad bearing defect detection and monitoring. In: *ASME/IEEE Joint Railroad Conference*. Philadelphia, USA.
- SOHN, H., FARRAR, C. R., HUNTER, N. F. & WORDEN, K. (2001). Structural health monitoring using statistical pattern recognition techniques. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **123**(4), 706–711.
- SOHN, H. & PARK, H. W. (2005). Can damage be detected without any baseline data? In: *Health Monitoring and Smart Nondestructive Evaluation of Structural and Biological Systems IV*.
- STRANO, S. & TERZO, M. (2019). Review on model-based methods for on-board condition monitoring in railway vehicle dynamics. *Advances in Mechanical Engineering* **11**(2), 168781401982679.
- TSUNASHIMA, H. (2018). Railway condition monitoring, present and application for regional railways. *Report of the Research Institute of Industrial Technology Nihon University* (102), 1–10.
- TSUNASHIMA, H. & MORI, H. (2010). Condition monitoring of railway vehicle suspension using adaptive multiple model approach. In: *ICCAS 2010*. Gyeonggi-do.
- UIC (2023). *UIC Safety Report 2023 - Significant Accidents 2022*. UIC Safety Unit.
- VAJDA, I. (2009). On metric divergences of probability measures. *Kybernetika* **45**(6), 885–900.
- VAN DER AUWERAER, H. & PEETERS, B. (2004). Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: use and automation of the stabilization diagram. In: *Proceedings of the 21st IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (IEEE Cat. No.04CH37510)*. Como, Italy.
- VAN OVERSCHEE, P. & DE MOOR, B. (1993). Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica* **29**(3), 649–660.
- VAN OVERSCHEE, P. & DE MOOR, B. (1995). A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica* **31**(12), 1853–1864.
- VAN OVERSCHEE, P. & DE MOOR, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory - Implementation - Applications*. Springer US.

-
- VERHAEGEN, M. & DEWILDE, P. (1992). Subspace model identification part 1. the output-error state-space model identification class of algorithms. *International Journal of Control* **56**(5), 1187–1210.
- VERHAEGEN, M. & VERDULT, V. (2007). *Filtering and System Identification*. Cambridge University Press.
- VIBERG, M., WAHLBERG, B. & OTTERSTEN, B. (1997). Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting. *Automatica* **33**(9), 1603–1616.
- WAND, M. P. (1992). Error analysis for general multivariate kernel estimators. *Journal of Nonparametric Statistics* **2**(1), 1–15.
- WAND, M. P. & JONES, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*. Springer.
- WARD, C. P., GOODALL, R. M., DIXON, R. & CHARLES, G. (2010). Condition monitoring of rail vehicle bogies. In: *UKACC International Conference on CONTROL 2010*. Coventry, UK.
- WARD, C. P., WESTON, P. F., STEWART, E. J. C., LI, H., GOODALL, R. M., ROBERTS, C., MEI, T. X., CHARLES, G. & DIXON, R. (2011). Condition monitoring opportunities using vehicle-based sensors. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* **225**(2), 202–218.
- WATANABE, S., YAMAZAKI, K. & AOYAGI, M. (2004). *Kullback Information of Normal Mixture is not an Analytic Function*. Tech. Report, The Institute of Electronics, Information and Communication.
- WEI, X., JIA, L. & LIU, H. (2012). Data-driven fault detection of vertical rail vehicle suspension systems. In: *Proceedings of 2012 UKACC International Conference on Control*. Cardiff, United Kingdom.
- WEI, X., JIA, L. & LIU, H. (2013). A comparative study on fault detection methods of rail vehicle suspension systems based on acceleration measurements. *Vehicle System Dynamics* **51**(5), 700–720.
- WHITTLE, P. (1958). On the smoothing of probability density functions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **20**(2), 334–343.
- WILSON, N., WU, H. & KLOPP, A. (2020). Railway vehicle derailment and prevention. In: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press/Taylor & Francis Group, S. 374–413.

- WORDEN, K. & DULIEU-BARTON, J. M. (2004). An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring* **3**(1), 85–98.
- WORDEN, K., STASZEWSKI, W. J. & HENSMAN, J. J. (2011). Natural computing for mechanical systems research: A tutorial overview. *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**, 4–111.
- ZURMÜHL, R. & FALK, S. (1997). *Matrizen und ihre Anwendungen: Für Ingenieure, Physiker und angewandte Mathematiker*. Springer.