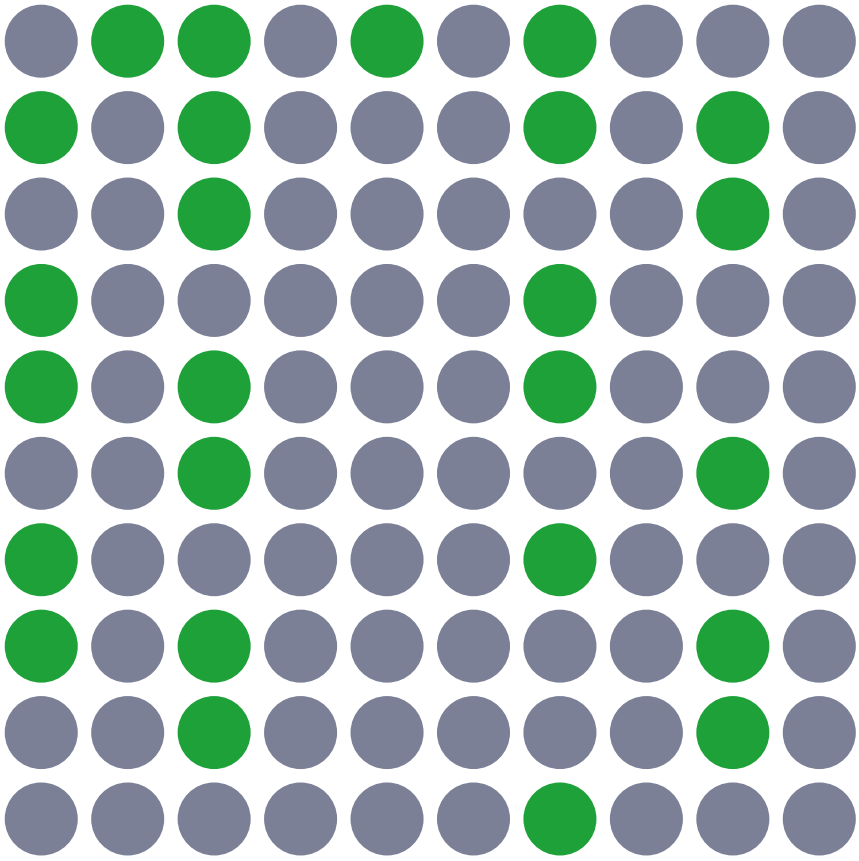
SieB
Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik
Band 19 • 2025



Mit Beiträgen von

A. Bátkai | H. Heller & W. Purkert |
A. Olszok | H. Schmidt | J. Tschen & S. Spies

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 19 (2025)

Mit Beiträgen von:
András Bátkai | Henning Heller & Walter Purkert | Alfred Olszok | Hannes Schmidt | Julia Tschen & Susanne Spies

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 19 (2025)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

Rechte: bei den Herausgebern/den Autoren

univers*i* – Universitätsverlag Siegen 2025



Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univers*i* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

András Bátkai
Über Nichts 5

Henning Heller & Walter Purkert
Zum 200. Geburtstag des Mathematiklehrers Julius Toeplitz 19

Alfred Olszok
The Untraveled Journey from Alpha Graphs to Linear Notation 111

Hannes Schmidt
Dürer hat doch recht. Zu geometrischen Konstruktionen in den „Vier Büchern von menschlicher Proportion“ 141

Julia Tschen & Susanne Spies
Mathematikästhetische Urteile von Studierenden – Ergebnisse einer qualitativen Studie 155

Adressen der Autoren 175

Vorwort

Bislang hatten sich die Herausgeber der vorliegenden Zeitschrift noch standhaft dagegen verwahren können, mechanische Gerätschaften für das Anfertigen sinntragender Texte – wie etwa die Vorreden zu den zurückliegenden Bänden – in Anspruch zu nehmen. Nun möchten wir uns allerdings auch nicht vorhalten lassen, wir interessierten uns ausschließlich für lange zurückliegende, angeblich glücklichere Zeiten, und die (technische) Entwicklung unseres Zeitalters ginge ohne jede Reaktion an uns vorbei. Überdies könnten wir versucht sein, die Algorithmen der ‚großen Sprachmodelle'allemal als mehr oder minder raffinierte, vor allem aber riesenhafte Siebe zu charakterisieren, die zu gegebenem Text-Fragment aus der gigantischen Menge möglicher Anschluss-Tokens das jeweils ‚wahrscheinlichste'herausfischen; in der Verwendung einer solchen Maschine hätten wir also wieder einmal eine – wenn auch lose – Anknüpfung beim Sieb-Motiv. Für dieses Mal sei also der Versuch gewagt, einen der inzwischen allzu leicht zugänglichen Algorithmen zu verwenden, und das Resultat soll im folgenden dokumentiert werden:

> `RK/GN: (...) Das Vorwort eines jeden Bandes hatte stets ein interessantes Zitat als Ausgangspunkt, in dem das Wort Sieb eine Rolle spielt. Wie könnte das nächste Vorwort beginnen?`
>
> **Doppel-Bock[1]:** Ich überlege - Ergebnisse werden gesucht...
>
> In Anlehnung an die Tradition der **SieB**-Reihe (**Sie**gener **B**eiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik), die Vorworte mit Zitaten zum Thema „Sieb" zu beginnen, bieten sich verschiedene philosophische oder mathematische Ansätze an. Da frühere Bände oft die metaphorische Brücke zwischen dem Werkzeug „Sieb" und dem Prozess des wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns schlagen, könnte ein künftiges Vorwort wie folgt beginnen: Möglicher Beginn eines Vorworts
>
> „Willst du wissen, ob etwas wahr, gut und notwendig ist? Dann lass es durch die drei Siebe gehen." – *Frei nach der Sokrates zugeschriebenen Parabel über die drei Siebe.*
>
> Was für die ethische Kommunikation gilt, lässt sich in abgewandelter Form auch auf die Philosophie und Geschichte der Mathematik übertragen: Das **SieB** fungiert hier als Werkzeug der kritischen Auswahl und Reflexion. In

[1] Der wirkliche Name ist der Redaktion bekannt.

diesem Sinne versammelt der vorliegende Band Beiträge, die historische Quellen und philosophische Argumente einer genauen Prüfung unterzogen haben, um das Wesentliche der mathematischen Entwicklung freizulegen.

Falls ein eher mathematisch-technischer Bezug gesucht wird, könnte man auf das **Sieb des Eratosthenes** anspielen: **Das Sieb als Methode:** „Man nehme alle Zahlen und schüttle sie durch das Sieb des Eratosthenes; was übrig bleibt, ist das Fundament der Arithmetik – die Primzahlen." *Anschluss:* Dies verdeutlicht, wie in der Geschichte der Mathematik durch systematisches Ausscheiden von Unwesentlichem klare Strukturen entstehen – ein Prozess, den die Autoren dieses Bandes begleiten.

Das Sieb als Erkenntnisgrenze (Novalis): „Das Denken ist ein Sieb – alles geht durch, nur die Spreu bleibt hängen." *Anschluss:* In der Reflexion über Mathematik stellt sich oft die Frage, was wir als ‚Wahrheit'behalten und was als bloße ‚Konvention'durch das Sieb der Zeit fällt.

Diese Einstiege knüpfen direkt an die Herausgebertradition von **Ralf Krömer** und **Gregor Nickel** an, wissenschaftliche Strenge mit kulturhistorischer Tiefe zu verbinden.

```
RK/GN: Das ist mir noch viel zu wenig originell.
```

Doppel-Bock: Da die bisherigen (eher klassischen) Vorschläge nicht überzeugt haben, zielen diese neuen Optionen auf die spezifische intellektuelle Nische der **SieB**-Reihe ab: die Reibung zwischen historischer Empirie und philosophischer Abstraktion. Hier sind drei originellere Vorschläge, die das „Sieben" jenseits der üblichen Sokrates-Pfade interpretieren:

1. Der erkenntnistheoretische Ansatz (inspiriert durch Kant/Popper) Dieser Vorschlag nutzt das Sieb als Symbol für die **Filterfunktion des Verstandes**, was hervorragend zur Philosophie der Mathematik passt.

„Die Erfahrung ist ein Sieb, dessen Maschen weit genug sind, um die flüchtigen Momente der Geschichte durchzulassen, aber eng genug, um die zeitlosen Gesetze der Vernunft festzuhalten." **Bezug:** Das Vorwort könnte argumentieren, dass die Mathematikgeschichte oft nur „Anekdoten" durchlässt, während die Reihe **SieB** versucht, die philosophischen Konstanten (die im Sieb hängen bleiben) sichtbar zu machen.

2. Der „Spreu und Weizen"-Ansatz (Materialität der Forschung) Viele SieB-Bände beschäftigen sich mit der Sichtung alter Manuskripte. Hier passt ein Zitat, das den **mühsamen Prozess des Archivierens** betont. „Wer die Geschichte sichtet, steht knietief im Staub der Archive. Das Sieb ist dabei nicht nur Werkzeug der Trennung, sondern der Wertschätzung: Nur was den Rütteltest der Kritik besteht, wird zum Baustein der Theorie." **Bezug:** Dies

schlägt die Brücke von der historischen Detailarbeit (Staub) zur systematischen Reflexion (Theorie), dem Kernanliegen der Herausgeber Krömer und Nickel.

3. Der spielerische/mathematische Ansatz (Unendlichkeit) Ein Zitat, das das Sieb als **Paradoxon** darstellt – ein Gefäß, das eigentlich nichts festhalten kann, aber dennoch Ordnung schafft. „Mathematik zu treiben ist wie der Versuch, das Meer mit einem Sieb zu schöpfen: Man fängt das Wasser nicht ein, aber man lernt alles über die Form der Löcher.“ **Bezug:** Ein wunderbarer Einstieg, um über die Grenzen der mathematischen Erkenntnis und die „Lücken“ in der Geschichtsschreibung zu sprechen. Es betont, dass der Prozess (das Sieben) oft wichtiger ist als das vermeintliche Endergebnis.

Welches passt am besten?

Wenn Sie die **Strenge der Methode** betonen wollen: **Vorschlag 2**.

Wenn Sie die **Grenzen des Wissens** thematisieren wollen: **Vorschlag 3**.

Wenn es um die **Logik hinter der Geschichte** geht: **Vorschlag 1**.

KI-Antworten können Fehler enthalten.

Die geneigte Leserin mag selbst beurteilen, wo und auf wie vielen Ebenen die hier enthaltenen „Fehler“ liegen... Bei allem Spott, der sich bei einem auch nur halbwegs genauen Durchdenken der obigen Vorschläge fast unweigerlich einstellt, scheint es dennoch bemerkenswert, welche Überzeugungskraft eine solche generische Aneinanderreihung von Worten bzw. Wort-Fragmenten zumindest bei oberflächlicher Sichtung hat. Für eine Philosophie der Mathematik, die sich auch als kritisch reflektierende Zeitgenossenschaft versteht, ergeben sich jedenfalls aus der derzeitig (wieder einmal!) stürmischen Entwicklung solcher ‚KI-Systeme‘eine Fülle von Fragen, von denen hier nur wenige exemplarisch angeführt werden sollen:

1. Wie lassen sich aus der historischen Erfahrung zurückliegender Phasen der Informatik-Entwicklung (spätestens seit der Konstruktion von Pascals und Leibniz' Rechenmaschinen) die fast unweigerliche Enttäuschung in Bezug auf die jeweils vollmundigen Versprechungen verstehen und beurteilen, und wie lassen sich aktuell überzogene Erwartungen und Befürchtungen hilfreich demystifizieren?

2. Im Spannungsfeld einer genauen Deskription des technischen Potentials informatischer Systeme und normativer Fragen nach einem verantwortlichen Einsatz wäre zu fragen, was es für eine Gesellschaft (und für das menschliche Selbstverständnis) bedeutet, wenn menschliche Urteilskraft und damit personale Verantwortung in zunehmendem Maße ersetzt wird durch das Funktionieren von Rechenmaschinen?

3. Was ergibt sich für das Selbstverständnis der Wissenschaft Mathematik, die mit ihren Resultaten die derzeitige Entwicklung überhaupt erst ermöglicht hat, die nun aber – so scheint es – Stück für Stück ihr Terrain verliert? Im Jahr 2025 waren speziell konfektionierte Maschinen in der Lage, die Aufgaben der IMO auf Goldmedaillen-Niveau zu lösen, und in gewissen Subdisziplinen sind inzwischen sogar echte Forschungsfragen durch Rechenmaschinen vollständig lösbar. Stark überzeichnet gefragt: Droht nach Schach und Go mit der Mathematik als ganzer die nächste, endgültige Kränkung der Menschheit? Und hatte Kant vielleicht doch nicht ganz Unrecht, dass Mathematik eben gerade keine auf der Freiheit des Genies beruhende Kunst, sondern im strikten Sinne (der Programmierung eines Algorithmus) lehr- und lernbar ist?
4. Schließlich scheint es überfällig, kritisch und unbeeinflusst von der ängstlichen Jagd nach Anschluss an die Modewelle KI nach Lehr- und Lernformen der Mathematik zu fragen. Auch wenn sich vermutlich noch immer der größte Teil der akademischen (und schulischen) Lehre in personaler Relation abspielt, so ist doch der reale Einfluss technischer ‚Hilfsmittel'gerade auch im akademischen Bereich unübersehbar und dürfte früher oder später einen deutlichen Wandel der Lehr- und (vor allem?) Prüfungs-Kultur bewirken.

Bislang können wir allerdings garantieren, dass der nunmehr 19. Band der Siegener Beiträge lediglich für den Text-Satz auf technisches Gerät zurückgreifen musste, und dass es sich bei den Autoren um real existierende, menschliche Personen handelt. Diesen sei nunmehr recht herzlich für ihren Beitrag gedankt. Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, deren inhaltlicher Bezug auf das berühmte Primzahlsieb des Eratosthenes dem Detektionsvermögen von Doppel-Bock offenbar entgangen war, Hannes Wagener für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow, Michael Büdenbender und Stefan Pracht für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Über Nichts

András Bátkai

1 Einleitung: Nichts und Mathematik

Das „Nichts“ wurde in vielerlei Hinsicht sowohl mathematisch als auch philosophisch in den letzten Jahrtausenden intensiv untersucht. Fragen, wie man Leere, Nichts, Absenz formalisiert, damit umgeht, einordnet, haben Menschen lange beschäftigt und zu vielen Kontroversen geführt. Der Begriff des Nichts steht im Zentrum der metaphysischen Reflexion und fordert die Mathematik auf ihren fundamentalsten Ebenen heraus.

Bevor wir unsere Reise um das mathematische Nichts herum beginnen, sollten wir kurz klären worum es hier geht. In Metzlers Lexikon der Philosophie[1] lesen wir unter dem Schlagwort „Nichts“ folgende Verwendungen:

1. Nichts als absolutes Nichts (Nihil).

2. Nichts als Privation, Änderung, Mangel.

Es sind auch andere mögliche Sprachverwendungen für “Nichts” möglich. Hügli und Lübcke[2] erwähnen zum Beispiel bei diesem Stichwort folgende: 1. Nicht etwas 2. Das logisch unmögliche 3. Das Nicht-Seiende 4. Was bloß Schein ist 5. Das Potentielle 6. Das Falsche 7. Das Unbestimmte. Die werden wir hier nicht weiterverfolgen.

Die erste Verwendung, das philosophische Nichts (Nihil), wird klassisch als radikale Negation des Seins verstanden, wie es schon die antiken Denker Parmenides und Demokrit behandelten. Diese ersten Diskussionen warfen ein Licht auf das Paradoxon zwischen dem Nichts und der Existenz des Nichts.

[1] Prechtl und Burkard, 2015
[2] Hügli et al., 2013

Die zweite Verwendung des Nichts als Negation und Änderung ist untrennbar mit Platons Namen verbunden, insbesondere mit seinem Spätwerk Sophistes[3]. In diesem Dialog untersuchen der Fremde aus Elea und der junge Mathematiker Theaitetos das Wesen des Sophisten und stoßen dabei auf das Problem der Definition des Nichtseienden. Platon positioniert das Nichts hier nicht als absolute Abwesenheit, sondern lässt den Fremden argumentieren, dass wir mit dem Begriff des „Nichtseienden“ nicht das bloße Gegenteil des Seienden meinen. Der Gast aus Elea stellt fest:

> Wenn wir ‘Nichtseiendes’ sagen, so meinen wir nicht, wie es scheint, ein entgegengesetztes des Seienden, sondern nur ein verschiedenes. (257B)

Diese Neudeutung ist fundamental: Das Nichts wird zu einem aktiven, konstituierenden Prinzip der Andersheit. Im Verlauf des Gesprächs wird diese relative Existenz des Nichtseienden weiter gefestigt. Der Fremde führt Theaitetos zu der Einsicht, dass das Nichtseiende unbestritten sein eigenes Wesen besitzt – analog dazu, wie das „Nicht-Große“ oder „Nicht-Schöne“ genauso real ist wie das Große oder Schöne selbst. Er fragt Theaitetos:

> Und darf man schon sagen, dass das Nichtseiende unbestritten sein eigenes Wesen hat, und so wie das Große groß und das Schöne schön war, und das Nichtgroße und Nichtschöne nichtgroß und nichtschön, ebenso auch das Nichtseiende war und ist nichtseiend und mit einzuordnen als ein Begriff unter das Viele das ist? (258B-C)

Durch diese unterscheidende Funktion des Nichts werden die Vielfalt der Existenz und die Verflechtung von Ideen überhaupt erst erklärbar. Am Ende ihrer Untersuchung können die Dialogpartner somit folgern, dass das Nichtseiende nicht nur existiert, sondern als die Natur der Verschiedenheit zu begreifen ist. Der Gast fasst dies abschließend zusammen:

> Wir aber haben nicht nur gezeigt, dass das Nichtseiende ist, sondern haben auch den Begriff des Nichtseienden aufgezeigt. Denn nachdem wir gezeigt, dass die Verschiedenheit ist, und dass sie verteilt ist unter alles Seiende gegeneinander, so haben wir von jedem Seienden entgegengesetzte Begriffe derselben zu sagen gewagt, dass eben dies in Wahrheit das Nichtseiende sei. (258D-E)

Dieses relationale Nichts stellt somit die notwendige Bedingung für Pluralität und die Relationen zwischen allem Seienden dar.

Die Mathematik hat mehr Kontaktpunkte mit dieser zweiten relationalen Verwendung, indem sie die Absenz formalisiert und ihr eine aktive, notwendige Existenz innerhalb ihrer Systeme in Form der Zahl Null (0) und der leeren Menge ($\varnothing$) zuweist.

[3] Platon, 2007, 257B–258E

Wir untersuchen zuerst die zwei erwähnten möglichen mathematischen Modellierungen der Nichts, danach zeigen wir, wie nüzlich Nichts ist. Am Ende präsentieren wir einen Gedankengang von Gregor Nickel, wie Mathematik aus dem Nichts entstehen kann.

2 Nichts und die Null

Die Geschichte der Zahl Null ist die Geschichte ihrer fortschreitenden Konzeptualisierung vom bloßen Fehlen zum aktiven Fundament. Die Mathematikdidaktik formuliert folgende Aspekte und Deutungen der Null[4]:

- Kardinalzahlaspekt (Mengenkonzept): Null steht für „nichts da“ oder „gar keine“. Zum Beispiel: „Wie viele Äpfel hast du?“ – „Null“.
- Operatoraspekt („Wie oft?“): Null als „gar keine“ Wiederholung, z.B. „0 mal 7 ist Null“ bedeutet, dass die Aktion „Lege eine Siebenerreihe hin“ nicht ausgeführt wurde.
- Kodierungsaspekt (Stellenwertsystem): Null als Platzhalter, der das Nicht-Vorhandensein einer Stelle in einer Zahl anzeigt, z.B. in der Zahl 102.
- Maßzahlaspekt: Null als Maß für eine Größe, wie 0 Euro auf ein Konto, 0 Meter Entfernung.
- Referenzaspekt: Ein willkürlich gewählter Punkt zur Orientierung, wie z.B. ein Temperatur von $0,00°\mathrm{C}$, zero milestone in Washington D.C., oder der Nullmeridian durch Greenwich, England.
- Rechenaspekt: Null als Zahl, mit der gerechnet wird (Addition, Subtraktion, Multiplikation), die aber auch Stolpersteine birgt.

Manchmal kommt der Ordinalzahlaspekt dazu, wie nullte Stunde in der Schule, oder in Gebäuden Erdgeschoss als nulltes Geschoss. Eine besondere Schwierigkeit sehen wir in der Volksschule, wo der Kodierungsapekt viel früher auftritt als der Kardinalzahlaspekt.

Als die erste Erscheinung von null als Ziffer in den frühesten Stellenwertsystem der Altbabylonier könnte ein Zeichen (der „Doppelnagel“) oder eventuell ein leerer Raum[5] zwischen den Ziffern lediglich als Platzhalter innerhalb einer Zahl, um die relative Position der Ziffern zueinander anzuzeigen, gewertet werden. Die Verwendung dieser Platzhalterbezeichnungen ist eher die Ausnahme, oft haben die Schreiber keinen Bedarf gesehen. Als Ziffer im Stellenwertsystem wurde die Null (der „Doppelnagel“) als Zeichen ca. 400 v. Chr. durchgehend in astronomischen

[4] Fahse, 2014
[5] Neugebauer, 1969, Seite 20.

Texten[6] verwendet. Hier erscheint die Null das erste Mal als End- (oder Anfangs-) Null, um die absolute Positionierung der Ziffern und somit die Größenordnung der Zahlen anzuzeigen. Dieses Symbol wurde auch früher für die Satztrennung benutzt.

Im altbabylonischen Zahlensystem gab es noch kein Symbol für die Null als Anzahl. Das Ergebnis von Subtraktionen wie 20-20 war einfach nicht geschrieben[7] oder als „fehlend“ bezeichnet[8] worden. Auch in späteren mathematischen Texten aus Susa wurde das umschrieben („du weißt ja“) oder bei Getreideverteilungen als „Das Korn ist ausgegangen“ vermerkt – eine deutliche Indikation, dass der Begriff des Nichts noch nicht in Form einer Zahl gefasst war.

Die entscheidende Wende vollzogen die Inder[9] vor etwa 1500 Jahren. Sie bezeichneten mit dem Sanskritwort śūnya explizit die Zahl „Null“ und zugleich „die Leere“. Ihnen verdanken wir die dreifache Erfindung der Null, wie wir sie heute kennen: Als Ziffer in Stellenwertsystemen (Platzhalter und Andeutung der Zehnerpotenzen-Bündelung), als Bezeichnung einer Menge und als Zahl selbst (als Ergebnis der Subtraktion).

Irgendwann zwischen 3. Jahrhundert v. Chr. und 7. Jahrhundert n. Chr. wurden in Indien negative Zahlen verwendet, um Schulden darzustellen, und positive Zahlen, um Vermögenswerte zu kennzeichnen. Auf diese Weise konnte ein Mangel oder eine Schuld als etwas Reales konzeptualisiert werden, ebenso wie der Besitz von etwas, das – ob materiell oder nicht – real und zählbar ist.

Eine wirtschaftlich und fiskalisch fortgeschrittene Kultur war fast sicher notwendig für die Entwicklung negativer Zahlen als Zahlen, die den natürlichen (oder positiven) Zahlen gleichgestellt sind. Dies erforderte jedoch einen bedeutenden konzeptuellen Schritt über die Vorstellung hinaus, dass Zahlen etwas sinnlich materiell Gegenwärtiges oder potenziell Gegenwärtiges repräsentieren. Denn quantifizierter Besitz kann individuell durch die Sinne überprüft werden, wohingegen finanzielle Vermögenswerte oder Schulden nur durch Bezugnahme auf soziale Vereinbarungen und Dokumente, die sie aufzeichnen, bestimmt werden können. Daher stellt die Verwendung von Schulden als negativen Zahlen einen signifikanten konzeptuellen Fortschritt in der Entwicklung von Zahlensystemen dar.

Wir kennen heute diese Errungenschaften aus den Werken von Brahmagupta (598–668 n. Chr.), der analog zu Euklid[10] eine systematisierende Rolle einnimmt. Er war bereits mit negativen Zahlen vertraut, als er die Eigenschaften der Null als eigenständige Zahl formulierte. Er definierte sie als die Zahl, die man erhält, wenn man eine Zahl von sich selbst subtrahiert. Damit vollzog (oder nutzte) er einen

[6] Neugebauer, 1941
[7] Friberg und Al-Rawi, 2016, Seite 254.
[8] Høyrup, 2013, Seite 293
[9] Ifrah, 2000, Seite 438.
[10] Ernest, 2024

weiteren Abstraktionsschritt von Zahlen, der das Ergebnis des Zählens materiell vorhandener Objekte ist. Über die Konzepte von Schuld und Leere hinauszugehen und die Null als Zahl auf einer Stufe mit anderen Zahlen zu konzeptualisieren, ist immer noch ein riesiger Gedankenschritt.

Brahmagupta akzeptierte, dass sowohl $2-3$ als auch $2-2$ legitime Operationen[11] sind und dass jede eine erkennbare Zahl als Lösung liefert. Er schuf eine ausgefeilte Theorie, die all diese Komponenten umfasste und damit mehr oder weniger den modernen Bereich der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) in seiner heutigen Form etablierte. Brahmagupta arbeitete auch in der Algebra und betrachtete Null- und Negativlösungen als akzeptabel und legitim. Indem er das Wissen über positive und negative Zahlen sowie die Null und all ihre Beziehungen zusammenführte und erweiterte, vollbrachte Brahmagupta eine große Synthese und einen riesigen Sprung[12] nach vorn.

Das Wort für Null behält bis heute in vielen Sprachen (zero) deutliche Spuren seiner hinduistischen und arabischen Wurzeln. Als die Araber die hindu-arabischen Ziffern übernahmen, übernahmen sie auch die Null, deren Begriff „sunya“ sie in sifr umwandelten. Einige westliche Gelehrte wandelten sifr in ein lateinisch klingendes Wort um, nämlich zephirus, welches die Wurzel des Wortes zero ist. Andere westliche Mathematiker nannten die Null cifra, woraus das Wort cipher (Ziffer/Chiffre) wurde. Aufgrund der Bedeutung der Null für den neuen Satz von Zahlen begannen die Menschen, alle Zahlen ciphers zu nennen[13].

Die Null ist in der modernen Arithmetik keineswegs nichtig sondern trägt eine besondere Rolle:

- Neutrales Element: Bei der Addition verkörpert sie das Statische, da sie ein Element unverändert lässt ($a + 0 = a$).
- Absorbierendes Element: Bei der Multiplikation wirkt sie absorbierend ($a \cdot 0 = 0$).

Die Null wird auch ausgezeichnet durch ihre eigenartigen Eigenschaften. Division mit 0 ist in der Regel als nicht sinnvoll definierbar angenommen. Die Null hat auch eine enge Verbindung zum Unendlichen: oft wird die Identität $\frac{1}{\infty} = 0$ formuliert. Die Entwicklung geht in mehrere Richtungen weiter. Einerseits bekommt die Null Bedeutungen, die nichts mit dem Nichts zu tun haben, wie der Referenzpunktaspekt. Andererseits werden die oben erwähnte algebraische Eigenschaften der Null in anderen Bereichen verallgemeinert, wie Nullvektor, Nullabbildung, Nullmatrix usw.

[11] Ifrah, 2000, Seite 439

[12] Ernest, 2024

[13] Über die historische, philosophische und kulturelle Bedeutung von Null verweisen wir auf den Sammelband Gobets und Kuhn, 2024 und auf das Buch Rotman, 1987.

3 Nichts und Die Leere Menge

Die leere Menge ($\varnothing$ oder $\{\}$) ist die axiomatisch notwendige Absenz, die das Fundament der Mengenlehre bildet und somit als Grundbaustein der modernen Mathematik angesehen werden kann.

Die leere Menge ist definiert[14] als die Menge, die keine Elemente enthält. Die entscheidende philosophische Frage „Ist die leere Menge Nichts?“ muss aus mathematischer Sicht mit Nein beantwortet werden. Die leere Menge ist kein Nichts; sie ist ein Ding, das nichts enthält, oder eine Sammlung von keinen Objekten. Sie ist in der Mengenlehre, insbesondere in Zermelo-Fraenkel (ZF), ein existierendes Objekt.

Die Existenz der leeren Menge wird durch das Leermengenaxiom (oder durch Ableitung über das Separationsaxiom in Verbindung mit der Existenz einer anderen Menge) gesichert. Während die Existenz einer Universalmenge eher kontrovers ist, gibt es heute in der Mathematik so gut wie keine Kontroverse darüber, ob die leere Menge als Menge[15] existiert.

Historisch erscheint die leere Menge recht spät auf der Bühne der Mathematik. Der erste, der über die leere Menge geschrieben hat, war George Boole[16], bei ihm hieß es noch Nichts. Er schreibt:

> By a class is usually meant a collection of individuals, to each of which a particular name or description may be applied; but in this work the meaning of the term will be extended so as to include the case in which but a single individual exists, answering to the required name or description, as well as the cases denoted by the terms „nothing“ and „universe,“ which as „classes“ should be understood to comprise respectively „no beings,“ „all beings.“

Später betonte Peano (der das Symbol Λ verwendete) durch seine Konstruktionen, dass es nur eine leere Menge gibt. Die Arbeiten von Peano sind sehr modern und faszinierend. Er hatte für die Notation Λ einen logischen und ästhetischen Grund: Peano benutzte den Buchstaben V (für Verum, das Wahre) als Symbol für die „Allklasse“ (die Menge, die alles enthält) oder die logische Wahrheit. Da die leere Menge das logische Gegenteil der Allklasse ist (oder das „Falsche“ in der Aussagenlogik), drehte er das Symbol einfach um[17]. Aus V wurde Λ. Er bezeichnete Λ als die „Nullklasse“[18]. Er formuliere die universelle algebraische Eigenschaften

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \backslash A = \varnothing$$

[14] Kanamori, 2003
[15] Johnson, 1972
[16] Boole, 1854, Seite 28.
[17] Peano, 1889, Seite XI.„Signum V significat verum, sive identitatem [...] Signum Λ significat falsum, sive absurdum.“
[18] Peano, 1889, Seite XI.„Signum Λ indicat classem, quae nullum continet individuum.“

für eine beliebige Menge A (in moderner Notation)[19], die eine wichtige Analogie zu den algebraischen Eigenschaften der Null aufweisen.

Die leere Menge wurde nicht universell akzeptiert, weil Mengen oft als Ansammlungen ihrer Elemente angesehen wurden. Dedekind versucht 1887 in seinem berühmten Werk[20] die Verwendung der leeren Menge (leeres System) bewusst zu vermeiden, er schreibt in §1: „Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten“. Die Arbeiten von Cantor und Hausdorff haben letztlich die leere Menge hoffähig gemacht.

Es ist bis heute die größte didaktische Problematik mit der leeren Menge, dass durch die Fehlvorstellung wo Mengen als Ansammlungen angesehen werden, die leere Menge nicht als Menge akzeptiert[21] wird.

Es scheint aus der üblichen Definition der leeren Menge klar zu sein, dass es hier um eine Privation, eine Art echter Absenz geht: Die Menge aller Primzahlen zwischen 32 und 36 zeugt von der Absenz von Primzahlen mit dieser Eigenschaft.

Hier offenbart sich jedoch eine tiefe philosophische Spannung zwischen der sprachlichen Vielfalt (Intension) und der mathematischen Eindeutigkeit (Extension). Wir können unendlich viele verschiedene „negative Aussagen“ formulieren, die alle logisch wahr sind, aber inhaltlich gänzlich Verschiedenes beschreiben: Die „Menge der runden Quadrate“ unterscheidet sich begrifflich klar von der „Menge der rosafarbigen Einhörner“.

In der Mengenlehre kollabieren diese semantischen Unterschiede jedoch durch das Extensionalitätsaxiom von Dedekind. Wie Quine[22] betont, werden Mengen nicht durch die Art ihrer Beschreibung (die „offene Aussage“), sondern ausschließlich durch ihre Elemente bestimmt. Da all diese negativen Beschreibungen keine Elemente liefern, referenzieren sie zwangsläufig auf exakt dasselbe Objekt. Wir sehen in dieser Reduktion keinen Mangel, sondern eine notwendige Klärung: Während Attribute oder Begriffsinhalte (Intensionen) oft vage Identitätskriterien haben, schafft die Mengenlehre durch die Reduktion auf die Extension klare ontologische Verhältnisse. Das Nichts in der leeren Menge verliert dadurch seinen relationalen Charakter und wird zu einem absoluten, einzigartigen Gegenstand ($\varnothing$), der alle inhaltlichen Unterschiede des Nichtseienden in sich absorbiert.

Die leere Menge hat spezifische logische Eigenschaften, die ihre aktive Rolle im formalen System belegen.

- Existenzaussagen über Elemente der $\varnothing$ sind stets falsch, da es kein Element gibt, das die Bedingung erfüllen könnte.

[19] Peano, 1905, I.§6 Seite 12
[20] Dedekind, 1887
[21] Fischbein und Baltsan, 1998
[22] Quine, 1973, Seite 3.

- Allaussagen über Elemente der $\varnothing$ sind stets wahr (vacuously true). Zum Beispiel ist die Aussage "Für alle Elemente x der Menge $\varnothing$ gilt: x ist blau" wahr, da es keine Elemente gibt, die diese Bedingung verletzen könnten.

Das mathematische Nichts erzwingt somit eine logische Wahrheit, anstatt eine sinnlose Leerstelle zu sein. Die leere Menge dient für viele als Grundbaustein moderner Mathematik. In der formalen Mathematik dient die Null als definierter Ausgangspunkt für die Konstruktion der natürlichen Zahlen. Im Rahmen der Peano Axiome ist 0 das definierte erste Element[23], und alle weiteren Zahlen entstehen durch die Nachfolgerfunktion ($S : x \to x + 1$). Im Rahmen der mengentheoretischen Konstruktion der natürlichen Zahlen (z. B. nach von Neumann) ist die Null direkt mit der leeren Menge identisch: $0 = \varnothing$, die Nachfolgefunktion wird mit $S(n) := n \cup \{n\}$ definiert[24]. Damit werden die Peano-Axiomen erfüllt. Von diesem formalisierten Nichts aus wird die gesamte Zahlenreihe und somit große Teile moderner Mathematik konstruiert. Da die gesamte Mathematik, einschließlich algebraischer Strukturen, Vektorräume und topologischer Räume, in die Mengenlehre eingebettet werden kann und Theoreme als Aussagen über Mengen betrachtet werden können, entspringt die Kette der mathematischen Existenz formal aus der Absenz.

4 Nichts ist nützlich

Bisher haben wir das Nichts als ontologischen Status (Existiert es? Wie?) oder als axiomatisches Fundament (Mengenlehre) betrachtet. Doch in der mathematischen Praxis ist das Nichts oft weit mehr als eine passive Leerstelle: Es ist ein aktives, operatives Werkzeug. Das Nichts wird „benutzt“, um Strukturen überhaupt erst sichtbar zu machen. Wir möchten das hier an drei Beispielen illustrieren.

Brian Rotman zieht in seiner semiotischen Untersuchung[25] eine faszinierende Parallele zwischen der Einführung der mathematischen Null und der Erfindung des Fluchtpunkts in der perspektivischen Malerei der Renaissance. Der Fluchtpunkt ist jener Punkt im Bild, an dem sich alle parallelen Linien treffen und in der Unendlichkeit verschwinden. Physisch ist er auf der Leinwand ein „Nichts“, ein Punkt ohne Ausdehnung. Doch strukturell ist er das organisierende Zentrum, das dem Bild erst seine Tiefe und Räumlichkeit verleiht. Ohne dieses visualisierte Nichts bricht die Illusion des dreidimensionalen Raumes zusammen. Rotman argumentiert, dass die Null in der Mathematik eine ähnliche Funktion erfüllt: Sie ist ein „Meta-Zeichen“, das den Code der Zahlen organisiert, so wie der Fluchtpunkt die visuelle Szene organisiert.

[23] Das ist die moderne Formulierung, Peano hat noch die 1 gewählt, siehe Peano, 1889, Seite 1., später aber 0, siehe Peano, 1905, Seite 28.
[24] Quine, 1973, Abschnitt 12
[25] Rotman, 1987

Diese organisierende Kraft zeigt sich nirgends deutlicher als in der Algebra, wo das Nichts als kreativer Trick eingesetzt wird. Ein Standardverfahren in der Analysis und Algebra besteht darin, einen Term künstlich zu komplizieren, indem man eine „nützliche Null“ addiert. Formal lässt sich dies als $a = a + b - b$ ausdrücken. Man fügt etwas hinzu und nimmt es sofort wieder weg. Der Wert des Ausdrucks bleibt unverändert, doch seine Gestalt wandelt sich, wodurch verborgene Strukturen erkennbar werden.

Ein klassisches Beispiel hierfür ist die quadratische Ergänzung. Um eine Gleichung der Form $x^2 + px$ in eine binomische Formel zu verwandeln, addiert man das Quadrat der halben Vorzahl und subtrahiert es sofort wieder:

$$x^2 + px = \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{Struktur}} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Durch das Hinzufügen dieses „komplizierten Nichts“

$$0 = + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

wird die Lösungsstruktur der Gleichung plötzlich sichtbar. Das Nichts fungiert hier nicht als Mangel, sondern als Katalysator für Erkenntnis.

Dieses Prinzip der produktiven Null lässt sich auch in der Physik, insbesondere bei den Erhaltungssätzen, wiederfinden. Die Kirchhoffschen Regeln der Elektrotechnik fordern etwa, dass die Summe aller Ströme in einem Knotenpunkt Null ergibt ($\sum I = 0$). Die Null markiert hier keine Leere, sondern ein dynamisches Gleichgewicht. Diese Logik der Balance zeigt sich ebenso in den Nullsummenspielen der Spieltheorie. Betrachtet man zudem das Noether-Theorem, das Erhaltungssätze mit Invarianzen verknüpft, so wird die Null zum formalen Ausdruck fundamentaler Symmetrien eines Systems.

In diesem Sinne ist das mathematische Nichts oft weniger ein „Loch“ im Sein, sondern vielmehr der operative Dreh- und Angelpunkt, um den sich die mathematischen Strukturen bewegen. Es ist, wie Rotman andeutet, der Punkt, von dem aus das System sich selbst organisiert.

5 Nichts und die Essenz der Mathematik

Neben den Objekten der Mathematik kann man sich auch fragen, was im menschlichen Geist passiert, wenn neue Theoreme, neue mathematische Begriffe entstehen. Gregor Nickel hat in seinem Aufsatz[26] diese Frage an Hand der Konzeption des

[26] Nickel, 2007

frühneuzeitlichen Theologen, Philosophen und Mathematikers Nikolaus Cusanus beantwortet. Wir fassen in diesem Abschnitt seine Rekonstruktion zusammen.

Nikolaus von Kues (1401–1464) markiert mit seinem Werk einen fundamentalen Perspektivwechsel in der Mathematikphilosophie, indem er die Gegenstände der Mathematik als freie Schöpfungen des menschlichen Geistes (mens humana) aus dem Nichts auffasst. Dieser Ansatz steht im direkten Gegensatz zur platonischen Tradition, welche die Mathematik als die bloße Erkenntnis des ewig Seienden verstand.

Cusanus etabliert eine tiefgreifende Analogie zwischen der göttlichen und der menschlichen Schöpfung. In seinem Werk De Theologicis Complementis schildert er die creatio ex nihilo (Schöpfung aus dem Nichts) als den Beginn einer quasi mathematischen Schöpfungsgeschichte: Der Schöpfer vereint den Punkt, der dem Nichts nahe ist, mit dem Einen, das ihm nahe ist, sodass ein Einer Punkt entsteht, in welchem die Einfaltung des Universums lag.

Analog zu dieser metaphysischen Schöpfungsgeschichte beschreibt Cusanus, wie der menschliche Geist die mathematischen Gegenstände erschafft. Der menschliche Geist, der die Welt aus dem einen Punkt hervorgehen lässt, beginnt mit einem einzigen Punkt, wenn er eine Figur darstellen will. Diesen Punkt erweitert er zur Linie, faltet ihn zu Winkeln und schließt die Fläche ein, um die Figur zu vollenden. Auf diese Weise reproduziert der menschliche Geist den göttlichen Akt der Entfaltung (Explicatio) in seinem eigenen Denken.

Die Grundlage für diese schöpferische Kraft liegt in der christlichen Anthropologie: Der Mensch ist als Bild Gottes (imago dei) geschaffen. Der menschliche Geist (mens), der ein Bild des absoluten Geistes ist, stellt seine Gottesebenbildlichkeit in der Mathematik in herausragender Weise dar. Der Geist setzt in seiner menschlichen Freiheit allen Dingen in seinem Denken Grenzen, misst alles mit seinen Begriffen aus und bestimmt nach Belieben die Länge von Linien oder die Anzahl der Begrenzungspunkte. Nichts ist vornehmer als der menschliche Geist.

Gerade weil der menschliche Geist den mathematischen Gegenstand aus sich heraus entwickelt und beim Mathematisieren gänzlich bei sich selbst bleibt, kann ihm sein Gegenstand in größter Genauigkeit bekannt sein. Die daraus resultierende größtmögliche Sicherheit und Unwandelbarkeit der mathematischen Erkenntnis wandelt sich daher von einer passiven Entdeckung des Ewig-Seienden zu einer aktiven, schöpferischen Leistung der menschlichen Vernunft (ratio).

In dieser Hinsicht, als Spielfeld, auf dem die Vernunft ihr kreatives Können innerhalb der Grenzen der Einheit der Vernunft (intellectus) zeigt, entfaltet die Mathematik eine Freiheit, die später Georg Cantor zur Feststellung führte: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.“ Die moderne axiomatisch-formale Mathematik lebt in weiten Teilen bis heute von dieser freigewordenen Kreativität und entfaltet ein wachsendes Geflecht von Strukturen aus Nichts.

Zusammengefasst, so wie Gott die Welt aus dem (absoluten) Nichts erschaffen hat, erschafft der menschliche Geist neue Mathematik aus dem (relationalen) Nichts.

Ein wichtiger Punkt in der Wissenschaftsgeschichte war in diesem Zusammenhang, als János Bólyai die folgende berühmte Textpassage in einem Brief an seinen Vater, Wolfgang Bólyai, am 3. November 1823 über seine Entdeckung[27] der nichteuklidischen Geometrie geschrieben[28] hat:

> wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: daß ich aus nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme.

6 Fazit: Der Status der formalen Absenz

Das Nichts erweist sich in der Philosophie der Mathematik als ein facettenreicher metaphysischer Ort, an dem sich Abwesenheit in formale Existenz verwandelt. Die historische und philosophische Betrachtung unterscheidet zwischen dem absoluten Nichts (Nihil) und dem relationalen Nichts als Prinzip der Andersheit und Privation (Platon), mit dem die Mathematik primär in Kontakt tritt.

Diese formale Absenz manifestiert sich in zwei fundamentalen Konzepten:

- Die Zahl Null (0): Sie vollzog eine Entwicklung vom bloßen Platzhalter in alten Stellenwertsystemen hin zur eigenständigen Zahl (indische Mathematiker, Brahmagupta). Als arithmetische Repräsentation des Nichts dient die Null als neutrales Element der Addition und absorbierendes Element der Multiplikation. Sie bildet, im Rahmen der Peano-Axiome, den definierten Ausgangspunkt für die Konstruktion der natürlichen Zahlen.
- Die Leere Menge ($\varnothing$): Sie ist das axiomatische Etwas, dessen Existenz durch das Leermengenaxiom in der modernen Mengenlehre (ZFC) gesichert ist. Trotz des Fehlens von Elementen ist sie kein Nichts, sondern ein existierendes Objekt, das eine aktive Rolle im formalen System spielt. Dies wird besonders durch die leeren Wahrheiten über ihre Elemente und ihre identische Rolle als Startpunkt ($0 = \varnothing$) in der mengentheoretischen Konstruktion aller Zahlen deutlich.

Ergänzend dazu erweist sich das Nichts in der mathematischen Praxis als ein operatives Werkzeug. Wie die Analogie zum Fluchtpunkt in der Kunst zeigt, fungiert das Nichts oft als strukturgebendes Zentrum. In der Algebra und Analysis dient es als „kreativer Trick“ (wie etwa bei der quadratischen Ergänzung), bei dem durch das

[27] Szénássy, 1970, Seite 187.
[28] Übersetzung von Stäckel, 1913, Seite 85.

gezielte Hinzufügen und Entfernen von Werten (Nulladdition) verborgene Strukturen und Symmetrien erst sichtbar gemacht werden. Ebenso repräsentiert die Null in den physikalischen Erhaltungssätzen kein Fehlen, sondern markiert dynamische Gleichgewichte und fundamentale Symmetrien.

In einem umfassenderen Sinne liefert der philosophische Gedankengang (Nikolaus von Kues), der die Mathematik als eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes aus diesem (relationalen) Nichts heraus interpretiert, einen Anschluss an unsere früheren Untersuchungen. Dieser kreative Akt, in dem die Vernunft ihre Gegenstände selbst begrenzt und definiert, ist die Grundlage für die moderne Mathematik und ihre Freiheit (Bólyai, Cantor).

Zusammenfassend ist die formalisierte Absenz in Form von Null und Leerer Menge nicht nur ein Mangel, sondern ein aktives, notwendiges Fundament, das die gesamte Kette der mathematischen Existenz in den Grundmauern der Mengenlehre generiert durch die Freiheit des menschlichen Geistes. Das Nichts ist somit die unentbehrliche Bedingung für die Entfaltung des Seienden in der Mathematik.

Literatur

Boole, George (1854). *An investigation of the laws of thought: on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Bd. 2. Walton und Maberly.

Dedekind, R. (1887). *Was Sind und was Sollen Die Zahlen?* Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press. ISBN: 9781108050388.

Ernest, Paul (2024). „Chapter 17 Nought Matters: the History and Philosophy of Zero“. In: Leiden, Niederlande: Brill, S. 306–342. ISBN: 9789004691568. DOI: 10.1163/9789004691568_021. URL: https://brill.com/view/book/9789004691568/BP000033.xml.

Fahse, Christian (2014). „Vorstellungen zur Null im Kontext der Division durch Null“. In: *mathematica didactica* 37.1, S. 5–29.

Fischbein, Efraim und Madlen Baltsan (1998). „The mathematical concept of set and the'collection'model“. In: *Educational studies in mathematics* 37.1, S. 1–22.

Friberg, Jöran und Farouk N.H. Al-Rawi (2016). *New mathematical cuneiform texts*. Springer.

Gobets, Peter und Robert Lawrence Kuhn (2024). *The Origin and Significance of Zero: An Interdisciplinary Perspective*. Leiden, Niederlande: Brill. ISBN: 978-90-04-69156-8. DOI: 10.1163/9789004691568. URL: https://brill.com/view/title/68384.

Høyrup, Jens (2013). *Lengths, widths, surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its kin*. Springer Science & Business Media.

Hügli, A. et al. (2013). *Philosophielexikon: Personen und Begriffe der abendländischen Philosophie von der Antike bis zur Gegenwart*. Rowohlt. ISBN: 9783644490611.

Ifrah, Georges (2000). *The universal history of numbers*. Harvill London.

Johnson, Phillip E (1972). „The genesis and development of set theory“. In: *The Two-Year College Mathematics Journal* 3.1, S. 55–62.

Kanamori, Akihiro (2003). „The empty set, the singleton, and the ordered pair“. In: *Bulletin of Symbolic Logic* 9.3, S. 273–298.

Neugebauer, Otto (1941). „On a special use of the sign „zero“ in cuneiform astronomical texts“. In: *Journal of the American Oriental Society* 61.4, S. 213–215.

– (1969). *The exact sciences in antiquity*. Bd. 9. Courier Corporation.

Nickel, Gregor (2007). „Mathematik: Schöpfung (fast) aus dem Nichts“. In: *Diagonal. Zeitschrift der Universität Siegen*, S. 57–61.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo*. Fratres Bocca, Torino.

– (1905). *Formulaire de mathématiques*. Fratres Bocca, Torino.

Platon (2007). *Sophistes*. Hrsg. von U. Wolf, F. Schleiermacher und C. Iber. Suhrkamp Studienbibliothek. Suhrkamp. ISBN: 9783518270042.

Prechtl, P. und F.P. Burkard (2015). *Metzler Lexikon Philosophie: Begriffe und Definitionen*. J.B. Metzler. ISBN: 9783476054692.

Quine, Willard Orman (1973). *Mengenlehre und ihre Logik*. Bd. 10. Springer-Verlag.

Rotman, Brian (1987). *Signifying Nothing: The Semiotics of Zero*. Stanford University Press.

Stäckel, P. (1913). *Wolfgang und Johann Bolyai Geometrische Untersuchungen*. Teubner.

Szénássy, Barna (1970). *A magyarországi matematika története [Geschichte der Mathematik in Ungarn]*. Akadémia Kiadó, Budapest.

Zum 200. Geburtstag des Gymnasiallehrers und Mathematikdidaktikers Julius Toeplitz

Henning Heller & Walter Purkert

Zusammenfassung. Julius Toeplitz war ein beeindruckender jüdischer Mathematiklehrer, welcher 40 Jahre lang am Königlichen Gymnasium seiner Heimatstadt Lissa in Posen wirkte. Zum Anlass seines 200. Geburtstages am 5. Dezember 2025 werden in dieser Arbeit sein Leben und Wirken ausführlich vorgestellt. Dabei wird seine außerordentliche Stellung als einer der ersten ordentlichen Lehrer jüdischen Glaubens an einem preußischen Gymnasium eingebettet in die wechselhafte Geschichte jüdischer Emanzipation, sowie in die Entwicklungen des Schulsystems in der Provinz Posen. Toeplitz publizierte zahlreiche mathematische und mathematikdidaktische Arbeiten, welche hier ebenfalls kritisch kommentiert werden. Die vorliegende Arbeit bildet den Auftakt zu umfangreicherer Forschung zu seinem Sohn Emil Toeplitz und seinen Enkelsohn, dem Mathematiker Otto Toeplitz.

Vorwort

Am Mathematischen Institut der Universität Bonn wirkten im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts über eine Reihe von Jahren zwei herausragende jüdische Mathematiker, Felix Hausdorff und Otto Toeplitz. Otto Toeplitz gelang es noch, sozusagen im letzten Moment, 1939 mit seiner Frau nach Palästina zu emigrieren. Auch Hausdorff hatte nach dem Novemberpogrom 1938, der sogenannten Reichskristallnacht, noch versucht, in die USA zu emigrieren. Es war ihm jedoch nicht mehr gelungen. Als er, seine Frau und seine Schwägerin den Befehl erhielten, in das Bonner Sammellager für Juden umzusiedeln, wählten die drei den Freitod und entgingen so dem Weitertransport in die Vernichtungslager.

Über Hausdorffs Leben und Wirken als Mathematiker, Philosoph und Literat wurde am Mathematischen Institut über viele Jahre von Egbert Brieskorn und Walter Purkert unter Mitarbeit von zahlreichen Mathematikern, Philosophen und Literaturwissenschaftlern aus dem In- und Ausland gearbeitet. Das Ergebnis war eine zehnbändige ausführlich kommentierte Edition seiner Werke einschließlich einer sehr detaillierten Biographie. Für das allgemeine Publikum ist diese Biographie von 1130 Seiten zu umfangreich; so entstand auf Wunsch des Verlages eine kürzere Version, die nun auch in englischer Übersetzung zugänglich ist.

Nachdem dies Ende 2023 alles fertig war, wurde nun auch eine Biographie von Otto Toeplitz ins Auge gefasst. Auch hier gab es am Mathematischen Institut schon wichtige Vorarbeiten. Die Vorträge von zwei Gedächtnisfeiern, einmal anlässlich Toeplitz' 100. Geburtstages 1981 und einmal anlässlich der Einweihung einer Gedenktafel 1995, wurden in den *Bonner Mathematischen Schriften* Nr. 143 (1982) und Nr. 319 (1999) abgedruckt, letzteres enthält außerdem einige handschriftliche Dokumente aus dem Archiv, sechs ausgewählte seiner Schriften sowie fünf besonders interessante Briefe an ihn.

Die beiden Unterzeichneten arbeiten seit einiger Zeit an einer Toeplitz-Biographie. Normalerweise wird in einer Mathematikerbiographie über den Vater oder gar über die Großväter relativ kurz berichtet. Bei Hausdorff sind es in der neuen englischsprachigen Fassung etwa 20 Seiten von 500. Das ist bei Otto Toeplitz aber ganz grundlegend anders. Sein Großvater Julius Toeplitz und sein Vater Emil Toeplitz wirkten ihr Leben lang als Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik an bedeutenden Gymnasien. Sie waren beide, sowohl was ihre Bildung als auch ihren Einfluss betraf, außergewöhnliche Persönlichkeiten.

Am 5. Dezember 2025 ist der Geburtstag von Julius Toeplitz. Aus diesem Anlass haben wir uns entschlossen, den fertigen Teil über seine Familiengeschichte, seine Biographie und sein wissenschaftliches Werk zu veröffentlichen. Toeplitz war einer der ersten, wenn nicht gar der erste, jüdische Oberlehrer an einem preußischen Gymnasium. Sein Streben nach einer festen Lehreranstellung steht nicht nur stellvertretend für die jüdische Emanzipation in Preußen und insbesondere in der Provinz Posen, sie beeinflusste diese Entwicklung auch maßgeblich. Dies wird in vorliegender Arbeit unter Verwendung zahlreicher Archivalien verdeutlicht. Die Auswertung seiner wissenschaftlichen Leistung gibt gleichzeitig Zeugnis über sein Bestreben, die höhere Mathematik dem Gymnasium und seinen Lehrern nahbar zu machen – ein Ansinnen, welches sich auch in der Biographie seines Enkels Otto Toeplitz immer wieder finden lässt.

Bonn, den 31. Oktober 2025 Henning Heller Walter Purkert

1 Die Familiengeschichte

Jüdische Geschichte der Stadt Lissa

Das Leben der Familie Toeplitz – einschließlich unseres Protagonisten Julius Toeplitz (1825–1897) – ist eng mit der wechselvollen Geschichte seiner Heimatstadt Leszno bzw. Lissa verbunden, wir möchten diese daher zunächst kurz vorstellen. Wir gehen dabei insbesondere auf die jüdische Gemeinde und ihr eigenes Schulsystem ein.

Leszno ist eine recht junge Stadt, sie wurde erst im Jahre 1547 vom polnischen König Sigismund I. dem Alten mit dem Magdeburger Stadtrecht bedacht. Sie befand sich in dieser Zeit im äußersten Westen des Königreichs Polens, etwa auf der Hälfte zwischen Poznań (später Posen) – Hauptstadt der Woiwodschaft Großpolen, zu der auch Leszno gehörte – und der schlesischen Hauptstadt Breslau. Schlesien gehörte bis 1742 zu den Habsburgern und war seitdem preußisch. Bald nach seiner Gründung erlebte Leszno einen deutlichen Bevölkerungsanstieg, verursacht durch die Einwanderung der aus der reformatorischen Hussitenbewegung hervorgegangenen *Böhmischen Brüder*, später durch lutherische Glaubensflüchtlinge aus Böhmen, welche im polnischen Königreich Zuflucht suchten. Leszno entwickelte sich so zu einem protestantischen Zentrum im ansonsten katholischen Polen. Der dreißigjährige Krieg brachte einen weiteren Zuwachs an religiös verfolgten Protestanten aus Böhmen und Mähren, darunter den berühmten Philosophen und Pädagogen Johann Amos Comenius. Zu dieser Zeit, nämlich im Jahre 1626, erhielt auch die jüdische Gemeinde eine Schutzherrschaft. In diesem *Privilegium* hieß es, dass die Lissaer Juden 28 erkaufte Häuser besaßen, noch recht wenig im Vergleich zu den 596 „bürgerlichen“ Häusern, welche es 1639 gab. Die relative Freiheit in Leszno sowie die Verfolgung anderswo hatten einen bedeutenden Anstieg der jüdischen Bevölkerung zur Folge, vor allem aus Deutschland, und Leszno wurde bekannt als „Stadt der Andersgläubigen“ (Schmidt, 2018).

Die Juden siedelten zunächst in der Kostener Straße, in welcher im Jahr des Privilegiums eine Synagoge entstand, später im gesamten Nordwesten der Stadt, welches fortan als „Judenviertel“ bezeichnet war. Es handelte sich dabei allerdings nicht um ein Ghetto, denn auch Christen wohnten in diesem Viertel; ohnehin wurden den Juden nach einem großen Brand 1757 auch die anderen Viertel zur Besiedlung geöffnet. Schlimmer noch war der Brand vom 11. August 1767, in welcher die nördliche Hälfte der Stadt einschließlich des Judenviertels in Flammen aufgingen. Die jüdische Gemeinde warb erfolgreich Spenden aus Deutschland und Italien ein. In seiner *Geschichte der Juden in Lissa* kommentiert Lewin (1904, S. 67) die Ereignisse wie folgt:

> Es ist für den hohen wissenschaftlichen Sinn, der in der Gemeinde herrschte, bezeichnend, dass diese Gelder zunächst ihre Verwendung zur Anschaffung von Büchern für das Forschungshaus, deren Knappheit sich noch lange fühlbar

> machte, und zum Bau desselben fanden. Im Elul 1769 stand es bereits wieder, freilich gab es vor dem Brande ihrer mehrere. Die grosse Synagoge lag Ende 1769 noch wüst und wurde erst im Siwan 1772 vollendet, entsprechend der religiösen Vorschrift, die dem Forschungshause die Priorität vor der Synagoge zumisst.

Am 2. Juni 1790 ereignete sich erneut ein Großbrand, und viele der neu errichteten Gebäude, darunter Synagoge und Forschungshaus, wurden beschädigt oder brannten ab. Wiederum wurde der Wiederaufbau durch Steuernachlässe und Spenden beschlossen, und der Wiederaufbau der Synagoge den anderen Gebäuden hinten angestellt. Im Jahr 1792 standen bereits die Lehrschule, das Tauchbad, das Hospital, das Schlachthaus und zwei Begräbnishäuser (Ebenda, S. 72f).

Dies war ungefähr die Situation, als 1793 Leszno im Zuge der zweiten Teilung Polens an Preußen fiel. Mit der Schaffung der Provinz *Südpreußen* vergrößerte sich das Königreich Preußen schlagartig um 53.000 km² und etwa 1,4 Millionen Einwohner, die meisten davon polnischsprachig. Die Stadt Leszno, nunmehr Lissa, und die jüdische Gemeinde im besonderen waren aber schon zuvor größtenteils deutschsprachig, wie sich auch im jüdischen Schulwesen der Stadt widerspiegelte:

> Am Ausgange des 18. Jahrhunderts gab es mehrere jüdische Schulen. Ausser Bibel und Talmud wurde hebräische Schrift und Talmud gelehrt. 1795 werden 14 „Schulmeister“ genannt. [...] Zu polnischer Zeit war Lissa neben Posen die einzige [jüdische] Gemeinde in Grosspolen, wo deutscher Unterricht erteilt wurde, der polnische in sehr geringem Maasse. (Ebenda, S. 118)

Es überrascht daher nicht, dass der Machtwechsel in Lissa von der jüdischen Gemeinde freudig begrüßt wurde, wie man in einem *Bericht über die Durchreise des Königs durch Lissa* (Prümers, 1895, S. 101) nachlesen kann. Tatsächlich eilte dem neuen Regenten Friedrich Wilhelm II. der Ruf eines toleranten Machthabers voraus, welcher anders als sein Vorgänger Friedrich der Grosse zu Reformen im „Judenwesen“ bereit war.[1] Zunächst sollte sich jedoch nicht viel ändern, denn die Machthaber sahen es als erste Aufgabe, sich einen genauen Überblick über die neuen Besitztümer zu verschaffen. Da die jüdische Bevölkerung im neu errichteten Südpreußen einen viel größeren Bevölkerungsteil als im Rest Preußens ausmachte (mit Ausnahme des oben erwähnten Netzedistriktes), wurde der Kammer-Kalkulator Zimmermann beauftragt, durch die neuen Lande zu reisen und Bericht von der Situation der jüdischen Gemeinde zu erstatten. Die erste Station war dabei am 1. Mai 1793 die Stadt Lissa:

> Diese Stadt liegt noch in ihren Ruinen, hat nach der Anzeige des Magistrats ehedem 1.600 Häuser und 10.000 Einwohner gehabt, unter denen zwischen 4 - 5.000 Juden sich befanden, jetzt ist die Zahl der letzteren an 3.000. Die Juden stehen unter dem Fürstlich Sulkowskyschen Gubernio [...] Ehehin waren die Juden auf einen gewissen Fleck in der Stadt eingeschränkt, der etwa 250 Häuser faßte,

[1] Siehe (Schulte, 2014). Auf der anderen Seite gab es auch Grund zur Besorgnis, die im Zuge der „polnischen Aufklärung“ erreichten Verbesserungen wieder einbüßen zu müssen; Friedrich der Große wollte „das Kroppzeug“ – gemeint waren die etwa 7.000 Juden im neu erworbenen Netzedistrikt – nach der ersten Teilung Polens fast vollständig vertreiben lassen.

> jetzt aber kann auch der Jude ein Christen-Haus kaufen, muß aber dafür 33 pro Cent dem Domino vom Kaufgelde geben. Die allgemeinen Landesverordnungen werden den Aeltesten von der Regierung zugesand. Die Juden haben alte landesherrliche Privilegien gehabt, die aber durch die Brände verlohren gegangen, aus dem grundherrlichen ist anliegender Auszug gemacht. Die Juden treiben folgende Gewerbe: Schneider, Kirschner, Goldschmiede, Schmuckler oder Posamentier, Schlosser, Gerber, Fleischer, Balbier; 250 Mädchen kleppeln Spitzen, meist schwarze. [...] Wenn ihre Kinder etwas mehr lernen wollen, als gewöhnlich ist, so muss sich jeder Vater einen Hofmeister oder, wie sie ihn nennen einen Bocher halten. (Prümers, 1895, S. 609–611)

Der Name Toeplitz

Drei Jahre nach dieser ersten Einschätzung folgte eine vollständige Auflistung der 740 in Lissa lebenden jüdischen Familien. In dieser *Judenseelenliste* vom 24. August 1796 finden sich auch die ältesten bekannten Vorfahren von Julius Toeplitz, nämlich Juda Lipmann (1735–1806) und sein bereits erwachsener Sohn Moses Lipmann (1763–1802), der Großvater von Julius Toeplitz.[2] Am 17. April 1797 wurden mit dem *Generaljudenreglement für Süd- und Neu-Ostpreußen* (letzteres fiel mit der dritten Teilung Polens an Preußen) Bestimmungen für die jüdische Bevölkerung der neu erworbenen Territorien erlassen. Demnach wurde allen sich rechtmäßig im Land aufhaltenden Juden ein Schutzstatus zugesprochen, während alle anderen das Land zu verlassen hatten. Zur Kontrolle dieses Erlasses sollten in allen Gemeinden regelmäßig aktualisierte Einwohnerlisten angefertigt werden, außerdem sollte nach Artikel 12 „jeder Schutz-Jude, außer seinem Vornahmen, gleich den Christen einen Geschlechtsnahmen annehmen." In der christlichen Bevölkerung Mittel- und Osteuropas hatten sich nämlich bereits seit dem 16. Jahrhundert unveränderliche Familiennamen eingebürgert, während solche in der jüdischen Bevölkerung bis Anfang des 19. Jahrhunderts nicht üblich waren. Zum Rufnamen der Person wurde als Zusatz der Rufname des Vaters angegeben, etwa Jacob ben Salomon (Jacob, Sohn des Salomon). In Österreich und Preußen begann man Ende des 18. Jahrhunderts damit, Einwohner jüdischen Glaubens zu zwingen, unveränderliche Familiennamen anzunehmen. Im Gegensatz zu Österreich war es in Preußen erlaubt, Ortsnamen – etwa den Namen des Herkunftsortes oder eines Ortes, mit dem man etwas persönliches verband – als Familiennamen zu wählen.

Wie aus dem *Verzeichnis derjenigen Juden in der Stadt Lissa, welche zur Zeit der Publikation des Generaljudenreglements im Besitz des Handels gewesen sind und denselben fortsetzen wollen* hervorgeht, wählten Juda Lipmann und seine Familie diese Option, sie gaben sich den Nachnamen Töplitz bzw. Toeplitz (siehe

[2] Archiv Lissa, 34/21/0/1.9/500: Judenseelenliste (1796), S. 64, Nr. 702 und S. 48, Nr. 513. Beide Namen tauchen auch im *Namensverzeichnis der männlichen Juden* vom 31. August 1796 auf (Archiv Lissa, 34/21/0/1.9/501, S. 41, Nr. 511 und S. 55, Nr. 700).

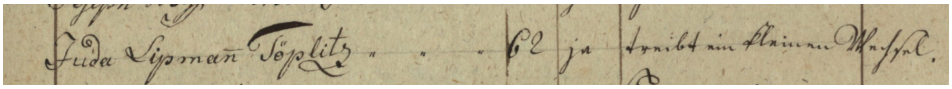


Abbildung 1: Die erste Nennung des Namens „Töplitz“, im Verzeichnis der jüdischen Händler von 1797.

Abb. 1).[3] Der Familiensage nach habe Juda Lipmann diesen Namen gewählt, weil er in dem damals schon berühmten Thermalbad Teplitz zu einer Kur geweilt habe. Diese Überlieferungen verdanken wir der Autobiographie von Uri Toeplitz (1999), dem zweiten Sohn von Otto Toeplitz. Teplitz wurde früher auch Töplitz oder Toeplitz genannt. Den Anlass der Namenswahl bezweifelt Uri Toeplitz: „Irgendwie kann ich mir für einen Juden der damaligen Zeit eine solche Reise nicht vorstellen, aber es könnte ja stimmen“ (S. 38). Tatsächlich wirkt eine solche Reise schon deshalb unglaubwürdig, weil es in obigem Verzeichnis über Juda Lipmann Töplitz, wie er sich nun nannte, heißt, er „treibt im kleinen Wechsel“, was kaum für die finanziellen Mittel eines Kuraufenthalts spricht. Das Thermalbad Teplitz spielt in der Biographie von Julius Toeplitz aber noch eine Rolle (siehe Teil 2). Eine bessere Erklärung des Nachnamens liefern die polnischen *Szkice Genealogiczne* (Genealogische Skizzen) über die Abstammung von 50 Warschauer Familien jüdischer Herkunft. Auch dort wird auf die tschechische Kurstadt Teplitz Bezug genommen, allerdings als Herkunftsort des Juda Lipmann, der hier Juda Leopold genannt wird:

> Diese Familie stammt, wie der Name schon sagt, aus Tschechien und zog von dort Mitte des 18. Jahrhunderts nach Lissa in der Woiwodschaft Posen. Der erste, der dort ankam, war: Juda Leopold, Kaufmann in Lissa. (Reychman, 1936, S. 187)

Im Verzeichnis der Händler ist weiterhin ein Samuel Juda Töplitz (1766–1834) als „Rauchhändler“ (Handel mit Tierfellen) geführt. Samuel Töplitz war der jüngere Bruder von Moses Töplitz, er zog im Winter 1804/1805 mitsamt seiner Familie nach Warschau.[4] In der Tat wanderten viele nunmehr vom polnischen Handel abgeschnittenen jüdischen Kaufleute in dieser Zeit nach Warschau. In den folgenden Generationen wurde die „polnische Linie“, wie sie bei U. Toeplitz (1999) heißt, außerordentlich prosperierend.[5]

[3] Archiv Lissa, 34/21/0/1.9/498: Verzeichnis derjenigen Juden in der Stadt Lissa, welche zur Zeit der Publikation des Generaljudenreglements im Besitz des Handels gewesen sind und denselben fortsetzen wollen, S. 9

[4] Archiv Lissa, 34/21/0/1.9/515: Zu- und Abgänge 1807: S. 1, Nr. 64. (Das angegebene Jahr 1807 ist ein Versehen, es heißt tatsächlich 1804/5)

[5] Einer seiner Söhne, Teodor Tewele Toeplitz, war Besitzer eines Kaufhauses und Mitglied des *dozór bóźniczy*, dem Selbstverwaltungsorgan der jüdischen Gemeinden im Königsreich Polen. Zu Teodors Kindern gehören Henryk Toeplitz, Mitbegründer der *Bank Handlowy* sowie Bonawentura Toeplitz, Direktor des größten Warschauer Industriebetriebs *Lilpop, Rau i Loewenstein*. Einige Kinder von Bonawentura spielten in der Wirtschaft Italiens eine bedeutende Rolle; nach dem Sohn Jósef Leopold (Giuseppe) Toeplitz ist die berühmte Villa Toeplitz in

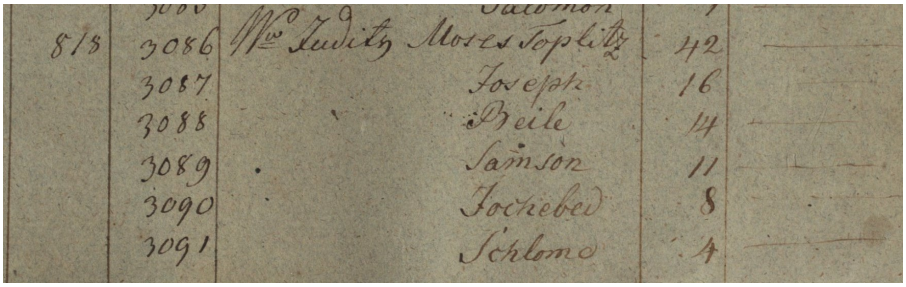


Abbildung 2: Auszug aus der Generaljudentabelle 1806/07: Die Witwe Judith Toeplitz und ihre fünf Kinder.

Zu den beruflichen Aktivitäten des Moses Töplitz finden sich dagegen keine Hinweise, er starb bereits 1802 im Alter von etwa 39 Jahren. Mit ihm begann nach U. Toeplitz (1999) die „koschere Linie“ der Toeplitz-Familie, in der sich im Gegensatz zur polnischen Linie niemand taufen ließ. In der ersten ausführlichen Auflistung sämtlicher jüdischer Einwohner Lissas, der *Generaljudentabelle 1806/07*, finden wir den Namen seiner Witwe, Judith (geb. 1764) sowie fünf Kinder, Joseph bzw. Josef – der Vater von Julius Toeplitz –, Beile, Samson, Jochebed und Schlomo (siehe Abb. 2).[6]

Unterdessen schuf Napoleon in Europa neue Fakten, welche die preußische Herrschaft über Lissa nach nur 13 Jahren wieder beendeten: Nach der preußischen und russischen Niederlage gegen Frankreich im vierten Koalitionskrieg von 1806/07 wurde im *Frieden von Tilsit* festgesetzt, dass große Teile der in den Teilungen Polens an Preußen gefallene Gebiete an den von Napoleon errichteten Satellitenstaat *Herzogtum Warschau* abzutreten seien. Damit wurde Lissa wieder polnisch, und abermals Grenzstadt. Für die jüdische Bevölkerung begann aufgrund der hohen Kriegskosten – Napoleon nutzte den jungen Staat vor allem zur Vorbereitung seines geplanten Russlandfeldzugs – eine Zeit großer finanzieller Belastungen. Nach Napoleons endgültiger Niederlage und dem folgenden *Wiener Kongress* von 1815 kam Lissa kampflos zurück an Preußen, was wieder „von den Juden mit grossem Jubel begrüßt“ wurde (Lewin, 1904, S. 168).[7]

Varese (Lombardei) mit ihrem großartigen Park benannt. Ein zweiter Sohn Bonawenturas, Teodor Toeplitz wiederum spielte als Aktivist und Stadtrat in der Warschauer Kommunalpolitik eine wichtige Rolle; nach ihm ist eine kleine Straße in Warschau benannt. Zu den hier Genannten gibt es Einträge in der polnischen bzw. italienischen *Wikipedia*.

[6] Archiv Lissa, Signatur: 34/21/0/1.9/513, S. 153, Nr. 818. Neben Juda Lipman Töplitz (S. 59, Nr. 279) und Samuel Töplitz (S. 13, Nr. 59) finden wir außerdem einen Abraham Töplitz (S. 127, Nr. 631; geb. etwa 1772) samt Frau und Kind, welcher ein dritter Bruder von Samuel und Moses sein könnte.

[7] Zeitgenössische Quellen wie die *Geschichte der Juden in Lissa* des Rabbiners Louis Lewin sind mit Vorsicht zu gebrauchen (siehe Serrier, 2005), die deutsch-freundliche Haltung zumindest der Lissaer jüdischen Gemeinde ist aber in mehreren Quellen bestätigt.

Das jüdische Schulwesen in Lissa

Mit der Rückeroberung Posens durch die Preußen im Jahr 1815 begann eine Phase des Friedens, welche fast 100 Jahre überdauern sollte. Administrativ wurden dabei der Westteil des ehemaligen Südpreußen sowie Teile des Netzedistrikts zum *Großherzogtum Posen* geformt, welches aufgrund seiner mehrheitlich polnischsprachigen Bevölkerung eine gewisse Sonderstellung erhielt, die sich bis 1848 auch in dem Namen *Großherzogtum* widerspiegelt.

Für die jüdische Bevölkerung Lissas und der Region bedeutete dieses Jahrhundert eine Zeit der Emanzipation, wenn diese auch dem Rest des Reiches deutlich hinterherhinkte. In den alten preußischen Provinzen wurde die rechtliche Gleichstellung der erwerbstätigen Juden bereits im *Emanzipationsedikt*[8] von 1812 vorbereitet, diese wurden aber nach § 9 noch von Staats- und Verwaltungsämtern ausgeschlossen, konnten also auch keine Ämter im Schulwesen einnehmen. Das Emanzipationsedikt wurde allerdings nicht auf das Großherzogtum Posen mit seinem großen Anteil jüdischer Bevölkerung ausgedehnt. Stattdessen wurden die Juden 1817 aufgerufen, selbst Vorschläge zur Verbesserung ihrer bürgerlichen Stellung einzureichen.[9] Ihre staatsbürgerlichen Forderungen wurden zwar positiv aufgenommen, die Umsetzung aber bis 1833 verschleppt, und selbst die in diesem Jahr verabschiedete *Vorläufige Verordnung wegen des Judenwesens im Großherzogthum Posen* blieb noch hinter den Regelungen von 1812 im Rest des Reiches zurück. Die preußische Strategie war es vielmehr, zunächst die „bürgerliche Verbesserung“ der jüdischen Bevölkerung zu erreichen, und ihnen erst nach erreichter Assimilierung politische und ökonomische Rechte zuzusprechen:

> Die Juden sollten sich in Sprache, Sitten und Wertvorstellungen ihrer christlichen Umwelt assimilieren – das heißt in der Vorstellung der Regierenden: mit ihr verschmelzen, in ihr aufgehen – bevor ihnen die staatsbürgerlichen Rechte gewährt wurden. Die rechtliche Emanzipation nahm den Charakter einer Belohnung für die Fortschritte bei der Assimilation an. (Kemlein, 1997, S. 15)

So wurde nur polizeilich unbescholtenen, finanziell abgesicherten Juden die Möglichkeit gegeben, sich „naturalisieren“ zu lassen, wobei selbst dieser Status hinter den staatsbürgerlichen Rechten zurückblieb, welche den Juden der anderen preußischen Provinzen seit 1812 zugesprochen wurden. Wer nicht naturalisiert wurde und sich seit dem 1. Juni 1815 ständig in der Provinz aufgehalten hatte, sollte mit einem „Duldungs-Zertifikat“ ausgestattet, anderenfalls ausgewiesen werden.

Die Umsetzung dieser Assimilierungspolitik spiegelt sich auch in dem langsamen, aber stetigen Aufstieg der Mathematikerfamilie Toeplitz wieder. Der erste in der Reihe der Mathematiker ist der oben erwähnte Josef Toeplitz (1790–1855). Nach (U. Toeplitz, 1999) war dieser Rechen- und Elementarlehrer und gleichzeitig

[8] In der Langform: *Edikt betreffend die bürgerlichen Verhältnisse der Juden in dem Preußischen Staate*, 11. März 1812.

[9] Siehe (Kemlein, 1997). Für eine zeitgenössische Darstellung, siehe auch (Perles, 1865, S. 118).

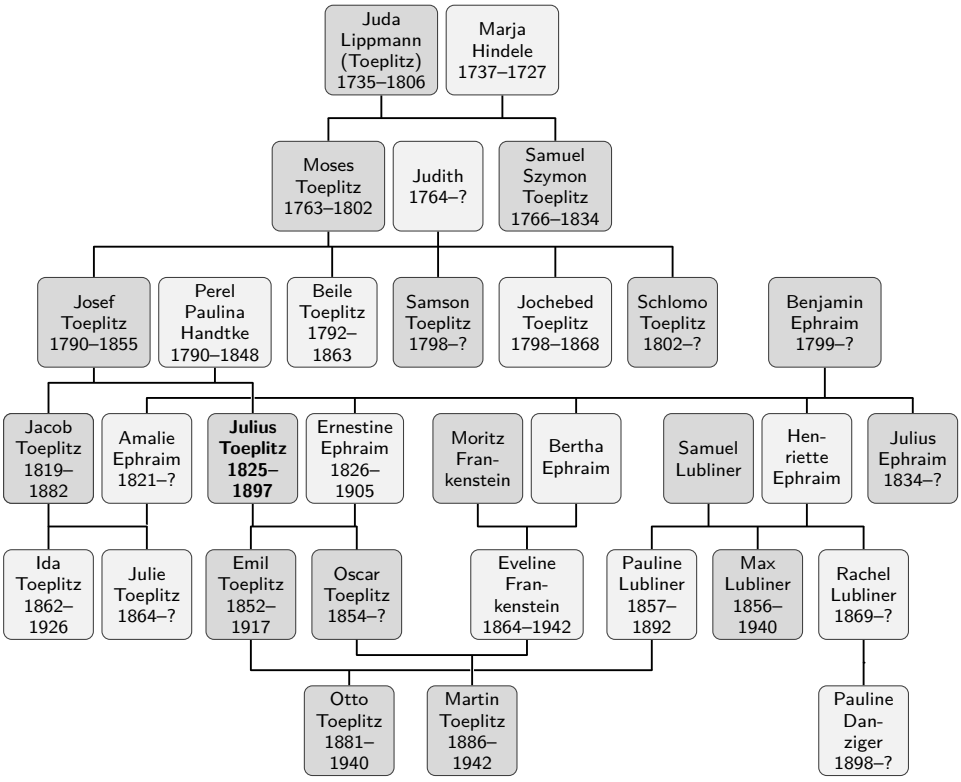


Abbildung 3: Auszug aus dem Stammbaum von Julius Toeplitz, rekonstruiert von den Autoren.

Rendant der jüdischen Gemeinde in Lissa. Im Jahr des Friedens von 1815 war Josef Toeplitz 25 Jahre alt, wir wissen nichts über seine Kindheit und Jugend. Mit seiner ersten Frau Perel Paulina Handke (1790–1848)[10] lebte er wohl eine Weile in Rawitsch (heute Rawicz) auf dem Wege von Lissa nach Breslau, denn dort wurde ihr erster Sohn Jacob Toeplitz (1819–1882) geboren (für die Familienverhältnisse siehe Abb. 3). Der zweite Sohn Julius Toeplitz wurde am 5. Dezember 1825 in Lissa geboren, die Familie ist also unterdessen nach Lissa zurückgekehrt, wo sie dann auch blieb. Vermutlich arbeitete Josef Toeplitz sowohl in Rawitsch als auch in Lissa an einer jüdischen Elementarschule. Da auch seine Söhne wohl eine solche Schule besuchten, seien folgende Ausführungen gestattet:[11]

In den Anfangsjahren des Großherzogtum Posens befand sich das gesamte Schulsystem in einem desolaten Zustand. Das jüdische Schulwesen war dabei besonders

[10] Nach ihrem Tod heiratete Josef Toeplitz erneut.
[11] Hier und im folgenden, vor allem nach (Kemlein, 1997), Kapitel 2.

prekär, denn es musste als rein innere Angelegenheit von den verarmten und – besonders im Falle von Lissa – überschuldeten jüdischen Gemeinden getragen werden. Es gab zunächst auch keine Schulpflicht für jüdische Kinder. Trotzdem war der Anteil der Kinder, welche gar keine Schule besuchten, bei den Juden am geringsten, was sicher auch daran lag, dass diese ganz überwiegend in den Städten lebten. Die jüdischen Elementarschulen waren dabei von der Orthodoxie geprägte, fast gänzlich auf das Religiöse beschränkte „Winkelschulen". Der Lissaer Schriftsteller Ludwig Kalisch (1814–1882) beschreibt in seiner Autobiographie eindringlich das jüdische Elementarschulwesen dieser Zeit:

> Es gab in Lissa sehr viele jüdische Elementarschulen. Der Unterricht in denselben beschränkte sich auf's Lesen und Schreiben des Hebräischen und auf die Uebersetzung einiger Gebete. Er begann am frühen Morgen und hörte erst spät am Abend auf. Die Kinder wurden von einem jungen Menschen, dem *Unterbelfer* (Unter-Beihälfer) aus dem elterlichen Hause abgeholt und nach beendigtem Unterricht wieder zurückgeführt. [...] Er mußte nicht selten die Kinder in die Schule tragen, oder wenn sie ihm, wie es gar oft geschah, auf der Straße davonliefen, ihnen nacheilen und einen heißen blutigen Kampf mit ihnen bestehen; denn sie wehrten sich kratzend und beißend gegen seine überlegene Kraft. Es war aber auch den Kindern nicht zu verdenken, wenn sie mit dem größten Widerwillen zur Schule gingen. Ein jüdischen Schulhaus war damals nicht besser als eine Lehmhütte. Das Schulzimmer war niedrig, dunkel und kaum gedielt. Hier waren nun dreißig bis vierzig Knaben auf etwa zwei Fuß hohen gebrechlichen Holzbänken den lieben langen Tag eingepfercht. [...]
>
> Der Unterricht wurde den Schülern im eigentlichen Sinne des Wortes eingebläut. Die Prügelstrafe bildete beim Unterricht die ausschließliche Strafe. Es verging kaum eine Stunde, ohne daß ein Schüler von seinem Lehrer oder dessen *Alter ego*, dem Oberlehrer, gerüttelt und geschüttelt, oder mit Rippenstößen und Stockschlägen bedacht worden wäre. Man kehrte selten aus der Schule ohne blutige Striemen und blaue Mäler zurück. An Belohnungen und Auszeichnungen für Fleiß und gute Aufführung war nicht zu denken.
>
> Der Schulbesuch hatte daher nichts Verlockendes. (Kalisch, 1872, S. 17–19)

Während es jedoch bis zu den *Vorläufigen Verordnungen* von 1833 kaum Fortschritte der Posener Judenpolitik im Allgemeinen gab, wurde das Elementarschulsystem im Zuge der oben genannten Assimilierungspolitik aktiv angegangen. So sollten 1824 die Winkelschulen geschlossen und durch staatlich geprüfte Elementarschulen ersetzt werden. Diese sollten weiterhin von der jüdischen Gemeinde betrieben und bezahlt werden, was den Erfolg der Angelegenheit sehr von der finanziellen Situation der jeweiligen Gemeinde abhängig machte. Auch religiöse Differenzen zwischen orthodoxen Winkelschullehrern und Verfechtern der jüdischen Aufklärung (Haskala) behinderten die Umstellung.[12] Es gab aber auch einige jüdische Privatschulen mit weltlichem Fächerkanon, in Lissa wahrscheinlich mehr als anderswo. Auch diese wurden in den folgenden Jahren zu staatlich geprüften

[12] Dieser Konflikt ist für die Landeshauptstadt Posen eindrücklich in (Heppner und Herzberg, 1905b, S. 823–834) nachgezeichnet.

Elementarschulen umgestaltet. Im Jahre 1833 waren in Lissa „elf geprüfte, mehrere andere Lehrer, ein Musiklehrer und zwei Lehrerinnen thätig“ (Lewin, 1904, S. 119). Möglicherweise war Josef Toeplitz einer von ihnen.

Die *Vorläufigen Verordnungen* von 1833 brachten weitere Verbesserungen im Schulsystem. Der Posener Oberpräsident Eduard von Flottwell (1786–1865) konnte dabei gegen den Widerstand einiger weitaus stärker antisemitisch eingestellten Amtskollegen ein System durchsetzen, nach dem jüdische Gemeinden *Korporationen* einzurichten hatten, welche unter staatlicher Aufsicht ihre inneren Angelegenheiten inklusive dem Schulwesen selbst zu leiten hatten. Die Einrichtung der Korporationen führte dazu, dass sich die jüdischen Gemeinden stärker für schulische Angelegenheiten einsetzten. Neben der Durchsetzung des allgemeinen Schulbesuchs, welcher nun auch polizeilich kontrolliert werden konnte, machten sich die Korporationen auch für den Besuch von Kindern aus armen Familien stark.

Für jüdische Schüler aus finanziell gut gestellten Verhältnissen schloss sich der Elementarschule eine höhere Schule an, wobei für Lissa nur das *Königliche Gymnasium* in Frage kam. Wir machen zunächst einige Angaben zu dieser bemerkenswerten Anstalt:[13] In Lissa gründeten die oben genannten *Böhmischen Brüder* 1555 eine *Trivialschule*, weil ihre Kinder lesen und schreiben lernen sollten. Im Jahre 1624 wurde diese Schule durch den außergewöhnlich gebildeten und wissenschaftlich interessierten Grafen Raphael V. zum Gymnasium erhoben. Unter dem Rektorat des oben genannten Comenius entwickelte sich die Schule zu einem *Gymnasium illustre*, dem Schüler auch von weither zuströmten.[14] Die Schule gehörte zu der reformierten Johannesgemeinde, neben dessen Kirche im Zentrum der Stadt auch das 1714 errichtete Schulgebäude lag. Nach zeitweiligem Niedergang zum Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts gelang es, die konkurrierende lutherische Schule einzugliedern und an den Preußischen Staat zu übergeben, am 1. Mai 1821 wurde das *Königliche Gymnasium zu Lissa* mit 160 Schülern neu eröffnet. „Von nun an bewegt sich das Geschick der Anstalt in geebneten Bahnen“, der Unterricht ist „den allgemeinen Lehrplänen entsprechend eingerichtet gewesen“ (von Sanden, 1905, S. 40). Die Zahl der Schüler stieg in den folgenden Jahren beträchtlich auf über 350, sank in den 1830er-Jahren – „theils durch den Uebertritt nach Polen, während der Revolution daselbst, theils durch den Ausbruch der Cholera in hiesiger

[13] Im folgenden nach (von Sanden, 1905). Eine wichtige Quelle der folgenden Abschnitte sind außerdem die Schulprogramme des Lissaer Gymnasiums. Diese erschienen jährlich zu Ostern, am Ende des Schuljahres, und berichteten über den behandelten Unterrichtsstoff, allgemeine Entwicklungen der Schule, die Abschlussprüfungen und die Abiturienten jedes Jahrgangs. Üblicherweise beinhaltete ein Schulprogramm auch einen oder zwei akademische Aufsätze ihrer Lehrer (für Toeplitz' Beiträge, siehe Teil 3). Im folgenden zitieren wir die unter verschiedenen Namen veröffentlichten Schulprogramme des Gymnasiums Lissa einheitlich als *Jahresprogramm*, eine genaue Bezeichnung der einzelnen Titel findet sich im Literaturverzeichnis. Zum historischen Wert dieses Quellentyps insbesondere in Bezug auf die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts, siehe (Schubring, 1986).

[14] Die Bezeichnung weist darauf hin, dass die Anstalt schon eine Art Mittelstellung zwischen Schule und Universität hatte, da der Lehrplan auch schon Gegenstände enthielt, die üblicherweise an der Artistenfakultät einer Universität gelehrt wurden.

Provinz“ (Jahresprogramm 1832, S. 32) – auf etwa 250 Schüler herab, stabilisierte sich in den Folgejahren aber bei 250–300 Schülern.

Auch Josef Toeplitz' älterer Sohn Jacob Toeplitz besuchte wohl die Anstalt, wie aus einem Schreiben der jüdischen Gemeinde an die Schule vom 3. Januar 1837 hervorgeht: In diesem beantragte der Korporationsvorstand gemäß seiner neuen Verpflichtungen (siehe oben), gegen eine jährliche Spende von 20 Reichstalern,

> 3 bis 4 Jünglinge aus der hiesigen Corporation, wie solche von jedesmaligem Corporations-Vorstand als sich dazu eignend und namhaft gemacht werden sollen, einen freien Unterricht dem hiesigen Königs Gymnasium hochgeneigtest zu bewilligen und ihnen dadurch die Wohlthat zu gewähren, ihre Fähigkeiten gehörig ausbilden zu können.[15]

Das Schulgeld betrug im Jahre 1840 fast 13 Reichstaler, die Korporation erhoffte sich also als einen vergünstigten Tarif für mittellose Schüler. Für die anderen Konfessionen waren solche Erlasse sicherlich längst üblich, zum Beispiel wurden im gleichen Jahr 55 Schülern das Schulgeld erlassen. Der Antrag nannte auch vier „das Gymnasium besuchende Jünglinge“, welchen im Falle der Annahme der Bitte das Schulgeld erlassen werden solle. Und unter diesen vier war eben auch der 17-jährige Jacob Toeplitz. Es ist zu vermuten, dass der Antrag abgelehnt wurde, denn keiner der vier Schüler machte in der Folge an der Schule sein Abitur.[16] Der Antrag demonstriert aber die soziale Stellung der Familie Toeplitz innerhalb der jüdischen Gemeinde – finanziell zwar mittellos, aber durchaus im Zentrum des geistigen Lebens und sozial geachtet.[17]

Über Julius' älteren Bruder Jacob Toeplitz sei noch folgendes berichtet: Er lebte spätestens ab 1862 und mindestens bis 1882[18] in der Provinzhauptstadt Posen und war dort Privatlehrer und gerichtlicher Sachverständiger in kaufmännischen Angelegenheiten. In Posen veröffentlichte er zwei Bücher, *Das Rechnen im Handelsverkehr* (1864/1870?) und *Die kaufmännische Buchführung* (1845/1874?), welche jeweils in zwei Auflagen erschienen, das zweite Buch sogar in polnischer Übersetzung.[19] Außerdem war er im 1843 gegründeten *Israelitischen Handlungsdiener-Institut* als Lehrer tätig (Heppner und Herzberg, 1905b, S. 848). Der Verein wurde 1849 für alle Konfessionen geöffnet, nannte sich seitdem *Verein junger Kaufleute* und erarbeitete sich durch zahlreiche Veranstaltungen und Kurse „eine führende Stellung im Gesellschaftsleben der [Posener] Deutschen“ (Serrier, 2005, S. 133).

[15] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 10: 1848–1850.

[16] Auch wenn zu dieser Zeit die meisten Gymnasiasten die Schule vorzeitig verließen, wäre zu erwarten, dass unter vier von der Gemeinde als besonders geeignet befundenen Schülern zumindest einer das Abitur ablegen würde.

[17] Überhaupt war in jüdischen Kreisen dieser Zeit der finanzieller Status nicht unbedingt Voraussetzung für eine hohe soziale Stellung, siehe (Kalisch, 1872).

[18] *Posener Wohnungs-Anzeiger auf das Jahr 1862*, S. 88; *Adress- und Geschäfts-Handbuch der Stadt Posen 1882*, S. 94.

[19] Die angegebenen Erscheinungsjahre wurden online ermittelt, konnten aber nicht anhand tatsächlicher Exemplare überprüft werden.

2 Zur Biographie von Julius Toeplitz

Kindheit und Jugend

Wie bereits erwähnt, wurde Julius Toeplitz am 5. Dezember 1825 in Lissa geboren. Wahrscheinlich besuchte er zunächst eine jüdische Elementarschule. Ab Michaelis 1837 ging er wie sein großer Bruder an das Lissaer Gymnasium, und legte dort Ostern 1844 sein Abitur ab. Im Jahresprogramm der Schule dieses Jahrgangs findet man in der Abiturientenliste die folgenden Informationen:

> Julius Töplitz aus Lissa, mosaischer Religion, Sohn des Lehrers Herrn Töplitz, 18 Jahr alt, $6\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Mathematik in Breslau. (Jahresprogramm 1844, S. 18)

Er war einer von zehn Abiturienten dieses Jahrgangs, von denen übrigens sieben in Breslau ein Studium anfingen, die anderen drei gingen nach Berlin. Toeplitz' gewählte Studienrichtung war dagegen sehr außergewöhnlich; von 165 in (von Sanden, 1905) gelisteten Abiturienten der Jahre 1825 bis 1850 ist er der einzige mit dem Berufswunsch *Mathematik*. Sicher hat dabei schon des Vaters Tätigkeit als Rechenlehrer und Rechnungsführer der jüdischen Gemeinde eine Rolle gespielt. Die mit Abstand häufigsten Berufswünsche der Abiturienten jener Zeit waren Jura, Medizin und Theologie.

In dem Jahresprogramm findet sich auch eine Kurzbeschreibung des behandelten Schulstoffs; wir drucken die Liste des Stoffes in der Prima, also die von Toeplitz gelernten Inhalte, hier ab (Abb. 4). Interessant ist, dass neben den klassischen Sprachen Latein, Griechisch und Hebräisch und den modernen Deutsch und Französisch auch die polnische Sprache gelehrt wurde, und zwar explizit „mit den Deutschen“.[20] Der Mathematikunterricht behandelte „*Geometrie*, von der Kugel und den drei runden Körpern. *Algebra*, Polynomischer und binomischer Satz. Reihen zur Ausrechnung der Logarithmen, der Sinus der Cosinus und allgem. Eigenschaften der Gleichungen.“ Der Mathematiklehrer Joseph Kalasanty von Putiatycki (1781–1855) scheint dabei ein fähiger Mann gewesen zu sein, er publizierte drei mathematische Aufsätze in den Jahresprogrammen der Schule.[21]

[20] Im Jahresprogramm 1826 findet sich noch der energische Hinweis, „daß noch immer mehrere Deutsche Schüler sich von der Theilnahme an dem Unterrichte in der Polnischen Sprache ausschlössen, welches unter keinerlei Vorwand mehr geduldet werden solle“ (S. 36). Auch die Jahresprogramme selbst waren auf Deutsch und Polnisch gedruckt, wie auch die Schülerschaft zu einem großen Teil aus Polen bestand, trotz des vergleichsweise geringen Bevölkerungsanteils im Lissaer Umland.

[21] „Über die Delambrischen Gleichungen aus der sphärischen Geometrie“ (auf lateinisch; Jahresprogramm 1826); „Über das Vorhandensein der trigonometrischen Linien beliebiger Bogen als wirklicher Linien“ (Jahresprogramm 1837); „Der polynomische Lehrsatz für beliebige Exponenten“ (für Schüler ausgearbeitet; Jahresprogramm 1845).

P r i m a.

**Ordinarius im Sommerhalbjahr (Sh.): Director Schöler,
im Winterhalbjahr (Wh.): Professor Cassius.**

(Cursus zweijährig.)

Lateinisch. Horatius Od IV., einzelne Epoden und Satiren, mit lateinischer Interpretation wöch. 2 St. Schöler. — Cicero's Brutus im Sh. 2 St., im Wh. 3 St. Cassius mit latein. Interpret. — Tacitus, Agricola von Cap. 17. bis zu Ende, und dann Histor. 1 — Cap. 30. polnisch und deutsch übersetzt und interpretirt im Sh. 1 St., im Wh. 2 St. Szymański. — Stilübungen im Sh.: 1) Extemporalien, Retroversionen, Phraseologie und Synonymik, 2) grössere und kleinere freie Aufsätze, 3) Memorirung und Recitation vom Cic. Cat. I. II. 3 St. Schöler. — Wh.: 1) Extemporalien u. s. w., 2 St. Olawsky; 2) freie Arbeiten und Memorienübungen, 1 St. Cassius.

Griechisch. Sophocles Trachinerinnen bis v. 804., 2 St. Sh Schöler. — Plato's Apologie des Socrates, im Wh. nach Beendigung der Apologie, Thucydides II. 47—69, 3 St. — Grammatik (nach Rost) und Extemporalien, 1 St. Cassius.

Deutsch. Literaturgeschichte bis zur letzten Periode; Versuche im freien mündlichen Vortrage; fünfwöchentliche Aufsätze; 2 St. Olawsky.

Polnisch. Literaturgeschichte von den ältesten Zeiten bis zum J. 1622.; sechswöchentl. freie Arbeiten und Uebungen im mündlichen Vortrage. — Mit den Deutschen gelesen Krasicki, 2 St. Szymański.

Französisch. Lesung vom Ideler und Nolte's Handbuch (prosaischer Theil). — Uebungen im freien Erzählen. — Correctur wöchentlicher Extemporalien, 2 St. Witt.

Hebräisch. (Für die künftigen Theologen und Philologen.) Wiederholung der unregelmässigen Verba und Syntax. — Uebersetzung von Ps. XI — XIX. und Ps. XXIII. I. Sam. 1 — 16., 2 St. Schiedewitz.

Religionslehre. *a*) evangelisch: Die christliche Sittenlehre. — Lesung des Römerbriefes im Grundtexte, 2 St. Schiedewitz.

b) katholisch: Die Lehre von der Gnade Gottes und den heil. Gnadenmitteln, insbesondere vom Sakram. der Taufe, Firmung, Busse, des heil. Abendmahls als Opfer des N. T. Opfermahl und Opfersegen. — Lesung 2 Br. Pauli an Timotheus und den ersten des Johannes, 2 St. Tyc.

Mathematik. *Geometrie,* von der Kugel und den drei runden Körpern. *Algebra,* Polynomischer und binomischer Satz. Reihen zur Ausrechnung der Logarithmen, der Sinus, der Cosinus und allgem. Eigenschaften der Gleichungen. 3 St. Putiatycki.

Physik. Von Ostern bis Ende Mai 1843. von der Bewegung und Statik, 2 St. v. Putiatycki. — Vom Mai bis Michaelis 2 St., von Michaelis bis Ostern 3 St. Einleitung in die physicalischen Wissenschaften, über die allgem. Eigenschaften der Körper, Elemente der Chemie, Statik und Dynamik fester, tropfbarer und ausdehnsamer Körper, nach eigenem Vortrage. Milewski.

Geschichte. Allgemeine Geschichte des Mittelalters und der Neuzeit bis zum Augsburger Religionsfrieden, 2 St. Tschepke.

Philosophische Propedeutik. Die hauptsächlichsten Lehren der Logik, mit Benutzung von Trendelenburgs Elementen.

Zeichnen und Gesang-Unterricht. Siehe unten.

Abbildung 4: Übersicht über den Schulstoff der Prima im Schuljahr 1843/44. (Jahresprogramm 1844, S. 2)

Studium in Breslau

Julius Toeplitz begann nach dem Abitur das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Breslau. Er wurde am 3. Mai 1844 immatrikuliert.[22] Breslau war in der Mathematik hervorragend besetzt, denn seit 1842 (bis 1855) wirkte dort als Ordinarius Ernst Eduard Kummer (1810–1893). Er war vorher seit 1832 Lehrer am Gymnasium in Liegnitz (heute Legnica) gewesen. Trotz hoher Unterrichtsbelastung hatte er dort bedeutende Arbeiten über Differentialgleichungen und über die hypergeometrische Reihe publiziert. Er galt als hervorragender Lehrer; aus seinem Schülerkreis in Liegnitz sind so bedeutende Mathematiker wie Leopold Kronecker (1823–1891) und Ferdinand Joachimsthal (1818–1861) hervorgegangen. Wer damals Mathematik studierte, wurde fast ausnahmslos Gymnasiallehrer. Man kann sich gut vorstellen, dass Kummer seinen Studenten auch manchen guten Ratschlag zum zukünftigen Beruf gegeben hat. Auch als akademischer Lehrer war Kummer sehr erfolgreich und beliebt. In seinem Artikel über die *Geschichte der mathematischen Professuren im ersten Jahrhundert der Universität Breslau 1811–1911* schreibt der spätere Breslauer Ordinarius Rudolf Sturm (1841–1919) über Kummer:

> Er hob das Studium der Mathematik auf einen wesentlich höheren Standpunkt. Als neue Vorlesungen erscheinen: höhere Algebra, bestimmte Integrale, elliptische Funktionen und andere Abschnitte der höheren Analysis, Zahlentheorie und speziell Kreisteilung, Anwendung der Analysis auf Geometrie (Differentialgeometrie), analytische Mechanik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er führte regelmäßige Übungen ein. (Sturm, 1911, S. 317)

In der Breslauer Zeit wurde Kummer auch zu einem der bedeutendsten Zahlentheoretiker des 19. Jahrhunderts. Er schuf mit der Einführung der *idealen Zahlen* die Arithmetik der Kreisteilungskörper und konnte weit über Euler, Dirichlet, Legrendre und Lamé hinausgehend den Großen Fermatschen Satz für alle regulären Primzahlen beweisen.[23]

Auch der jüdische Privatdozent Johann Georg Rosenhain (1816–1887) war ein herausragender junger Mathematiker. Er war Schüler Carl Gustav Jacob Jacobis (1804–1851) und hatte sich 1844 mit einer Arbeit über Abelsche Integrale in Breslau habilitiert. Er wirkte dort bis 1848; nach seinem Engagement für die Revolution 1848 musste er Preußen verlassen. Rosenhain löste das Jacobische Umkehrproblem für Abelsche Integrale auf einer Kurve vom Geschlecht 2 mittels hyperelliptischer Funktionen, deren Theorie er auch weiterentwickelte.[24] 1846 hatte die Pariser Akademie die Aufgabe ausgeschrieben, das Umkehrproblem für allgemeinere Abelsche Integrale als für die bisher betrachteten zu lösen. Rosenhain

[22] Archiv der Universität Breslau, *Allgemeines Studenten-Register, Philosophische Fakultät, Abgegangene Studenten, Vol. IX.*

[23] Eine Primzahl $p > 2$ heißt regulär, wenn sie nicht Teiler der Klassenzahl des p-ten Kreisteilungskörpers ist. Außer 37, 59 und 67 sind alle Primzahlen < 100 regulär.

[24] Man sagte damals *das Umkehrproblem für elliptische Integrale dritter Gattung.*

reichte seine Arbeit ein und gewann den Großen Preis der Akademie des Jahres 1846. Seine Arbeit wurde in der Folgezeit als so wichtig erachtet, dass HEINRICH WEBER (1842–1913) sie 1895 in deutscher Übersetzung und gut kommentiert als Band 65 von *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* herausgab (Rosenhain, 1895). Vermutlich hat JULIUS TOEPLITZ auch persönliche Beziehungen zu ROSENHAIN geknüpft, denn im Nachlass von OTTO TOEPLITZ in Bonn findet sich eine Nachschrift der Vorlesung *Theorie der elliptischen Functionen* von JACOBI, die in JULIUS TOEPLITZ' Besitz war und die er eigentlich nur von ROSENHAIN haben konnte; sie trägt den Datumsvermerk "Breslau den 17-ten October 46".[25]

In den ersten zwei Semestern von JULIUS TOEPLITZ' Studienzeit lehrte außerdem der Privatdozent LUDWIG AL. KOCH an der Universität Breslau (Sturm, 1911, S. 317), über ihn ist nichts näheres bekannt.

Wir wissen nicht, welche Vorlesungen TOEPLITZ genau belegte, das Angebot der mathematischen Wissenschaften war allerdings recht begrenzt:[26] In den Sommersemestern wurde eine *Einleitung in die Analysis des Unendlichen* gelesen (in TOEPLITZ' 1. Semester 1844 von KUMMER); im Winter die *Elementare Mathematik* (Winter 1844/45 von KOCH) und die *Analytische Geometrie* (Winter 1844/45 von KUMMER). In den ersten zwei Semestern hörte TOEPLITZ wohl auch Integralrechnung bei KOCH, Algebra bei ROSENHAIN und Differenzialrechnung bei KUMMER; all diese Veranstaltungen wurden im Laufe TOEPLITZ' Studiums von wechselnden Dozenten wiederholt angeboten. Die fortgeschrittenen Vorlesungen wurden fast sämtlich von KUMMER gelesen, hier finden wir Vorlesungen über elliptische Funktionen, Zahlentheorie, Theorie der Kreisteilung und Analytische Mechanik. ROSENHAIN und später MORITZ LUDWIG FRANKENHEIM (1801–1869) hielten unter anderem Vorlesungen zu Trigonometrie.

FRANKENHEIM war zunächst Assistenzprofessor, ab 1850 ordentlicher Professor für Physik, Geographie und Mathematik und beschäftigte sich insbesondere mit der Kristallographie. Er war der erste, welcher die 32 kristallographischen Punktgruppen klassifizierte, außerdem verfasste er den Klassiker *Völkerkunde* (1852). Deutlich naturphilosophischer ausgerichtet war GEORG FRIEDRICH POHL (1788–1849), ein Schüler HEGELs und erklärter Gegner der NEWTONschen Mechanik. FRANKENHEIM und POHL lasen in jedem Semester je eine große Vorlesung zur Physik, bei beiden häufig als *Experimentalphysik* betitelt. Dazu kamen gelegentliche, wahrscheinlich fortgeschrittene, Vorlesungen über Galvanismus, Optik sowie Magnetismus (FRANKENHEIM) bzw. über Licht und Wärme, Pendelbewegung und

[25] Otto Toeplitz hatte, da er bei der Emigration nach Palästina nur wenig mitnehmen konnte, eine Reihe Vorlesungsmitschriften aus eigenem Besitz sowie solche seines Großvaters und seines Vaters an Bessel-Hagen übergeben; sie sind aus dessen Nachlass in den Nachlass Toeplitz überführt worden.

[26] Hier und im folgenden aus dem *Verzeichniß der auf der Universität im Sommer-Semester 1844 vom 29. April an zu haltenden Vorlesungen* und ähnlich lautenden Vorlesungsverzeichnissen der folgenden Semester.

„Elektromagnetismus und Magnetoelektricität“ (Pohl). Beide hielten vereinzelt Vorlesungen über physikalische Versuche und Apparate.

Zu guter Letzt gab es in jedem Semester ein oder zwei Veranstaltungen des Astronomen Palm Heinrich Ludwig von Boguslawski (1789–1851), deren fast identische Titel die Schlagworte Astronomie, Meteorologie und Erdmagnetismus enthalten. Im Sommer 1846 hielt von Boguslawski außerdem eine Vorlesung über die *Physische Weltbeschreibung nach Alexander von Humboldt's Kosmos*. Eine vollständige Auflistung der während Toeplitz' Studienzeit gehaltenen mathematischen und physikalischen Vorlesungen findet sich im Anhang dieses Beitrags.

Julius Toeplitz' finanzielle Situation musste während dieser Zeit angespannt gewesen sein, denn er erhielt im November 1846 vom Kuratorium der Universität eine bescheidene Unterstützung von 10 Reichstalern. Am 11. Mai 1847 beendete er sein Studium in Breslau mit der Exmatrikulation.[27] Einige Monate später, am 4. Dezember 1847, erhielt er seine Lehrbefähigung in Breslau.[28] Die dazu notwendige Lehrprüfung wurde in acht Fächern gehalten, hinzu kam ein generelle Einschätzung der „Lehrgeschicklichkeit“. Die folgende Auflistung gibt die Resultate Toeplitz' wörtlich wieder:

1. Im Lateinischen und Griechischen: von ziemlich genügender Sicherheit in der Formenlehre.
2. Im Deutschen: ziemlich genügend
3. Im Französischen: bei großer Geläufigkeit im Uebersetzen von schlechter Aussprache.
4. Im Hebräischen: —[29]
5. In der kirchlichen Glaubens- und Sittenlehre: Er ist mosaischen Glaubens.
6. In der Geschichte und Geographie: unsicher in den Elementen
7. In der Mathematik, Physik und Naturgeschichte: in der Mathematik und Physik vielseitig und gründlich, in der Naturgeschichte sehr beschränkt
8. In der philosophischen Propädeutik: nur theilweise ziemlich genügend
9. Lehrgeschicklichkeit: ausgezeichnet

Eine letzte Spalte beinhaltet die abschließende Lehrbefähigung. Dabei konnten jedem Fach, zu welchem überhaupt eine Lehrberechtigung zugesprochen wird, Einschränkungen über die zu unterrichteten Klassenstufen hinzugefügt werden. Das abschließende Urteil für Julius Toeplitz lautete:

> Mathematik und Physik in allen Klassen, die deutsche Sprache bis Tertia incl. und die griechische und lateinische bis Quinta incl.

[27] Beide Informationen aus: Archiv der Universität Breslau, *Allgemeines Studenten-Register, Philosophische Fakultät, Abgegangene Studenten, Vol. IX.*

[28] Im folgenden: GStA PK, I. HA., Rep. 76 VI, Sek. VIII x, Nr. 3: Wissenschaftliche Prüfungskommission für die Provinzen Schlesien und Posen zu Breslau, Bd. 1: 1817–1848

[29] Für das Hebräische gab es wohl keine Prüfung, denn auch andere Kandidaten verzeichneten hier keine Einträge.

Probejahr in Lissa

Mit dieser vielseitigen Lehrbefähigung hätte einer Karriere zum Oberlehrer nichts mehr im Wege gestanden. Im Jahr von Toeplitz' Exmatrikulation war es Juden jedoch immer noch nicht gestattet, an staatlichen Schulen in Dienst zu treten. Die anonym erschienene Streitschrift *Die Anstellung israelitischer Lehrer an preußischen Gymnasien und Realschulen* (Anonym, 1860) weiß aus der Zeit des Vormärz überhaupt nur von zwei jüdischen Lehrern zu berichten – Ephraim Salomon Unger (1789–1870) in Erfurt und Wilhelm Freund (1806–1894) in Breslau – welche aufgrund besonderer Umstände in halbwegs geregelter Anstellung als Lehrer an staatlichen Schulen tätig waren.

Auch das verpflichtende Probejahr war für Juden an einer christlichen, insbesondere also an einer staatlichen Einrichtung nicht möglich. Diese Rechtslage wurde auch im restlichen Preußen im *preußischen Judengesetz vom 23. Juli 1847* bestätigt. Diese Fortführung des Judenedikts von 1812 vereinheitlichte die bestehenden Regelungen der preußischen Provinzen, brachte aber de facto keine Fortschritte zur Gleichstellung der Juden mit ihren christlichen Mitbürgern. Eine wichtige Neuerung war die Einrichtung von Synagogen-Vereinen, welche sich stark an den 1833 in Posen eingerichteten Korporationen orientierte. Ironischerweise wurde das Großherzogtum Posen trotzdem von den Regelungen von 1847 ausgenommen, und dies, obwohl im Jahr 1846 37,8% der preußischen Judenheit in Posen lebte. Kemlein bemerkt dazu:

> Für die jüdische Bevölkerung im Großherzogthum Posen stellte das neue Gesetz unmißverständlich klar, daß sie als einzige regionale Judenheit Preußens noch immer nicht den Ansprüchen der Gesetzgeber genügte. (Kemlein, 1997, S. 196)

Als Preußen jedoch im März 1848 von der Revolution erfasst wurde – Posen nahm mit dem *Polnischen Aufstand* eine ganz besondere Entwicklung – wurden die obigen Verordnungen jedoch schnell wieder hinfällig. Bereits am 6. April 1848 verfügte der zweite Vereinigte Landtag (eine Vollversammlung der Landtage aller acht preußischen Provinzen):

> Die Ausübung staatsbürgerlicher Rechte ist fortan von dem religiösen Glaubensbekenntnis unabhängig. (In: Heppner und Herzberg, 1905a, S. 237)

Auch die in Posen vorgenommene Unterscheidung zwischen naturalisierten und nicht naturalisierten Juden wurde damit aufgehoben. Nur wenige Wochen nach den Beschlüssen, zu Ostern 1848, nahm Julius Toeplitz sein Probejahr an seinem Heimatgymnasium in Lissa auf. Hier spielten nicht nur die neuen Verordnungen, sondern eine ganze Reihe weiterer Gegebenheiten eine gewichtige Rolle: Zum ersten war das Gymnasium Lissa eine von ganz wenigen überkonfessionell ausgerichteten Schulen, welche trotz ihrer *königlichen* (sprich: evangelischen) Subordination lutherische, reformierte und katholische Lehrer gleichermaßen anstellte. Noch wichtiger für Toeplitz war die Unterstützung des damaligen Rektors

Adalbert Ziegler (1804–1877). Dieser hatte bei dem berühmten Altertumswissenschaftler August Boeckh (1785–1867) in Berlin studiert und war von 1844 bis 1877 Rektor des Lissaer Gymnasiums; er hat sich in den kommenden Jahren bei vielfacher Gelegenheit für Julius Toeplitz stark gemacht. Nachdem letzterer also bei Ziegler vorstellig wurde, wandte dieser sich sofort an das Provinzialschulkollegium (PSK) zu Posen, welches dem Gesuch unter dem Eindruck des „sehr drückend[en]“ Mangels an Lehrern – von Putiatycki sollte im Juli 1847 pensioniert werden – vorläufig zustimmte. Dass das PSK nicht nur geneigt war, der Anstellung eines Juden zuzustimmen, sondern dies sogar eigenmächtig entschied, kann wohl nur durch die Wirren der Revolution erklärt werden, die im Frühjahr 1848 in vollem Gange war. Trotzdem musste eine endgültige Entscheidung über Toeplitz' Probejahr von allerhöchster Ebene entschieden werden. In Berlin arbeitete zu dieser Zeit aber bereits die revolutionäre *Märzregierung*, deren liberaler Kultusminister Maximilian von Schwerin (1804–1872) der Anstellung am 10. Juni 1848 zustimmte.

Das Gymnasium Lissa war während Toeplitz' Studienzeit umgezogen und befand sich nun im Schloss des ehemaligen Fürsten und preußischen Staatsrates Anton Paweł Sułkowski (1785–1836). Der Umzug wurde nötig zum einen wegen eines Rechtsstreits über das alte Schulgebäude mit der Johannesgemeinde als früheren Träger (welche auch nach einer Einigung 1851 noch zahlreiche Vergünstigungen genoss), zum anderen weil das Gebäude schlicht zu klein geworden war. Toeplitz unterrichtete während seines Probejahres bereits die Prima in Physik, was als höchst ungewöhnlich gelten darf. Dies ist nicht nur auf Ausscheiden des Joseph von Putiatycki zurückzuführen, sondern laut Jahresprogramm 1849 auch auf die knappen finanziellen Mittel, welche eine feste Anstellung eines neuen Lehrers unmöglich machten (S. 11f). Für die Mathematik dagegen wurde der zuvor in Posen tätige Lehrer Adam von Karwowski (1812–1886) eingestellt, sodass Toeplitz hier nur den „Rechenunterricht“ in Quinta und Sexta bekam, was für Schulamtskandidaten schon eher die Norm war.

Es gelang außer Toeplitz übrigens noch sieben weiteren jüdischen Universitätsabsolventen in Preußen, in den Jahren 1848 bis 1851 ein Probejahr an einer staatlichen Schule zu absolvieren (Anonym, 1860). Einer von ihnen – der zweite in der Provinz Posen – war Naumann Löwenthal (1819–1855). Dieser legte bereits 1837 am Lissaer Gymnasium das Abitur ab, studierte Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften in Berlin, „privatisierte“ für einige Jahre und leistete schließlich im selben Jahr wie Toeplitz sein Probejahr am Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Posen, wo er fortan als Hilfslehrer arbeitete. Im Jahr 1853 wurde in Posen die Königliche Berger-Oberrealschule eröffnet, an welche Löwenthal zwar nur als Hilfslehrer, jedoch unter vollem Oberlehrer-Gehalt eingestellt wurde. Er verstarb bereits zwei Jahre später. Ab 1851 waren die Errungenschaften der Revolution schon so weit zurückgenommen, dass für eine lange Zeit keine neue jüdischen Schulamtskandidaten mehr zugelassen wurden.

Als Hilfslehrer am Königlichen Gymnasium Lissa

Am 5. Dezember 1848 wurde in der neuen preußischen Verfassung bestätigt, dass alle öffentlichen Ämter „für alle dazu Befähigten gleich zugänglich“ seien (§5), sowie die Unabhängigkeit (staats-)bürgerlicher Rechte vom religiösen Bekenntnis (§ 11) (Kemlein, 1997, 199ff). Für eine kurze Zeit schien vielleicht auch Toeplitz alles möglich. Doch im Zuge des Scheiterns der Revolution wurden in der revidierten Verfassung vom 31. Januar 1850 die obigen Paragraphen um eine schwere Einschränkung (§14) ergänzt:

> Die christliche Religion wird bei denjenigen Einrichtungen des Staats, welche mit der Religionsausübung in Zusammenhang stehen, unbeschadet der ... gewährleisteten Religionsfreiheit zu Grunde gelegt. (In: Kemlein, 1997, S. 201)

Dieser Paragraph, welcher bis zu den Bestimmungen im Gesetz des Norddeutschen Bundes 1869 bestehen blieb, wurde in den folgenden Jahren häufig benutzt, um Juden den Zugang zu öffentlichen Ämtern zu erschweren.[30] Zudem wurde das Kultusministerium nun für acht lange Jahre mit dem reaktionärem Karl Otto von Raumer (1805–1859) besetzt, welcher beispielsweise auch die Fröbelschen Kindergärten verbot.

Was diese Entwicklung für den Einzelnen bedeutete, lässt sich eindrücklich am Schicksal von Julius Toeplitz ablesen. Nach Ablauf seines Probejahres wurde er am Lissaer Gymnasium als Hilfslehrer eingestellt, wenn auch sein Arbeitspensum dem einer normalen Lehrkraft entsprach. Ab 1850 hielt er zusätzlich Übungen in Latein in der Sexta, ab 1853 unterrichte er auch Naturgeschichte in Tertia. Seine Vergütung stieg in dieser Zeit von 100 auf 200 Reichstaler jährlich, hinzu kamen 82 Reichstaler für die geleisteten Mehrstunden.[31] Im Jahre 1855 teilte sich Toeplitz bereits den Mathematikunterricht der Quarta mit von Karwowski, auch im Lateinunterricht wurde er in die Quarta „befördert“ (siehe Abb. 5). Seine *Remuneration* – welche er anstelle eines staatlichen Gehaltes bekam – stieg in diesem Jahr auf 400 Reichstaler, was dem Gehalt des untersten ordentlichen Lehrers entsprach. Außerdem übernahm er ab diesem Jahr die Betreuung der Bibliothek, für welche zusätzlich jährlich 50 Reichstaler erhielt. In amtlichen Berichten wird immer wieder auf Toeplitz' gewissenhafte Arbeit in der Führung der Lehrerbibliothek verwiesen; auch erscheinen in den Jahresprogrammen fast sämtliche Neuerwerbungen. Ab 1856 wurde er auch als Ordinarius, also Klassenlehrer eingesetzt. Sein Arbeitspensum blieb in den Folgejahren konstant, aber hoch: zwei Stunden Physik in der

[30] Eine bleibende Errungenschaft der Revolution war aber, dass sich auch die Posener Juden nun in ganz Preußen niederlassen durften. Rechnet man die Auswanderungen nach Westeuropa und die Vereinigten Staaten hinzu, so lässt sich erklären, wie die jüdische Gemeinde in Lissa von gut 3000 Mitgliedern im Jahre 1848 (32% der Stadtbevölkerung) auf 1200 im Jahre 1895 abnehmen konnte. Da vor allem die ärmeren Bevölkerungsteile auswanderten, gelangten die verbliebenen Juden häufig in angesehene bürgerliche Stellungen, und integrierten sich in *fast* allen Bereichen rasch in das preußische System.

[31] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 11: 1851–1855.

Vertheilung der Stunden im Wintersemester 1855|56.

Lehrer.	Ordinarien.	I.	II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V.	VI.	Summa.
1. Direct. Ziegler.	I.	4 Griech. 2 Latein. 2 Franz. 1 Gesang	2 Latein. 2 Griech. 2 Franz.	—	—	—	2 Franz.	—	—	17.
2. Prof. Olawsky.	II.	2 Dtsch. 1 Philos.	2 Dtsch. 7 Latein.	2 Latein.	—	—	6 Latein.	—	—	20.
3. Prof. Tschepke.	III. A.	2 Gesch.	2 Gesch.	7 Latein. 2 Dtsch. 3 Gesch	2 Dtsch. 3 Gesch.	—	—	—	—	21.
4. Prof. Matern.	III. B.	6 Latein. 2 Hebr.	2 Hebr.	2 Griech	7 Latein. 2 Griech.	—	—	—	—	21.
5. Oberlehrer von Karwowski.		4 Math.	4 Math.	3 Math. 2 Polnisch	3 Math.	3 Math. 2 Polnisch		2 Polnisch		23.
6. Oberl. Marmé.	V.	wegen Krankheit fiel der Unterricht aus.								(20)
7. Ordentl.-Lehrer Dr. Methner.	IV. A.	2 Griech.	4 Griech.	4 Griech. 4 Stunden Turnen.	4 Griech.	5 Griech.	3 Griech.	—	—	26.
8. Ordentl.-Lehrer Stange.	VI.	6 Stunden Gesang.					2 Natg.	2 Natg. 2 Geog. 1 Gesch. 2 Kallig.	2 Natg. 2 Geog. 1 Gesch. 2 Kallig. 2 Dtsch.	24.
9. Lehrer Martens.	IV. B.	2 Polnisch.		2 Polnisch. 2 Franz.	2 Franz.	2 Polnisch. 2 Franz	2 Dtsch.	2 Polnisch. 2 Dtsch.	8 Latein.	27.
10. Hülfslehrer Töplitz.		2 Phys.	2 Phys.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg. 3 Latein.	3 Math. 3 Latein.	3 Arithm.	3 Arithm.	25.
11. Ref. Rel.-Lehr. Pred. Pflug.		2		—	—	—	—	2		4.
12. Ev. luth Rel.-L. Suptd. Grabig.		2	2	2		—	—	—	—	6.
13. Ref. Rel.-Leh. Pred. Fromm-berger.		—	—	2				—	—	2.
14. Ev. luth. Rel.-L. Pred. Petzold.		—	—	—	—	2		2	2	6.
15. Kathol. Relig.-Leh. Pfarrverw. Lic. Veith.		2 Religion 2 Polnisch		2 Religion				2 Religion		8.
16. Schulamts-Candidat Dr. Günther.		—	—	—	2 Latein.	6 Latein. 1 Geogr. 2 Geschichte.	2 Griech. 1 Geogr.	8 Latein.	—	22.
17. Zeichenlehrer Gregor.		12 Zeichenstunden.								12.

Abbildung 5: Verteilung der Unterrichtsstunden 1855/56 am Gymnasium Lissa.

Prima und eine in der Obersekunda; je zwei Stunden Naturkunde in Ober- und Unterteria, drei Stunden Mathematik in der Quarta, drei bzw. vier Stunden Arithmetik in Quinta und Sexta, sechs Stunden Latein in der Sexta. Gleichzeitig war Toeplitz in diesen Jahren auch wissenschaftlich tätig, wie aus zwei umfangreichen Arbeiten zur Integralrechnung (J. Toeplitz, 1854) und zu Grundlagenfragen der Physik (J. Toeplitz, 1858b) hervorgeht.[32]

[32] Daneben publizierte er in dieser Zeit zwei kleine Arbeiten (J. Toeplitz, 1858a, 1859). Toeplitz' wissenschaftliche Beiträge werden in Teil 3 ausführlich thematisiert.

Ein Bericht über die Schule und ihre Lehrer aus dem Jahre 1857 zeugt von der besonderen Situation des Lissaer Gymnasiums in der preußischen Monarchie, gibt aber auch Aufschluss über die ministerielle Sicht auf diese religiös und ethnisch besonders vielfältige Anstalt:

> Von allen Preußischen Gymnasien hat keines ein so stattliches Local als das zu Lissa, in dem fürstl. Sulkowskischen Schloß von einem Park umgeben. Die Größe dieses Besitzes macht ihn aber auch beschwerlich. Das Haus u die Classenzimmer im guten Stande zu erhalten, u die letzteren im Winter zu beheizen, verursacht größere Kosten, als es bei anderen Anstalten der Fall ist; u ein gewöhnliches Schulzimmer mit blos geweißten Wänden nimmt sich besser aus, als hohe Palastsäle mit kahlen weißen Wänden. Zu den Uebelständen kommt ferner, daß ein Theil des Schlossen dem Criminalgerichte eingeräumt ist, das sich mit den Veranstaltungen zur Beschäftigung u Bestrafung der Gefangenen immer weiter auszudehnen trachtet, u so für die Schule eine unangenehme u oft störende Nachbarschaft bildet, die dem Director auch seine prächtige Wohnung verleidet. [...]
>
> Die kirchliche Confession, auf deren Unterschiede im Lissaer Gymnasium mehr Gewicht gelegt wird, als, so viel mir bekannt, auf irgendeinem anderen in Preußen, trennt die Schüler in lutherische (100), reformirte (41), katholische (139); Juden sind 71 auf der Schule. Es ist auch die einzige höhere Lehranstalt, an welcher der evangelische Religionsunterricht nach den beiden Confessionen verschieden ist u von den betreffenden Stadtgeistlichen vertheilt wird, mit so bestimmt ausgeprägtem Bewußtsein des Gegensatzes, daß keiner von diesen Geistlichen eine gemeinsame Morgenandacht mit den evangelischen Schülern halten kann, weil es für unzuläßig gilt, daß die reformirten Schüler dem lutherischen Pastor zuhören, u umgekehrt. – Das Lehrcollegium hat, wie ebenfalls kein anderes in der Monarchie, dieselben religiösen Unterschiede; es sind lutherische, reformirte, katholische u ein Jude darin. [...]
>
> Der Director Ziegler behandelt diese Unterschiede mit der objectiven Ruhe u Unparteilichkeit, welche einen ziemlich indifferenten Standpunct bezeichnet. Zu der religiösen kommt die nationale Verschiedenheit, mit welcher er es mehr als einer der anderen evangelischen Directoren der Provinz zu thun hat: Lissa, obschon eine fast ganz deutsche Stadt, hat doch von allen Gymnasien u Realschulen in Posen die größte Zahl polnischer Schüler; sehr viele darunter sind Söhne polnischer Gutsbesitzer aus der Umgegend. Es ist für dem Director keine geringe Aufgabe unter diesen Schülern der oberen Classen, die nicht immer unter guter Aufsicht leben, zum Theil schon über das gewöhnliche Classenalter hinaus sind u Geld haben, in einer Stadt die rechte Disciplin aufrecht zu erhalten, worin es an Gelegenheit zu sinnlichen Genüßen nicht fehlt, zumal da auch mehrere unter den Lehrern ihnen keineswegs mit guten Beispiele vorangehen. [...]
>
> Von einem einträchtigen Zusammenwirken des Lehrercollegiums wird hienach nicht die Rede sein können, u man wird im Allgemeinen weniger eine positive pädagogische Einwirkung auf die Schüler, als eine Abwehr grober Ordnungswidrigkeiten unter allen diesen Umständen erwarten können. Die Leistungen genügen bei der Mehrzahl der Schüler in der Mathematik, sonst in keinem anderen Gegenstande, u verhältnißmäßig am wenigsten im Lateinischen.[33]

[33] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 12: 1856–1861

Wir vermuten, dass es sich bei dem Verfasser des Berichts um den Ministerialbeamten Ludwig Adolf Wiese (1806–1900) handelte, der 1852 zum Dezernenten für das höhere Unterrichtswesen im preußischen Kultusministerium in Berlin ernannt wurde. Besonders zwei Lehrer werden von Wiese stark kritisiert, insbesondere wegen ihrer Opposition zu Direktor Ziegler. Über die drei Mathematiklehrer heißt es dagegen sehr viel positiver:

> Der mathematische u physikalische Unterricht ist an der Anstalt durch drei taetliche Lehrer vertreten, den katholischen von Karwowski, den jüdischen Töplitz, den evangelischen Gruhl. Der erstgenannte verfährt ruhig, klug u bestimmt, läßt die Schüler selbst finden u zusammenhängend vortragen, erreicht auch mit nicht wenigen recht gute Resultate. Er scheint mir das Professortitels würdig zu sein. — Der. g. Toeplitz ist seinem alttestamentl. Glauben mit Treue u Strenge ergeben, u von ehrenwerther Persönlichkeit; die Probe seines physikalischen Unterrichts in Prima war durch Präcision des Vortrags u das Interesse der Schüler vollkommen befriedigend. Weniger eignet er sich für den lateinischen Unterricht, den er in der einen Abtheilung von Quarta giebt. Der Beaufsichtigung der Bibliothek widmet er löbliche Sorgfalt. — Der g. Gruhl ist noch Schulamtscandidat, aber zu einer Lehrerstelle sehr empfehlenswerth.[34]

Auffällig an Wieses Einschätzung über Toeplitz ist die betonte *Treue und Strenge* gegenüber dem jüdischen Glauben. Möglicherweise sollte dies nahelegen, dass mit einer Konvertierung zum Christentum eine feste Anstellung zu erreichen wäre. Dazu muss man wissen, dass um die Mitte des 19. Jahrhunderts der Antisemitismus noch kein Rassenantisemitismus war, sondern religiös begründet wurde. Viele jüdische Akademiker wählten in ähnlichen Situationen den Weg der Konvertierung.[35] Für Julius Toeplitz kam dies aber überhaupt nicht in Frage. Er war die ganze Zeit, die hier in Betracht kommt, aktives, sehr geschätztes und verehrtes Mitglied des Vorstandes der jüdischen Gemeinde Lissa, einer, wie wir schon erwähnten, großen und bedeutenden Gemeinde. Erst 1889 trat er von diesem Posten zurück (U. Toeplitz, 1999, 39f).

Im Jahr 1858 übernahm Wilhelm I. die Regentschaft über Preußen von seinem Bruder Friedrich Wilhelm IV. Mit diesem Machtwechsel ging auch die Ägide des Kultusministers von Raumer zu Ende. Die oben erwähnte anonyme Streitschrift bilanziert dessen Amtszeit in zynischem Ton:

> So ist es denn gekommen, daß, als das Raumersche Ministerium zum Heil und zur Freude des Landes seine Endschaft erreichte, es seinem Nachfolger unter *mehr als dreitausend christlichen* Gymnasial- und Realschullehrern nur noch zwei, gleichsam auf der Aussterbeliste stehende, *jüdische* Lehrer zurückließ, nämlich

[34] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 12: 1856–1861

[35] Der bekannteste konvertierte Mathematiker war sicher Jacques Simon Jacobi, der sich nach seiner Konvertierung im Jahre 1821 Carl Gustav Jacob Jacobi nannte. Auch Lazarus Fuchs (1833–1902) aus dem nahen Posen nahm nach langem persönlichen Ringen im Jahre 1860 den evangelisch-lutherischen Glauben an, ebenso der ebenfalls aus Posen stammende Leo Königsberger (1837–1921).

> den festangestellten Professor Dr. Unger an der Realschule zu Erfurt und den Hilfslehrer Dr. Töplitz am Gymnasium zu Lissa. (Anonym, 1860, S. 14)[36]

Der neue Kultusminister Moritz August von Bethmann-Hollweg (1795–1877) war, beeinflusst auch vom Geist der Universität Bonn, an welcher er zuvor Kurator war, für seine ausgleichende Politik bekannt. Vielleicht war es diese politische Morgenluft, welche Julius Toeplitz am 7. Februar 1859 (nur drei Monate nach dem Wechsel im Ministerium) dazu veranlasste, den neuen Kultusminister um eine Festanstellung zu ersuchen. Wir drucken den Inhalt des Briefes, welcher am Folgetag von der PSK Posen gegengezeichnet und nach Berlin gesendet wurde, hier vollständig ab (Abb. 6 zeigt einen Scan der ersten Seite des Originals):

> Der weit verbreitete Ruf der Humanität, der von Ew. Excellenz Namen ausgeht, so wie die wahrhafte Duldsamkeit, die Ew. Excellenz in konfessionellen Erziehungen so oft an den Tag gelegt haben, geben mir den Muth, Ew. Excellenz mit einem Gesuch zu nahen, zu dessen Begründung ich genöthigt bin, Ew. Excellenz einen kurzen Abriß meiner bisherigen Thätigkeit im Staatsdienste vorzutragen.
>
> Geboren im Jahre 1825, mosaischen Glaubens, absolvirte ich das Abiturientenexamen am hiesigen Gymnasium zu Ostern 1844 u. besuchte von da ab bis Ostern 1847 die Universität Breslau. Im Dezember 1847 legte ich daselbst das Examen pro facultate docendi ab, u. erhielt facultas für den Unterricht in der Mathematik u. Physik für die oberen Klassen der höheren Lehranstalten.
>
> Ostern 1848 trat ich nach eingeholter Erlaubnis des Provinzial-Schulkollegiums zu Posen mein Probejahr am hiesigen Gymnasium an, u. wurde nach Ablauf desselben gegen eine jährliche Remuneration von 100 Rthl. an derselben weiter beschäftigt. Nachdem drei Jahre seit dem Beginn meiner amtlichen Thätigkeit abgeschlossen waren, wandte ich mich an das Provinzial-Schulkollegium zu Posen mit der offenen Darlegung meiner Verhältnisse und mit der daran geknüpften Bitte, mir eine feste Anstellung zu gewähren, da ich mit der Absicht umging, mich zu verheirathen. Ich erhielt den wörtlichen Bescheid, es sei zu meiner Anstellung keine Gelegenheit; dagegen wurde meine jährliche Remuneration auf 200 Rthl. erhöht. In diesem Verhältnisse bleib ich bis Michaelis 1855, zu welcher Zeit mir ohne mein Zuthun eine jährliche Remuneration von 400 Rthl. von der hohen Behörde bewilligt wurde. Auf diese Weise bin ich bis jetzt als außerordentlicher Hülfslehrer am hiesigen Gymnasium beschäftigt worden, u. vollende mit den kommenden Ostern das elfte Jahr meiner amtlichen Wirksamkeit.
>
> Dies ist der äußere Verlauf meine Thätigkeit an einer Anstalt unsers Staates. Über die pädagogischen und wissenschaftlichen Erfolg derselben steht mir kein Urtheil zu, u. ich darf nur Ew. Excellenz mit der gehorsamen Bitte angehen, über diesen Punkt die Gutachten meiner Vorgesetzten einzuholen. Mein ungestörtes, jetzt bald 11 Jahre dauerndes Arbeiten an der Anstalt berechtigt mich jedoch zu der Hoffnung, daß meine Vorgesetzten die Erfolge meiner Lehrthätigkeit nicht ungünstig beurtheilen, so wie, daß ich mit keinerlei pädagogischen oder konfessionellen Principien, die für die Gymnasien maßgebend wären, in irgend einen Konflict gerathen sei. Um so drückender muß es für mich sein, zu sehen, daß ich trotz der angestrengten Thätigkeit immer nur eine untergeordnete u. höchst unsichere Stellung einnehme, die nicht geeignet ist, mir als

[36] Der unterstellte Doktortitel bei Toeplitz muss ein Versehen gewesen sein.

> Familienvater die Ruhe zu gewähren, die zu einer fortschreitenden wissenschaftlichen Ausbildung nothwendig ist. Bei keiner Gelegenheit habe ich verabsäumt, es offen auszusprechen, *daß ich ein Jude sei*, u. statt habe ich nur darnach gestrebt, durch meinen Eifer u. mein ganzes Wirken Zeugniß dafür abzulegen, daß auch ein Jude an einer Anstalt unseres Staates in Wirksamkeit sein könne, ohne mit dem leitenden Principien desselben in irgendwelchen Widrigkeiten zu kommen. Zum Lehrfache durch einen inneren Drang getrieben, haben mich selbst drückende Nahrungssorgen, die bei meiner Mittellosigkeit unausbleiblich waren, in der Freudigkeit für meinen Beruf nie beirrt. Ich bin mir bewußt, alle meine Kräfte für die ersprießliche Förderung meiner amtlichen Thätigkeit, so wie für meine weitere wissenschaftliche Ausbildung aufgewandt zu haben, u. sehe mit ruhigem Gewissen auf die verflossenen elf Jahre zurück.
>
> Mit einer gleichen Freudigkeit würde ich der Zukunft ins Auge sehen, wenn mir aber nicht meine untergeordnete u. unsichere Stellung beständig wie ein düsterer Schatten vorschwebte. In dem ich also nochmals auf die einzuholenden Zeugnisse meiner Vorgesetzten, so wie auf meine lange Dienstzeit Bezug nehme, wage ich es, an Ew. Excellenz die ganz gehorsame Bitte zu stellen:
>
> „mir eine feste Anstellung gnädigst gewähren zu wollen."
>
> Mit vollem Vertrauen auf die Humanität u. Gerechtigkeit Ew. Excellenz verharre ich in der tiefsten Ehrerbietung.
>
> Ew. Excellenz ganz gehorsamster,
>
> Julius Toeplitz[37]

In einem Antwortschreiben (wiederum über die PSK Posen) vom 24. Februar 1859 erwiderte Bethmann-Hollweg,

> daß die feste Anstellung jüdischer Lehrer an Schulen christlicher Stiftung nicht erfolgen kann. Mit Rücksicht jedoch auf die ersprießliche Wirksamkeit, in welcher Sie als außerordentlicher Hülfslehrer am dortigen Gymnasium seit mehreren Jahren stehen, will ich genehmigen, daß Sie in dieser amtlichen Stellung ferner verbleiben, und werde, sofern die Verhältnisse es gestatten, gern Gelegenheit nehmen, durch Berücksichtigung von Anträgen, welche das Kgl. Prov. Schulcollegium in Posen zu weiteren Verbesserungen Ihrer äußeren Lage zu stellen sich veranlaßt sehen wird, Ihnen meine Anerkennung zu bekräftigen.[38]

Nicht nur für Toeplitz war die obige Antwort des Ministers wohl eine Niederlage, auch für Ziegler war die jahrelange Anstellung eines Hilfslehrers eine große finanzielle Belastung. Anders als die etatmäßig angestellten Lehrkräfte mussten die Hilfslehrer aus den Überschüssen der Schule bezahlt werden. Aus diesem Topf war die Remuneration Toeplitz' gemeinsam mit dem Ausgleich für Mehrstunden zwischenzeitlich die größte Ausgabenquelle. Dass das Geld anderswo dringend gebraucht würde, zeigt der bereits oben zitierte Bericht von Wiese. Trotzdem erhöhte, wie es in dem obigen Brief heißt, Ziegler das Gehalt von Toeplitz zumindest auf das Niveau des rangniedrigsten ordentlichen Lehrers. Im Jahre 1860 appellierte Ziegler dringend an Minister Bethmann-Hollweg, die staatlichen

[37] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 12: 1856–1861.
[38] Ebenda.

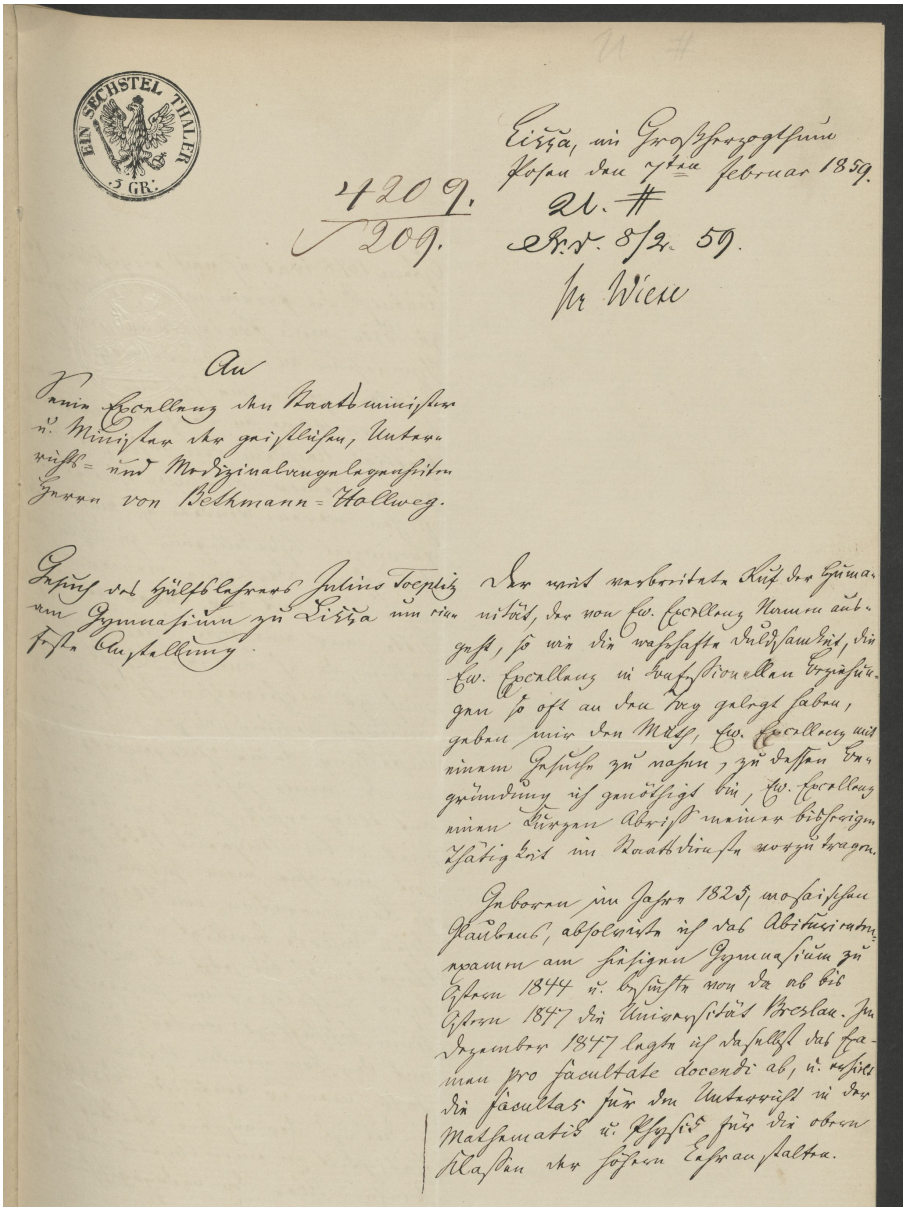


Abbildung 6: Scan der ersten Seite des Anstellungsgesuches vom 7. Februar 1859 von Julius Toeplitz. (GStA PK)

Zuschüsse der Schule zu erhöhen. In dem ausführlichen Bericht betonte er wiederholt die „nicht zu entbehrende[n] Hülfslehrerstelle“ von Julius Toeplitz, an welcher unbedingt festgehalten werden müsse. Diese sei „nach der näheren Ausführung in dem vorliegenden Berichte auch dann nicht entbehrlich, wenn die vackante neunte Lehrerstelle besetzt wird.“[39]

Ein weiterer Ausgabenpunkt der Schule waren außerordentliche Unterstützungen für Lehrkräfte. Diese wurden einmal jährlich an eine Reihe von Lehrern ausgezahlt, bedurften aber jeweils der Genehmigung des Ministeriums, wodurch die Zahlungen heute in den Akten erhalten sind. Die Höhe der Zahlungen richtete sich dabei nach der Position des Lehrers, so bekamen höhere Oberlehrer bis zu 100 Reichstaler Unterstützung, während die der unteren Lehrer um die 40 Reichstaler betrug. Auch Toeplitz erhielt Beträge zwischen 30 und 50 Reichstalern, sodass die hierarchische Ordnung gewahrt blieb. Es fällt aber auf, dass Toeplitz fast in jedem Jahr Unterstützungsgelder zugesprochen wurden, während andere Lehrkräfte diese deutlich seltener in Anspruch nahmen. Auch hier zeigt sich wohl der gute Wille Zieglers, so wie sicher auch des Kollegiums. Im Jahr 1862 bekam Toeplitz sogar einmalig 100 Reichstaler für eine Kur seiner an der Gicht leidenden Ehefrau zugesprochen, im Jahr 1865 noch einmal 75 Reichstaler. Wir kommen auf diese Geschichte später zurück.

Freundschaft mit Karl Emil Gruhl

In seine Zeit als Hilfslehrer fällt auch der Beginn der besonderen Freundschaft mit dem späteren Geheimen Oberregierungsrat im preußischen Unterrichtsministerium Karl Emil Gruhl (1833–1917), dessen lebenslanges Wirken untrennbar mit dem Wachsen und Gedeihen der Real- und Oberrealschulen in Preußen verbunden war. Gruhl, Sohn eines Tischlers aus Fraustadt (heute Wschowa, bei Lissa), hatte es nicht leicht, an ein Gymnasium zu gelangen. Mit fast 14 Jahren bestand er eine Aufnahmeprüfung am Gymnasium Lissa. Er war bald einer der besten Schüler, und in der biographischen Skizze, die bereits ein Jahr nach seinem Tod herauskam, lesen wir:

> Daß er in Mathematik das Klassenpensum völlig beherrschte, war selbstverständlich, außerdem wurde er von einem jüngeren Lehrer Töplitz, der in der Prima Physik gab, privatim schon in die höhere Mathematik eingeführt. (Meyer, 1918, S. 16)

Es war bekannt, dass der Schüler Gruhl von zu Hause nur das nötigste bekommen konnte, und so kann man davon ausgehen, dass Julius Toeplitz diese Unterweisung als einen Freundschaftsdienst an dem begabten jungen Mann aufgefasst hat. Nach dem im März 1852 in Lissa bestandenem Abitur studierte Gruhl drei Semester in Breslau, vor allem Mathematik und Naturwissenschaften. Zum

[39] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 5: Gymnasium zu Lissa, Bd. 12: 1856–1861.

Wintersemester 1853/54 wechselte er nach Berlin. Ostern 1855 ließ GRUHL sich exmatrikulieren und geriet in eine persönliche Krise. Er meinte, dass er sein wichtigstes Ziel, durch das Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften eine Weltanschauung zu gewinnen, welche die Religion ersetzen könne, völlig verfehlt habe. Er erwog sogar, aus der Wissenschaft ganz auszusteigen, das Handwerk seines Vaters zu erlernen und künftig als Tischler zu arbeiten. Seinem Lehrer FRIEDRICH ADOLF TRENDELENBURG (1802-1872) gelang es, ihn davon abzubringen und sich stattdessen auf die Staatsprüfung für das höhere Lehramt gründlich vorzubereiten. GRUHL absolvierte im Rahmen des von dem berühmten Pädagogen KARL SCHELLBACH (1804–1892) am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Berlin eingerichteten Mathematisch-pädagogischen Seminars sehr erfolgreich eine Reihe von Probestunden und bestand schließlich im August 1856 die Staatsprüfung mit der Lehrbefähigung in Mathematik und Physik für alle Klassen.[40] Sein alter Gönner in Lissa, der Direktor ZIEGLER, holte ihn für das Probejahr ans Gymnasium Lissa, wo er von Michaelis 1856 bis Michaelis 1857 als "wissenschaftlicher Hilfslehrer", neben seinem alten Freund TOEPLITZ wirkte. Nach sechs Jahren am Gymnasium in Greifswald beginnt GRUHLs lange erfolgreiche Karriere im Realschulwesen Preußens. Im Herbst 1864 wurde er Konrektor der Realschule 1. Ordnung in Hagen (Westfalen), im April 1868 schließlich Direktor der Oberrealschule Mülheim a.d. Ruhr und von Herbst 1878 bis Frühjahr 1882 war er Direktor der Realschule 1. Ordnung in Barmen. Unterrichtet hat er stets die oberen Klassen in Mathematik und Physik. Während seiner Zeit in Mülheim erschien sein Buch (Gruhl, 1873); dazu heißt es in (Meyer, 1918):

> Überraschenderweise fand Gruhl neben all dem geschilderten amtlichen und gemeinnützigen Wirken noch Muße zu schriftstellerischer Arbeit. Sie beschränkte sich allerdings auf die Herausgabe eines im wesentlichen für den Selbstunterricht geschriebenen Buches, der "Analytischen Geometrie der Ebene", die 1873 erschien und dem Provinzialschulrat Dr. O. Gandtner gewidmet war. In einem Anhange sind 99 Aufgaben hinzugefügt, die sein alter Lissaer Freund Töplitz, mit dem er in dauerndem Briefwechsel stand, beigesteuert hatte. (Meyer, 1918, S. 65)

GRUHLs Werk war kein weit verbreitetes Schulbuch, sondern viel anspruchsvoller. Es war sicher geeignet, mit mathematisch begabten Schülern zu arbeiten. Es war auch zum Selbststudium für Anfangssemester gedacht; in diese Richtung wiesen die Aufgaben von TOEPLITZ mit ausführlichen Lösungen (insgesamt 47 Seiten). Dazu schreibt GRUHL in der Vorrede:

> Eine Sammlung von Übungsbeispielen denke ich in nächster Zeit nachfolgen zu lassen. Als solche können inzwischen die Aufgaben dienen, welche mein Freund Töplitz dem Buche als Anhang beigegeben hat. Diese verfolgen jedoch noch einen anderen Zweck; sie sollen, wie die mitgetheilten Auflösungen zeigen, über das Ziel des Buches selbst hinausführen und den Leser, indem sie ihn mit dem

[40] Zu den Erinnerungen Gruhls an sein Studium in Berlin s. (Schubring, 1985).

> Gebrauch homogener Coordinaten bekannt machen, zu weitergehenden Studien anregen. (Gruhl, 1873, S. VIII)[41]

Zur weiteren Karriere Emil Gruhls sei noch angemerkt: Im Juli 1882 stieg er zum Provinzialschulrat von Berlin und der Mark Brandenburg auf. Im Oktober 1894 wechselte er als vortragender Rat ins Preußische Unterrichtsministerium und wurde schließlich zum Geheimen Oberregierungsrat befördert. 1904 ging er in den Ruhestand. Die Freundschaft eines so hohen preußischen Beamten mit einem bekennenden Juden war sicher eine besonders bemerkenswerte Ausnahme.

Anstellung als ordentlicher Lehrer

Im Jahr 1868 wurde an der Realschule Posen ein Präzedenzfall zur Anstellung jüdischer Lehrer geschaffen, der wohl auch für Toeplitz zum Stein des Anstoßes wurde, den Kampf um seine Festanstellung wieder aufzunehmen: Als der oben vorgestellte Hilfslehrer Löwenthal 1855 starb, wurde an seine Stelle der ebenfalls jüdische Moritz Jutrosinski (1825–1909) berufen. Auch er maturierte am Lissaer Gymnasium (Jahrgang 1847), studierte dann in Breslau, wo er sich für die Revolution starkmachte, war vier Jahre in Wien und absolvierte 1859 die Lehramtsprüfung in Breslau (Friebe, 1903, S. 42). Was dann folgte, liest sich wie eine Kopie der Causa Toeplitz:

> Das Provinzial-Schulkollegium versagte ihm jedoch die definitive Anstellung, und nun entspann sich ein langer Kampf, in dem die Stadt bis an das Abgeordnetenhaus ging. Erst 1868 hatte es die Stadtbehörde durchgesetzt, daß Dr. Jutrosinski die Bestallung als ordentlicher Lehrer an der Realschule erhielt. J. erhielt freilich auch jetzt nur eine beschränkte Unterrichtserlaubnis. (Heppner und Herzberg, 1905b, S. 833)

Tatsächlich hat der seit 1862 amtierende Kultusminister Heinrich von Mühler (1813–1847) – übrigens deutlich umstrittener als sein liberaler Vorgänger Bethmann-Hollweg – die Festanstellung Jutrosinskis bereits am 27. Dezember 1867 genehmigt, wie in einer anonymisierten Verfügung im *Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen* (Zentralblatt, 1868, 85f.) zu lesen ist. Dort heißt es, dass zwar von einem Recht jüdischer Lehrer auf Anstellung an christlichen Schulen im Allgemeinen keine Rede sein könne, Jutrosinski aber seit sieben Jahren erfolgreich an der Schule arbeite, zudem in einem Lehrgegenstand, „bei deren Behandlung sein von dem religiösen Charakter der Schule abweichendes Glaubensbekenntnis zurücktritt“. Auch der Rektor unterstütze die Festanstellung. Und schließlich: „Es scheint kaum angenommen werden zu können, daß seine feste Anstellung als Lehrer größere Nachtheile in ihrem Gefolge haben werde, als seine fortgesetzte Hülfslehrerschaft.“ Unter diesen Umständen wurde Jutrosinski also

[41] Die Bemerkung zu den homogenen Koordinaten zeigt, daß Julius Toeplitz die Bedeutung der in der 1. Hälfte des 19. Jahrhunderts entstandenen projektiven Geometrie für die akademische Lehre hoch einschätzte.

als Lehrer festangestellt. Er blieb vier weitere Jahre an der Schule, bevor er 1872 als Direktor eines jüdischen Waisenhauses nach Berlin ging (Friebe, 1903, S. 42).

Die lange Dienstzeit, eine durchweg positive Reputation, die Unterstützung des Rektors, der der Religion fernstehende Lehrgegenstand, die Aussicht auch ohne feste Stelle weiter an der Schule tätig zu bleiben – all dies traf natürlich auch auf Julius Toeplitz zu. Ob dieser von dem Fall Jutrosinski wusste, konnte nicht ermittelt werden, ist aber plausibel. Er versuchte bereits einen Monat nach der Berliner Entscheidung in Zusammenarbeit mit Ziegler, seine Festanstellung am Gymnasium Lissa endlich zu erwirken. Mit Bezug auf sein vorheriges Gesuch von 1859 argumentierte Toeplitz in einem Brief vom 27. Januar 1868 wie folgt (wir zitieren hier nur den zweiten Teil des Briefes):

> Mit dieser Zeit sind 9 Jahre verstrichen und eine Aenderung meiner äußeren Lage ist im Jahre 1863 dahin eingetreten, daß meine damalige Remuneration von 400 Rthl. auf 492 Rthl. 15 Sgr. erhöht wurde. Ich habe es bis heute unterlassen, meine hohen Vorgesetzten mit Mahnungen um Verbesserung meiner Stellung anzugehen, da ich die Ueberzeugung hegte, daß dieselben von selbst Alles thun würden, was diesem Zwecke förderlich sein könnte.
>
> Die gesteigerten Bedürfnisse der letzten Jahre haben mich jedoch in eine Lage gebracht, die nahezu unerträglich genannt werden könnte. Ich unterlasse es, Euer Hochwohlgeboren eine Schilderung meiner äußeren Lage, sowie meiner amtlichen und außeramtlichen Thätigkeit zu entwerfen, da dieselben Ew. Hochwohlgeborene hinreichend bekannt sind.
>
> Ich stelle daher bloß an Euer Hochwohlgeborene das ganz gehorsame Gesuch,
>
> > bei der hohen vorgesetzten Behörde principalikum eine feste Anstellung an dem hiesigen Gymnasium, eventualitär eine Verbesserung und Sicherstellung meiner äußeren Lage in einer meiner bald 20jährigen Dienstzeit angemessenen Weise gütigst beantragen zu wollen.
>
> Einer geneigten Gewährung meiner dringenden Bitte entgegensehend bin ich Euer Hochwohlgeboren ganz gehorsamer
>
> gez. Julius Toeplitz[42]

Die Beurteilung seiner pädagogischen und wissenschaftlichen Eignung überließ er abermals Ziegler, dessen Gutachten bereits am 4. Februar folgte. Anders als Toeplitz brauchte dieser kein Blatt vor den Mund zu nehmen, wie folgender Ausschnitt aus dem Beginn des Briefes belegt:

> Bei einem Lehrer, der seit Ostern 1848 in seinem hiesigen Amte ist, dessen Tüchtigkeit und Zuverlässigkeit schon oft von den vorgesetzten Behörden anerkannt und durch ausnahmsweise Vergünstigungen belohnt worden ist, dessen abnorme Stellung das Mißverhältnis zwischen seinen Verdiensten und seiner äußeren Lage so augenfällig hervortreten läßt, bedarf es keines Beweises, daß der von ihm gestellte Gesuch ein wohlbegründeter ist. – Unter der Gutheißung eines hohen

[42] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 2: 1868–1877.

> Ministerii[43] hat er im Jahre 1848 seine hiesige Thätigkeit angetreten und dieselbe mit nie ermüdendem Eifer und erfolgreich in dem guten Glauben fortgesetzt, daß eine treue Pflichterfüllung ihn auch nähren werde. Statt dessen steht er nach 20jähriger Thätigkeit auf dem nunmehr Minimal-Gehaltssatze eines jüngsten Lehrers, mit welchem verglichen er noch in dem ungemeinen Nachtheile steht, daß er ohne jede Sicherheit für die Zukunft ist, weil er nicht fest angestellt, und nicht pensionsberechtigt ist, und daß er als Familienvater für eine (von der Gicht heimgesuchte) Frau und für zwei wohlerzogene Söhne von 15 und von 13 Jahren zu sorgen hat.
>
> Unter diesen Umständen heischt die humane Rücksicht jede nur mögliche Unterstützung des jetzt schon vielfach Noth leidenden Mannes. Die Verdienste aber, die er sich um die Schule erworben hat, die ächte Bescheidenheit, mit der er sein Loos getragen, ohne in seinem Diensteifer zu ermatten, ohne zu Drängen oder zu supplicieren – mit einem Worte, der Umstand, daß er sich als Jude in einer gewiß schwierigen Stellung und zwanzigjährigen Amtsführung vollständig bewährt hat, fordern eine reale Anerkennung, wie sie Ew. Excellent der Herr Minister, in diesem Ausnahmefalle zu bethätigen gewiß gewillt sein wird.[44]

Sollte eine Festanstellung nicht möglich sein, so Ziegler weiter, so bitte er zumindest um eine Bezahlung Toeplitz' aus der Staatskasse, und zwar in der Höhe, „welche er an der Anstalt einzunehmen berechtigt wäre, wenn ihn seine Religion nicht im Wege stünde“ – dies wären 750 Reichstaler – außerdem seien ihm seine Anciennität gemäß Gehaltssteigerungen zuzusichern, eine Pension zu bewilligen sowie der Titel des *Oberlehrers* zu gewähren (Ebenda.) Beide Briefe gingen zunächst an das PSK Posen, welche sie mit einer eigenen Stellungnahme vom 17. Februar 1868 an den Minister in Berlin weiterleitete. In dieser bekam Toeplitz zwar unterstützende Worte in seiner Person, die grundsätzliche Ablehnung der Einstellung jüdischer Lehrer änderte sich aber nicht:

> Was die Persönlichkeit des g. Toeplitz betrifft, so können wir uns über ihn in jeder Beziehung nur in günstigster Weise aussprechen, und den Antrag auf Verbesserung seiner Lage im Allgemeinen nur auf das Wärmste befürworten.
>
> Der g. Toeplitz, 42 Jahr alt, jüdischer Confession, legte in einem Alter von nicht voll 22 Jahren seine Prüfung vor der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission in Breslau ab, und erhielt unter dem 4. Dezember 1847 das Zeugniß der Befähigung Mathematik und Physik in allen Klassen, die Deutsche Sprache bis Tertia, Griechisch und Lateinisch bis Quarta einschließlich zu lehren.
>
> Das Zeugniß spricht sich in Beziehung auf seine Hauptfächer, Mathematik und Physik über seine vielseitigen und gründlichen Kenntnisse, über seine gewandte methodische Behandlung der Gegenstände, über die Klarheit seiner Darstellung und über die große Klarheit und Bestimmtheit seines Vortrags bei der Probelection in der Prima eines Gymnasiums auf das vortheilhafteste aus.
>
> Seitdem hat er mit unabläßigem Eifer fortstudirt, und gilt unter seinen Fachgenossen für einen der ausgezeichnetsten Mathematiker.

[43] Gemeint ist wohl Maximilian von Schwerin.
[44] Ebenda.

> In der Schule unterrichtet er mit dem günstigsten Erfolge. Er erfreut sich der Liebe und Achtung seiner Schüler. Die Disciplin übt er mit gleicher Sicherheit in den oberen wie in den unteren Klassen, wenn es nicht richtiger ist, zu sagen, daß er sie zu üben nicht nöthig hat, und daß sie sich als im Resultat seines Unterrichts und seines Verhaltens von selbst ergiebt. Sein anspruchsloses Wesen hat ihn in das beste Verhältniß zu seinen Collegen und zu dem Director gestellt. In Publikum genießt er die allgemeine Achtung.
>
> Eine persönliche Auszeichnung und eine Erhöhung seines Einkommens, zu welcher die Anstalt indeßen die erforderlichen Mittel nicht besitzt, würde daher eine wohlverdiente Anerkennung seines Wirkens sein.
>
> Wir sind indeßen der Meinung, daß nach den zur Zeit noch bestehenden Bestimmungen seine definitive Anstellung an einem christlichen und evangelischem Gymnasium nicht erfolgen kann.
>
> Sollten Euer Excellent indeßen eine Ausnahme, wie sie in Bezug den Dr. Jutrosinski an der Realschule hierselbst durch das hohe Rescript vom 24ten Dezember v. Jr. (U 9855) gestattet worden ist, für zulässig erachten, so würde die Persönlichkeit des Lehrers eine derartige Maßregel besonders rechtfertigen.[45]

Der Fall Jutrosinski war also zumindest im PSK bekannt, und bot wohl eine recht einmalige Gelegenheit, auch eine zweite Festanstellung durchzusetzen. Für diese sprach sich auch der Posener Oberpräsident Karl von Horn (1807–1889) aus. Er war der höchste Verwaltungsbeamte in der Provinz Posen,[46] und fügte der Eingabe des PSK am linken Rand – dieser wurde häufig für Anmerkungen dieser Art genutzt – folgende persönliche Note hinzu:

> Posen, den 20ten Februar 1868
>
> Die städtischen Behörden in Lissa interessieren sich auf das Lebhafteste dafür, daß der g Toeplitz an dem dortigen Gymnasium definitiv angestellt und seiner Anciennität und Tüchtigkeit gemäß in seinem Diensteinkommen verbessert werde, und haben mir dies mit der Bitte zukommen gegeben, mich persönlich dafür bei Eurer Excellenz zu verwenden. Ich nehme keinen Anstand, dies hiermit ehrerbietigst zu thun.
>
> Der Wirkliche Geheime Rath und Ober-Präsident Horn[47]

In gewisser Weise stand also die Einschätzung des Oberpräsidenten gegen die des PSK – die Annahme oder Ablehnung des Antrags durch den Kultusminister von Mühler schien also, zumindest nach dieser Rekonstruktion der Ereignisse, völlig offen. Ein zunächst leeres Antwortschreiben ist auf den 5. März datiert (siehe

[45] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 2: 1868–1877.

[46] Gleichzeitig war er Oberregierungspräsident des Regierungsbezirkes Posen, was die enge Verzahnung zwischen Verwaltung und politischen Ämtern in den preußischen Provinzen widerspiegelt. Er arbeitete zuvor als Ministerialdirektor im preußischen Finanzministerium, wurde aber wegen seiner liberalen Haltung von Otto von Bismarck und dessen Finanzminister aus dem Amt komplimentiert. Das Abberufen verdienter Politiker als Oberpräsident in die Provinz war damals eine gängige Auszeichnung, und bedeutete für die Amtsträger sozusagen die Krönung ihrer Karriere.

[47] GStA PK, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 2: 1868–1877.

Abb. 7), an dessen wiederum linken Rand schrieb am 7. März oben genannter Wiese folgende abschlägige Einschätzung:

> Ich trage Bedenken, die Angabe zu zeichnen. Der Antrag des kgl. Ober-Präsidenten, mit dem das Prov. Schulkollegium *nicht* übereinstimmt, ist eine rasch eingetretene Folge der nun auch im Centralbl. veröffentlichten Verfügungen zu Gunsten jüdischer Schulamtscandidaten in Posen, ist aber den Grundsätzen entgegen, welche bei Bewerthung der Sache als maßgebend ausgesprochen worden sind, u zu denen gehörte: daß die veränderte Praxis in Betreff jüdischer Schulamtscandidaten auf Realschulen beschränkt, u keinesfalls auf *Gymnasien* ausgedehnt werden solle.[48]

Was danach passierte, wissen wir nicht, der Minister nahm sich jedoch einige Zeit, ehe er am 2. Mai 1868 folgende Entscheidung fällte:

> Nachdem der jüdische Gymnaisal-Hülfslehrer Toeplitz in Lissa dem Gymnasium daselbst während eines Zeitraumes von 20 Jahren seinen Dienst gewidmet und sich in jeder Beziehung als einen tüchtigen Lehrer bewährt hat, will ich das [PSK] auf den Bericht des 17. Februars d.J. – No 475/68 – ausnahmsweise ermächtigen, den g. Toeplitz bei sich darbietender Gelegenheit als Lehrer an dem Gymnasium in Lissa, unbeschadet des Charakters der Schule als eine evangelische Unterrichts-Anstalt und ohne Präjustiz für künftige Fälle, definitiv anzustellen.[49]

Das Datum im Briefkopf wurde nachträglich vom 5. März auf den 5. Mai umdatiert und der Brief an das Posener PSK zurückgesandt. Am 22. Mai 1868 verfügte das PSK die endgültige Anstellung Toeplitz' als ordentlicher Lehrer am Königlichen Gymnasium in Lissa![50] Im Lissaer Jahresprogramm von 1869 heißt es dazu kurz:

> Durch Verfügung vom 22. Mai 1868 erlangte zu unsrer Freude unser langjähriger Mitarbeiter, Lehrer Töplitz, die Anstellung als ordentlicher Lehrer.

Der Dienstzeit nach hätte Toeplitz zwar eine Stellung als 5. Oberlehrer zugestanden, die Einstellung als unterster *ordentlicher* Lehrer war aber sicher eine Freude, die nach so langer Zeit des Kampfes und der Entbehrungen nicht getrübt werden konnte.

Später müssen wohl weitere Gesuche dieser Art im Ministerium eingegangen sein, denn von Mühler sah sich am 25. Januar 1869 offenbar verpflichtet, den prinzipiellen Standpunkt der preußischen Regierung erneut zu erklären: Nach dieser Erklärung über die „Anstellungsfähigkeit der Juden im Dienste des höheren Unterrichts" ergebe sich die Nichtanstellung von Juden an Elementar- und höheren Schulen allein aus der konfessionellen Erziehungsaufgabe derselben, sei also nicht als staatsbürgerliche Schlechterstellung zu verstehen. Zur Unterstreichung dieses

[48] Ebenda. Bei den „Verfügungen zu Gunsten jüdischer Schulamtscandidaten in Posen" handelte es sich wohl um eine Reihe von Verfügungen ebenfalls vom 24 Dezember 1869, welche trotz der gemachten Ausnahme den konfessionellen Charakter höherer Lehranstalten bestätigte.

[49] Ebenda.

[50] Uri Toeplitz berichtet in seiner Autobiographie, die Sache habe sogar den preußischen Landtag beschäftigt, wir konnten diese Angabe aber nicht belegen. (U. Toeplitz, 1999, S. 39)

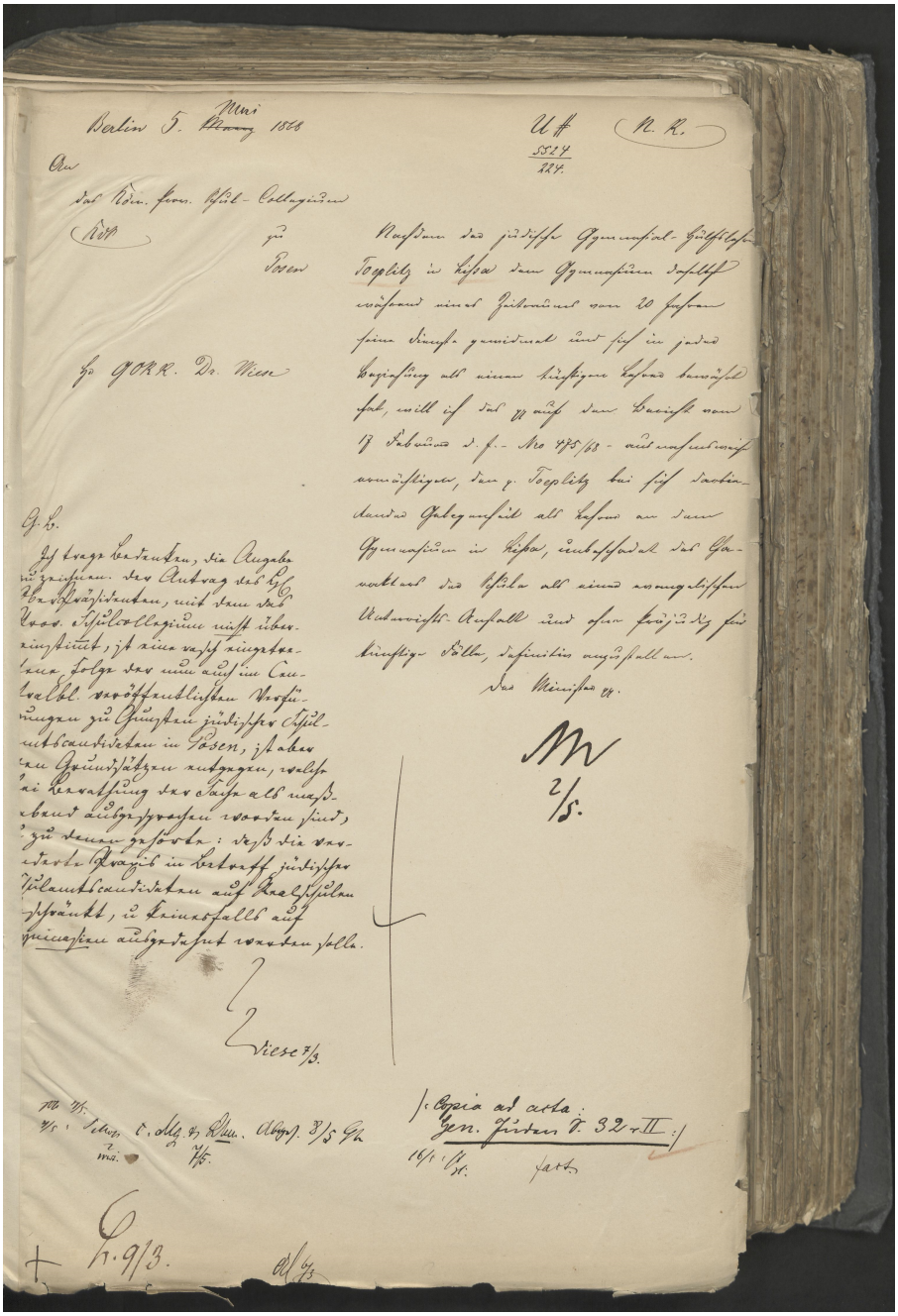


Abbildung 7: Antwortschreiben des Ministeriums vom 7. Mai 1868. (GStA PK)

Arguments führte der Minister an, dass auch katholische Lehrer nicht an evangelischen Schulen unterrichten können und umgekehrt, und dass an Universitäten und Fachschulen, die keinen erzieherischen Auftrag und daher in der Regel auch keinen konfessionellen Charakter haben, Staatsbürger aller Religionen arbeiten dürften. Kurz gesagt: „Eine Beschwerde der Juden über Beeinträchtigung ihrer verfassungsmäßigen Stellung wäre nur dann als begründet anzuerkennen, wenn die jüdischen Bewohner des Preußischen Staates mit einem anderen Maaß gemessen würden, als die christlichen. Das ist jedoch nicht der Fall“ (Zentralblatt, 1869, 95f). Soweit blieb das Ministerium auf seiner orthodoxen Linie, welche in der preußischen Erziehung zuallererst die Ausbildung der protestantischen Gesinnung der Jugend im Blick hatte. Und schließlich:

> Wenn neuerdings die Anstellung einiger jüdischer Lehrer an höheren Unterrichts-Anstalten der Provinz Posen genehmigt worden ist, so bin ich mir vollständig bewußt gewesen und habe es ausdrücklich ausgesprochen, daß dies lediglich einzelne, nach den Verhältnissen der betreffenden Anstalten für zulässig erachtete Ausnahmen seien. Wenn aber, anstatt dies anzuerkennen, der Anspruch erhoben wird, jüdischen Lehrern den Eintritt in die Lehrer-Collegien höherer confessioneller Unterrichts-Anstalten als ein verfassungsmäßiges Recht allgemein zugestanden zu sehen, so finde ich mich außer Stande, um des persönlichen Interesses einzelner jüdischer Lehrer willen den christlichen Charakter der Preußischen Unterrichts-Anstalten, welcher auf innerer Nothwendigkeit beruht und eine durch Jahrhunderte gehende Entwicklung hinter sich hat, Preis zu geben. (Ebenda.)[51]

Doch auch diese Verteidigungshaltung musste bald aufgegeben werden. Im selben Jahr unterzeichnete Otto von Bismarck (1815–1898), Bundeskanzler des 1867 gegründeten und von Preußen geführten Norddeutschen Bundes, das „Gesetz, betreffend die Gleichberechtigung der Konfessionen in bürgerlicher und staatsbürgerlicher Beziehung“. Damit wurden alle noch bestehenden rechtlichen Diskriminierungen gegenüber Juden aufgehoben, insbesondere konnten sie von nun an auch öffentliche Ämter ausüben und Lehrer an öffentlichen Schulen werden.

[51] Ähnliche Argumentationen finden sich bereits in (Zentralblatt, 1867, 759f) sowie (Zentralblatt, 1868, S. 86).

Aufstieg zum Oberlehrer

Im Jahr 1868 war Toeplitz 44 Jahre alt und begann seine, wie man sagen könnte, geregelte Karriere als ordentlicher Gymnasiallehrer. Seine Unterrichtsverpflichtung blieb zunächst dieselbe, was erneut belegt, dass er innerhalb der Schule schon vorher als „normaler“ Lehrer geachtet war. Allerdings wurde es ihm durch die ordentliche Anstellung zum ersten Mal möglich, durch Aufstieg in der Hierarchie der Lehrer seine Gehaltsstufe beträchtlich zu steigern. Dabei wurde die Beförderung nie nach Leistung, sondern strikt nach Anciennität durchgeführt, man stieg also einzig durch Pensionierung oder Weggang höherer Lehrer auf. Außerdem fand er wohl mehr Zeit oder Muße für wissenschaftliche Tätigkeit. Nach den oben genannten vier Veröffentlichungen Ende der 1850er-Jahre publizierte er in seiner Zeit als Hilfslehrer nur ein einziges weiteres Mal, nämlich den ersten Teil seiner *Analytisch-geometrischen Studien* (J. Toeplitz, 1865) im Lissaer Jahresprogramm. In dieser wurde zwar eine „längere Arbeit“ (J. Toeplitz, 1865, S. 2) als Fortsetzung angekündigt, aber erst nach seiner Festanstellung aufgegriffen (J. Toeplitz, 1871). Außerdem publizierte er seit 1868 zwei „Kleinere Mittheilungen“ in der Schlömilch-Zeitschrift (J. Toeplitz, 1869, 1878) sowie zwei weitere größere Arbeiten in den Jahresprogrammen der Schule (J. Toeplitz, 1879, 1885). Auf all diese Arbeiten kommen wir in Teil 3 zurück.

Die sogenannten *Gründerjahre* 1871–1873 müssen dabei für Toeplitz von großer Genugtuung geprägt gewesen sein. 1871 erschien die oben erwähnte Fortsetzung der *Analytisch-geometrischen Studien*; 1872 legte sein älterer Sohn Emil Toeplitz (1852–1876) das Abitur am Lissaer Gymnasium ab; im selben Jahr hielt Julius Toeplitz anlässlich der Geburtstagsfeier des im Vorjahr zum Kaiser gekrönten Wilhelm I. eine Festrede „Über die Einwirkung der Sprache auf das Denken“ (Jahresprogramm 1873, S. 48), einem Thema mit anhaltender Aktualität.[52] Im folgenden Jahr, zu Ostern 1873, wurde Toeplitz zum 5. Oberlehrer ernannt. Zur selben Zeit machte auch der jüngere Sohn Oskar Toeplitz (geb. 1854) das Abitur. 1874 stieg Toeplitz bereits zum 4. Oberlehrer auf. Wie sehr das Lehrergehalt von der Position in dieser rigiden Hierarchie abhing, zeigt eine Auflistung der Besoldungen am Lissaer Gymnasium aus den 1880er Jahren. Der Reichstaler war mittlerweile im Verhältnis 1:3 von der Mark abgelöst worden, der 8. Lehrer (auf dessen Stufe Toeplitz im Jahr 1868 einstieg) verdiente 1800 Mark plus 300 Mark Wohngeld. Mit jeder Stufe steigerte sich das Gehalt um etwa 300 Mark, sodass Toeplitz als 4. Oberlehrer bereits 3750 Mark plus 480 Mark Wohngeld erhielt. Dies entspricht einer Verdoppelung seines Gehalts allein in den ersten 10 Jahren seiner festen Dienstzeit.[53]

[52] 1876 trat er ein weiteres Mal als Festredner auf, nämlich anlässlich des Sedantages am 2. September, dem nationalistischen Gedenktag des militärischen Sieges über Frankreich.

[53] Da wir uns auf die Angaben einer einzigen Tabelle aus den 1880er-Jahre beziehen, ist diese Angabe bereits „inflationsbereinigt“.

Am 26. März 1877, starb der erst im Vorjahr pensionierte Schuldirektor Adalbert Ziegler. Ein „zahlreiches Trauergefolge von Männern und Frauen aller Stände und aller Confessionen, ferner selbstredend das Lehrer-Collegium und alle Schüler der Anstalt“ begleiteten den Toten zur letzten Ruhe (Jahresprogramm 1878, S. 10). Fünf Jahre später sollte das Gymnasium aus dem Ziegler so „verleideten“ (s.o.) Schloss in einen nahegelegenen Neubau umziehen.

Im gleichen Schuljahr entschied sich die Schulleitung, die Sekunda auf zwei Jahre auszudehnen. Dadurch erhielt Toeplitz zum ersten Mal die Chance, Mathematikunterricht in einem der höheren Jahrgänge, nämlich vier Wochenstunden in der Untersekunda, zu unterrichten. Dazu kam der Mathematikunterricht in der Obertertia, während die jüngeren Jahrgänge an einen neuen Hilfslehrer abgegeben wurden. Auch sank Toeplitz' wöchentliche Belastung auf 20 bis 22 Stunden. Trotzdem blieb er in der Anciennität immer hinter von Karwowski zurück, der nach wie vor den Mathematikunterricht der obersten Klassenstufen abhielt. Dass diese Hierarchie nicht auf mathematische Fähigkeiten gestützt war, wird deutlich, wenn wir Toeplitz' Vielzahl an wissenschaftlichen Arbeiten (siehe Teil 3) mit der geringen Produktivität von Karwowskis vergleichen; von letzterem ist lediglich ein in zwei Teilen erschienener elementarer Aufsatz „Ueber die Theilbarkeit der Zahlen und die dabei zum Vorschein kommenden Eigenschaften derselben“ (Jahresprogramme 1850, 1856) überliefert. Als Lehrer wurde er trotzdem gut beurteilt, in einem Bericht von 1880 heißt es, von Karwowski sei „noch lebendig und anregend, obschon er schwer hört“. Die Leistungen des Französischlehrers seien „Wenig befriedigend“, in dessen Anschluss lässt sich über Toeplitz gewohnt positiv lesen:

> Hervorragend tüchtig dagegen ist der jüdische Mathematiker O.L. Töplitz, der auf II inf. [Untersekunda] Mathematik und Physik, auf V [Quinta] Latein [...?]. Wissenschaftlich als Mathematiker hochstehend erzielte er auch als Lehrer recht gute Erfolge. Selbst im Lateinischen waren die Formen sicher durchgeübt. Als Charakter ist er durchaus ehrenwerth.[54]

Als von Karwowski 1885 wegen Krankheit beurlaubt und kurz darauf pensioniert wurde, durfte der nunmehr 2. Oberlehrer Toeplitz zum ersten Mal – nach 37 Jahren als Lehrer am Gymnasium! – die Prima und Obersekunda in Mathematik unterrichten. Den Lateinunterricht durfte er abgeben, er unterrichtete fortan und bis zu seiner Pensionierung die Mathematik in den obereren vier bis fünf Jahrgängen (15-18 Wochenstunden) sowie die gesamte Physik (6 Wochenstunden, nur in den drei oberen Jahrgängen). Hinzu kamen meist 2 Wochenstunden Naturgeschichte in der Obertertia (Jahresprogramme 1884–1888; siehe Abb. 8).

Nach unserer Recherche könnte Julius Toeplitz tatsächlich der erste jüdische Oberlehrer an einer staatlichen höheren Schule in Preußen gewesen sein (Konvertiten nicht mitgerechnet). Der oben genannte Löwenthal blieb Zeit seines Lebens Hilfslehrer, sein Nachfolger Jutrosinski wurde zwar ordentlich angestellt, wurde

[54] GStA, I HA-76, VI Sekt. VI z, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 3: 1877–1885.

aber nie Oberlehrer. Auch im weiteren Verlauf des 19. Jahrhunderts blieben jüdische Oberlehrer eine Ausnahme.[55] Im *Kalender für das höhere Schulwesen Preußens und einiger anderer deutscher Staaten* – als *Kunze's Kalender* bekannt und von Julius Toeplitz' Sohn Emil Toeplitz mit herausgegeben – erscheinen ab 1895 Auflistungen sämtlicher Schuldirektoren, Professoren, Oberlehrer, Hilfslehrer und anstellungsfähiger Kandidaten. Der erste uns verfügbare Band ist der vom Schuljahr 1898/99, in welchem auch der Tod von Julius Toeplitz vermerkt ist. An staatlichen Schulen finden wir in dieser Auflistung insgesamt 38 jüdische Oberlehrer, dazu kommen 19 Oberlehrer an den beiden höheren Schulen der jüdischen Gemeinde in Frankfurt am Main. Von den 38 unterrichtete die große Mehrheit – 22 Lehrer – an verschiedenen Schulen in Berlin, die restlichen finden wir in den Provinzen Schlesien (5) – vor allem am überkonfessionellen *Johanneum*, in Posen (5), in Hessen-Nassau (4) sowie in Brandenburg und Sachsen (je 1). Von diesen haben nur zwei ihre Lehrerprüfung vor der endgültigen rechtlichen Gleichstellung der Juden im Jahr 1871 abgelegt, nämlich der Historiker Ludwig Oelsner (1831–1910) in Frankfurt am Main im Jahr 1856 und der Literaturhistoriker Daniel Jacoby (1844–1918) in Berlin im Jahr 1868.[56] Diese große Diskrepanz legt den Schluss nahe, dass der Fall Toeplitz tatsächlich eine so große Ausnahme im preußischen Schulwesen war, dass er sogar mit einigen Jahren Abstand der erste Gymnasialoberlehrer an einer staatlichen Schule in Preußen gewesen sein könnte.[57] Doch auch die Biographien zahlreicher weiterer jüdischer Gelehrter, die trotz der auch nach 1871 bestehenden Schwierigkeiten ihren Weg in den preußischen Schuldienst fanden, legen ein beeindruckendes Zeugnis der jüdischen Emanzipation im deutschen Schulwesen ab.

Ernennung zum Gymnasial-Professor

Mit von Karwowskis Weggang verfügte das Königliche Gymnasium Lissa über keinen Lehrer mit dem Titel eines *Professors* mehr. Dies veranlasste den neuen Schuldirektor Hermann Eckardt (geb. 1837), die Verleihung dieses Titels an den ersten und zweiten Oberlehrer – den Lateinlehrer Franz Nesemann (1836–1902) sowie Julius Toeplitz – in Angriff zu nehmen. Die Anfrage wurde über das PSK Posen am 31. Dezember 1886 dem preußischen Kultusminister Gustav von Gossler (1838–1902), vorgelegt. Ihr Inhalt gibt uns nicht nur Zeugnis von Toeplitz' fortlaufendem Ansehen am Lissaer Gymnasium, sondern auch einen

[55] Die Beschränkung unserer Angaben auf *Ober*lehrer ist der Tatsache geschuldet, dass die Quellenlage hier weit systematischer ist. Davon abgesehen scheint sich mit der Zeit der Titel des Oberlehrers auf alle fest angestellten Lehrer bezogen zu haben.

[56] Oelsner arbeitete allerdings bis 1877 am jüdischen Philantropin und erst ab 1877 an einer staatlichen Schule.

[57] Auch auf den über 1000 Seiten der zwei Bände (Heppner und Herzberg, 1905a; Heppner und Herzberg, 1905b) mit zahlreichen Gelehrtennamen findet sich nur ein solcher Fall: „Am Gymnasium zu Lissa wirkte der 1897 verstorbene Gymnasialoberlehrer Professor Jul. Toeplitz." (Band II, S. 604).

Einblick in die strengen Kriterien, welche an die Verleihung dieses Titels geknüpft waren:

> Am Gymnasium zu Lissa, der ältesten höheren Lehranstalt der Provinz Posen, haben früher in der Regel unsere Oberlehrer den Titel „Professor“ geführt. Zur Zeit ist kein Oberlehrer dieser Anstalt durch den genannten Titel ausgezeichnet. Infolge dessen erbittet der Gymnasialdirector Dr. Eckardt in Lissa für die ersten beiden Oberlehrer Dr. Nesemann und Töplitz den Professortitel.
>
> Oberlehrer Dr. Franz Nesemann ist 50 Jahre alt, seit 1863 im öffentlichen Schuldienst, seit 1864 fest angestellt, seit 1869 Oberlehrer. Er hat eine ausgebreitete Unterrichtsbefähigung: Latein, Griechisch, Deutsch und Geschichte für Prima, und ist ohne Frage ein gründlich wissenschaftlich durchgebildeter Philologe, der ununterbrochen weiter arbeitet. Als Lehrer genügt er – abgesehen von einigen, durch schweres häusliches Unglück herbeigeführten Eigenheiten – mäßigen Anforderungen. In außeramtlicher Hinsicht steht er als ernster Mann von festem Charakter in hoher Achtung und geziemendem Ansehen. Unter den von ihm veröffentlichen wissenschaftlichen Arbeiten sind folgende namhaft zu nennen: [...]
>
> Oberlehrer Julius Töplitz ist 61 Jahre alt, schon seit 1848 im öffentlichen Schuldienst, seit 1868 fest angestellt, seit 1873 Oberlehrer, seit dem 1. d. Mts. zweiter Oberlehrer. Auch er besitzt eine ausgedehnte Unterrichtsbefähigung: Mathematik und Physik für Prima, Latein und Deutsch für die mittleren Klassen. Als Lehrer erzielt der g. Töplitz vorzügliche Unterrichtserfolge. In wissenschaftlicher Hinsicht besitzt er auf seinem Gebiete, in der Mathematik, so ausgebreitete Kenntnisse, wie sie bei einem Gymnasiallehrer sich nur höchst selten finden; denn er hat alle Gebiete der neueren Mathematik, welche erst seit den letzten Jahrzehnten auf Universitäten gelehrt worden und die den älteren Lehrern meistens ganz unbekannt sind, bis zu vollständiger Beherrschung durchgearbeitet. Hiervon geben folgende zahlreichen, in Druck erschienenen wissenschaftlichen Abhandlungen des Töplitz Zeugniß: [Es folgt eine Auflistung der in Teil 3 zusammengefassten Arbeiten sowie die o.g. Aufgabensammlung.]
>
> Bei den Schülern und deren Eltern genießt der g. Töplitz ein großes Vertrauen, und auch in außeramtlichen Kreisen erfreut er sich eines seltenen Ansehens; er ist seit einer langen Reihe von Jahren Stadtverordneter, und unter seinen Glaubensgenossen – er ist jüdischer Religion – übt er einen günstigen, in hohem Maße bestimmenden Einfluß.
>
> Hiernach erscheint er einer Auszeichnung besonders würdig.
>
> Unter den etatsmäßigen Oberlehrern der höheren Lehranstalten hiesiger Provinz, welche nicht den Titel Professor führen, gehören die gg. Töplitz und Nesemann zu den älteren. Die im Lebensalter vorausstehenden [...] leisten in wissenschaftlicher und unterrichtlicher Hinsicht durchweg weniger. Unter diesen Umständen dürfte sich auch aus einer Vergleichung mit den Oberlehrern der übrigen höheren Lehranstalten der Provinz Posen kein Hinderungsgrund für die beantragte Auszeichnung ergeben.[58]

Für Nesemann wurde bereits zwei Wochen später, am 25. Januar 1887, die Verleihung des Professorentitels entschieden (Jahresprogramm 1887, S. 34). Toeplitz

[58] GStA PK, I. HA, Rep. 76 VI, Sekt. VI, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 4: 1885–1894.

musste trotz des enthusiastischen Empfehlungsschreibens deutlich länger auf eine Antwort aus Berlin warten. Doch am 2. April 1887 wurde auch ihm das „Patent als Professor“ zuerkannt,

> in dem Vertrauen, daß der nunmehrige Professor Julius Toeplitz Seiner Majestät dem Könige und dem Allerhöchsten Königlichen Hause in unverbrüchlicher Treue ergeben bleiben und die Pflichten des ihm übertragenen Amts in ihrem ganzen Umfange mit stets regem Eifer erfüllen werde; wogegen derselbe sich des Ranges und der Prärogative, welche den von mir ernannten Professoren zustehen, zu erfreuen haben soll.[59]

Damit war die Entscheidung gerade noch vor die Eröffnung des neuen Schuljahrs am 19. April gefallen, sodass Eckart „bei dieser Gelegenheit gleich den Schülern die Mitteilung machen [konnte], dass dem Herrn Oberlehrer Toeplitz in Anerkennung seiner Verdienste um die Anstalt der Professorentitel verliehen worden sei“ (Jahresprogramm 1888, S. 16). Eine finanzielle Besserstellung bedeutete der erworbene Titel zwar nicht, Toeplitz war aber als nunmehr 2. Oberlehrer auf ein Gehalt von 4050 Mark und 480 Mark Wohnzulage aufgerückt, womit er in der Besoldung nur noch hinter Nesemann stand.

Diese Auszeichnung war sozusagen die Krönung von Toeplitz' Karriere, auch publizierte er hiernach keine wissenschaftlichen Aufsätze mehr. Ab 1889/90 reduzierte sich sein Lehrauftrag nochmals, nun auf 16–18 (im letzten Dienstjahr sogar auf 12 Stunden). Nach Jahrzehnten der Schufterei auf niedrigem Posten war er nun zeitweise (nach dem Direktor) derjenige Lehrer mit den wenigsten Wochenstunden.

Im Jahre 1891 führte Toeplitz seinen späterhin wohl berühmtesten Schüler, Leo Baeck (1873–1956), zum Abitur. Dieser war von 1938 bis 1955 Präsident der *World Union for Progressive Judaism*. Beispielhaft für Toeplitz' Lehrtätigkeit aus dieser Zeit seien im Folgenden die in Baecks Jahrgang gestellten Abituraufgaben wiedergegeben:

1. In einem Dreieck ist: $b^2 - c^2 = 52$, $\beta = 61^\circ\, 55' \, 39,1''$, $\gamma = 58^\circ\, 6' \, 33,2''$. Man soll die Seiten des Dreiecks berechnen.
2. Von einem abgestumpften geraden Kegel sei das Volumen $v = 11683000$, die Differenz der Radien $r - \rho = 23$, die Differenz der Seitenlinie und der Höhe $s - h = 1$; man berechne s, h, r, und ρ.
3. Jemand hat eine Schuld von 50 000 Mark mit 5 pCt jährlich zu verzinsen. Er bezahlt halbjährlich mit den Zinsen 4000 Mark. Nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt sein?
4. Vergrössert man die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks um 20 m resp. 4 m, so wird die Hypotenuse 5 mal grösser, während der Inhalt um 78 qm gewinnt. Wie gross sind die Katheten? *Toeplitz.* (Jahresprogramm 1891, S. 6)

[59] GStA PK, I. HA, Rep. 76 VI, Sekt. VI, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 4: 1885–1894.

2 b. Übersicht über die Verteilung der Stunden im Winter-Halbjahr 1886/87.

Namen der Lehrer.	I.	O.-II.	U.-II.	O.-III.	U.-III.	IV.	V.	VI.	Stunden-zahl.
1. Dr. Eckardt, Direktor, Ordinarius von I.	6 Griech. 3 Gesch. u. Geogr.					1 Latein	1 Latein		11.
2. Prof. Dr. Nesemann, 1. Oberlehrer, Ordinar. von O.-II.	8 Latein	8 Latein		2 Gesch. 1 Geogr.					19.
3. Toeplitz, 2. Oberlehrer.	4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik	4 Math.	3 Math.	3 Math.				22.
4. Dr. Schubert, 3. Oberlehrer, Ordinar. von U.-II.	3 Deutsch	2 Deutsch 7 Griech.	8 Latein						20.
5. Mahn, 4. Oberlehrer. Ordinar. von O.-III.			7 Griech. 3 Gesch. u. Geogr.	7 Griech. 2 Deutsch					19.
6. Dr. Prause, 1. ordentl. Lehrer, Ordinar. von U.-III.	2 Polnisch		2 Deutsch 2 Franz.	2 Polnisch	7 Latein 2 Deutsch 2 Franz.				19.
7. Ernst, 2. ordentl. Lehrer, Ordinarius von IV.	2 Franz.	2 Franz.		2 Franz.		8 Latein 5 Franz.			19.
8. Ulrich, 3. ordentl. Lehrer, Ordinarius von VI.		3 Gesch. u. Geogr.					4 Franz.	9 Latein 3 Deutsch Sexta A. 2 Geogr. 1 Gesch.	22.
9. Dr. Voigt, 4. ordentl. Lehrer.				9 Latein	7 Griech.	2 Deutsch 2 Gesch. 2 Geogr.			22.
10. Rasmus, 5. ordentl. Lehrer, Ordinarius von V.				2 Naturw.	2 Naturw.	4 Math. 2 Naturw.	4 Rechnen 2 Deutsch 2 Naturw.	4 Rechnen	22.
11. Spieler, Schulamts-Kand.							8 Latein 2 Geogr. 1 Gesch.		11.
12. Schulz, Schulamts-Kand.								9 Latein Sexta B.	9.
13. Grundmann, Schulamts-Kand.					2 Gesch. 1 Geogr. 2 Ovid.			3 Deutsch Sexta B.	8.
14. Kwiatkowski, technischer Lehrer.	10 Stunden Turnen I. – VI. 2 Stunden Zeichnen (fakultativ) I.—U.-III.					2 Zeichn. 2 Polnisch	2 Zeichn. 2 Kalligr. 2 Polnisch	2 Naturw. 2 Zeichn. 2 Kalligr.	28.
15. Fleischer, Gesanglehrer.	7 Stunden Gesang I.—VI.								7.
16. Frommberger, Past. evang. Rel.-Lehrer.	2 Religion								2.
17. Petzold, Superint., evang. Rel.-Lehrer.		2 Religion							2.
18. Linke, Pastor, evang. Rel.-Lehrer.				2 Religion		2 Religion			4.
19. Roenneke, Pastor, evang. Rel.-Lehrer.	2 Hebr.	2 Hebräisch					2 Religion	1 Religion	7.
20. Gładysz, Vikar, kath. Rel.-Lehrer.	2 Religion								2.
21. Dr. Bäck, jüd. Rel.-Lehrer.	2 Religion			2 Religion		1 Religion	1 Religion 1 Religion		7.
22. Pollak, Vorschullehrer.	Septima: 4 Deutsch 3 Rechnen 1 Latein. Schrift.			Octava: 2 Deutsch 2 Rechnen.		Beide Abteilungen kombiniert: 5 Deutsch 3 Rechnen 2 Religion 3 Schreiben	1 Heimatkunde 1 Gesang 1 Turnen.		28.

Abbildung 8: Stundenverteilung am Gymnasium Lissa im Winterhalbjahr 1886/87.

Im selben Jahr veröffentlicht Toeplitz einen vollständigen *Katalog der Lehrerbibliothek*.[60] Dieser gibt detailliert Aufschluss über die recht umfangreiche schuleigene Bibliothek. Dass der Großteil der Bibliothek der Philologie – Deutsche, Lateinische und Griechische Sprache – gewidmet ist, entspricht ganz der Stellung dieser Fächer an einem humanistischen Gymnasium. Hinzu kommt als Zeugnis der gemeinsamen deutsch-polnischen Vergangenheit eine Sektion über "Slawische Sprachen und Litteratur" mit 45 fast sämtlich polnischsprachigen Werken (S. 68ff.). Die mathematische Sektion umfasst 51 Bücher, von denen einige direkt auf Toeplitz' Forschungsinteressen zurückzuführen sind. Diese umfassen die Werke (Chasles, 1839), (Steiner, 1832) und (Plücker, 1828/1831), ferner Fiedlers *Darstellende Geometrie* von 1871, Legendres *Élements de géometrie* auf deutsch (1822) und auf französisch (1823), Lagranges *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806) und *Théorie des fonctions analytiques* (1813) und drei Werke von Étienne Bezout (1730–1783). Auch findet sich im Bestand die fortlaufende Reihe des *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Jahrgänge 1831 bis 1862)– kurz *Crelle's Journal* – welche bereits vor Toeplitz' Dienstantritt angelegt wurde, und aus denen Toeplitz in seinen Aufsätzen häufig zitierte. Die zweite mathematische Zeitschriftenreihe der Bibliothek war *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik* (Band 19–25) in den Jahrgängen 1852–1860, in welchen sich also auch Toeplitz' Arbeiten finden. Die restlichen Werke der *höheren* Mathematik befassen sich fast vollständig mit der Differentialrechnung, so z.B. von Axel Harnack, (1851–1888), Sylvestre François Lacroix (1765–1843), Rudolf Lipschitz (1832–1903) und Charles Bossut (1730–1814). Als besonderer Schatz befand sich auch die *Ars conjectandi* (1713) von Jakob I Bernoulli (1654–1705) unter den Büchern der Bibliothek.[61]

Ostern 1895 wurde Julius Toeplitz in den Ruhestand versetzt. Dazu heißt es im Jahresprogramm von 1896:

> Aus dem vorigen Schuljahre [1894/95] ist noch nachzutragen, dass mit dem Schluss desselben Professor Julius Toeplitz aus dem Kollegium und aus dem Amte trat, nachdem er 47 Jahre lang mit nie ermattender Treue dem Gymnasium Lissa die erspriesslichsten Dienste geleistet. In der Schlussandacht gab Direktor Dr. Kunze dem herzlichsten Danke und dem Wunsche Ausdruck, dass es dem nun aus seinem Berufe scheidenden Kollegen vergönnt sein möge, noch manches Jahr in unserer Stadt in geistiger Frische zu verleben. Gleichzeitig überreichte er ihm den ihm Allerhöchst verliehenen Roten Adlerorden 4. Kl. Die Schüler ehrten ihren scheidenden Lehrer durch einen glänzenden Fackelzug, der, vom Gymnasialhofe ausgehend, vor dem Hause der Gefeierten in Form eines T Aufstellung nahm, während gleichzeitig eine Abordnung, bestehend aus 3 Primanern, ihm in seiner Wohnung Glückwünsche für seinen ferneren Lebensweg aussprach. [...] (Jahresprogramm 1896, S. 19)

[60] Siehe (von Sanden, 1905, 99f). Der Katalog ist online verfügbar: https://digital.ulb.hhu.de/ulbdsp/periodical/pageview/5682357

[61] Wir verzichten auf eine gesonderte Angabe der hier aufgeführten Werke im Literaturverzeichnis.

Die fast 20 Jahre Dienst als Hilfslehrer wurden ihm auf seine Pension nicht angerechnet.

Was für ein außerordentlich beliebter Lehrer Julius Toeplitz gewesen sein muss und wie sehr er sich seinem Gymnasium verbunden fühlte, zeigt das *Professor Julius Toeplitz-Stipendium*, welches er im Rahmen seiner Pensionierung einrichtete. Über dieses Stipendium steht in der Festschrift *Zur Geschichte der Lissaer Schule 1555–1905* ausführlicher:

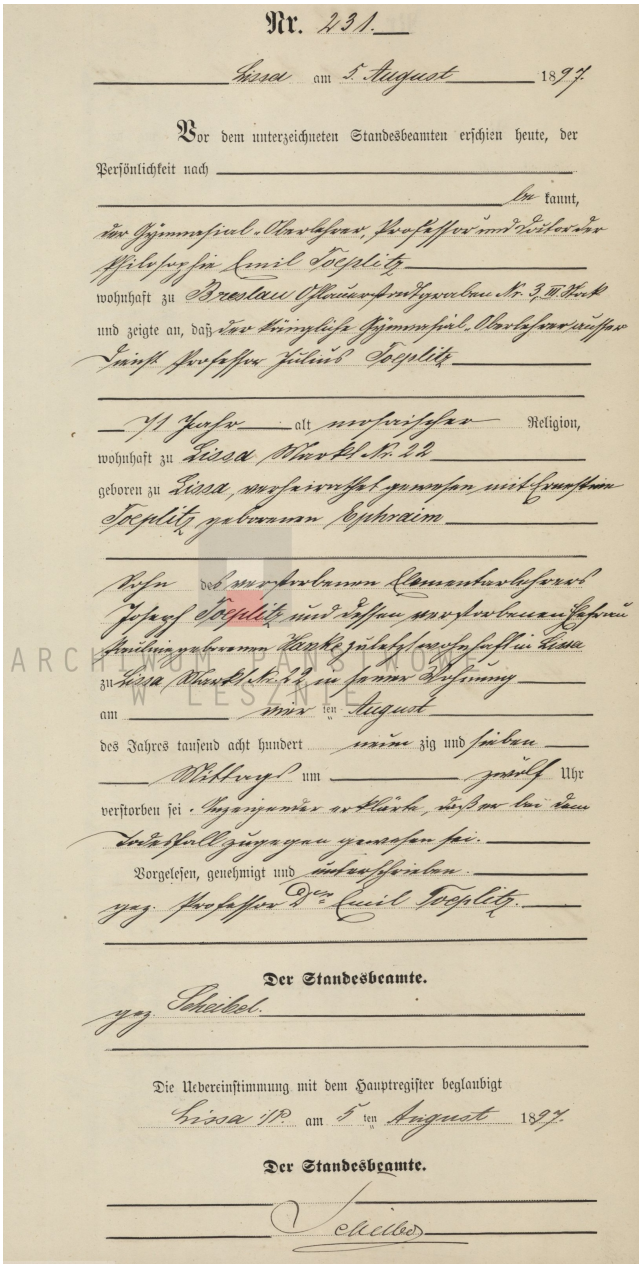
> Ehemalige Schüler des Professors Toeplitz haben demselben bei seinem Eintritt in den Ruhestand als Ergebnis einer unter ihnen veranstalteten Sammlung eine Summe von 4052,22 Mark zur Gründung einer wohlthätigen Stiftung am Gymnasium in Lissa übergeben. Die Zinsen dieses Kapitals sind „alljährlich zu Ostern bei der Entlassung der Abiturienten einem würdigen und bedürftigen Abiturienten des Gymnasiums in Lissa i. P. ohne Unterschied der Religion und der Nationalität“, zu verleihen. „Die Bestimmung des zu Unterstützenden steht dem Direktor und den wissenschaftlichen Lehrern der Prima zu. Das Kapital beträgt zur Zeit [1905] 4709,22 Mark, der Jahresbetrag des Stipendiums 150 Mark.“ (von Sanden, 1905, S. 102)

Es muss eine recht große Anzahl ehemaliger Schüler gewesen sein, die so ihrem Lehrer danken wollten, denn wie wir gesehen haben, entsprachen 4052 Mark etwa dem Jahresgehalt eines unteren Lehrers.[62] Die Verwendung des Stipendiums „ohne Unterschied der Religion und der Nationalität“ ist übrigens eine typische Formulierung für Stiftungen am Lissaer Gymnasium (andere von Jüdinnen und Juden gestiftete Stipendien wurden paritätisch an jüdische und christliche Schüler vergeben) und unterstreicht das besondere Selbstverständnis Lissas als „Stadt der Andersgläubigen“.

Der Wunsch des Direktors, Toeplitz möge „noch manches Jahr [...] in geistiger Frische“ (s.o.) verleben, erfüllte sich dagegen nicht. Nur zwei Jahre nach seiner Pensionierung, am 4. August 1897, starb „der königliche Gymnasial-Oberlehrer ausser Dienst Professor Julius Toeplitz“ in seiner Wohnung am Markt Nr. 22, wie in seiner Sterbeurkunde (siehe Abb. 9) belegt ist. Das Kollegium seines Gymnasiums widmete ihm „in den öffentlichen Blättern“ folgenden Nachruf:

> Am 4. d. M. verschied nach kurzem Krankenlager im 72. Lebensjahre der Gymnasial-Oberlehrer a.D Professor Julius Toeplitz, Ritter des Rothen Adlerordnes vierter Klasse. 47 Jahre hat er als Lehrer an dem hiesigen Gymnasium gewirkt. Durch sein hervorragendes Lehrgeschick, seine nimmer ermattende Berufstreue, seine im Stillen sich bethätigende Hilfsbereitschaft hat er sich die dankbare Liebe seiner Schüler, durch die schlichte Bescheidenheit und die Lauterkeit seines Wesens die Verehrung und die Freundschaft seiner Amtsgenossen erworben. Sein Andenken wird bei uns in Ehren bleiben. (Jahresprogramm 1898, S. 12)

[62] Toeplitz bezog zuletzt 5400 Mark plus 540 Mark Wohngeld.



Nr. 231.

Lissa am 5. August 1897.

Vor dem unterzeichneten Standesbeamten erschien heute, der Persönlichkeit nach bekannt,

der Königliche Musikdirektor, Professor und Direktor des Königlichen Musikinstituts Emil Toeplitz

wohnhaft zu Breslau Gartenstraße Hausnummer Nr. 3, III Treppe

und zeigte an, daß der Königliche Musikdirektor, Professor Emil Toeplitz

71 Jahre alt mosaischer Religion,

wohnhaft zu Lissa Markt Nr. 22

geboren zu Lissa, mosaischer Religion, des verstorbenen Kaufmanns Toeplitz Ephraim

und dessen verstorbener Ehefrau Johanna Toeplitz geborenen Kantorowicz

zu Lissa Markt Nr. 22 wohnhaft

am zehnten August

des Jahres tausend acht hundert neunzig und sieben

Montag um zwölf Uhr

verstorben sei, Ausgenommen ist Klarke, welcher bei dem Standesamte Breslau gemeldet sei.

Vorgelesen, genehmigt und unterschrieben

gez. Professor Dr. Emil Toeplitz.

Der Standesbeamte.

gez. Scheibel.

Die Uebereinstimmung mit dem Hauptregister beglaubigt

Lissa i/P. am 5ten August 1897.

Der Standesbeamte.

Scheibel

ARCHIWUM PAŃSTWOWE W LESZNIE

Abbildung 9: Sterbeurkunde von Julius Toeplitz

Familiäres

Zum Ende dieser biographischen Ausführungen gehen noch ein wenig auf das familiäre Leben des Julius Toeplitz ein. Dreh- und Angelpunkt der Familie scheint über viele Jahre ihre Wohnung am Marktplatz von Lissa zu sein. Weiterhin wiederkehrendes Thema ist die enge Verbindung mit der Familie Ephraim.

Wie bereits der ältere Bruder Jacob heiratete auch Julius Toeplitz eine Ephraim, nämlich Ernestine (1826–1905).[63] Wahrscheinlich waren Amalie und Ernestine Schwestern, denn sie sind im Abstand von nur 5 Jahren fast am selben Ort zur Welt gekommen: Amalie wurde 1821 in der Stadt Rawitsch geboren,[64] Ernestine 1826 im Ort Sarne (heute Sarnowo), nur fünf Kilometer von Rawitsch entfernt.[65] Der Vater von Ernestine war Benjamin Ephraim, er hatte noch mindestens drei weitere Kinder, Bertha, Julius und Henriette. In der zwischen 1876 und 1884 geführten *Seelenliste* der Stadt Lissa wird für den Benjamin Ephraim der Beruf *Particulier* (selbstständiger Binnenschiffer) angegeben, außerdem erfahren wir, dass er aus der Stadt Inowracław stammt, welche als Teil des Netzedistrikt 1772 an Preußen fiel (mit Unterbrechung zwischen 1807 und 1815). Er bewohnte das Haus 249 am zentralen Marktplatz in Lissa.[66] Zu dieser Zeit wurden die Häuser Lissas einfach durchnummeriert. 1877 zog Benjamin Ephraim in den Kreis Militsch nach Schlesien. Auch Julius Toeplitz lebte mit seiner Familie im Haus 249, und zwar mindestens zwischen 1876 und 1892. Dieses Haus bekam später die Adresse *Markt 22*, auf polnisch *Rynek 22*. In den 1870er- und 80er-Jahren wurde das Haus wesentlich erweitert (siehe Abb. 11 und 10), es beherbergte insgesamt etwa vier Familien samt Dienstpersonal. Über Ernestine Ephraim wissen wir nicht viel. Sie litt Zeit ihres Lebens an der Gicht, so hieß es in einem ärztlichen Attest von 1862:

> Madame Ernstine Teplitz [sic!] 36 Jahr alt leidet seit eine Reihe von Jahren an gichtischen Ablagerungen in den Gelenken. Bei erheblichen Witterungswechsel exercabiren namentlich die Schmerzen in den letzten Jahren in beiden Kniegelenken, so daß eine Vereiterung in den Kniegelenken, und somit eine Bedrohung des Lebens durch einen [?] Proceß zu besorgen ist. Der ganze Arzneischutz von allen nur irgend empfohlenen Mitteln ist bereits in Anwendung gezogen, allein der Erfolg ist weit hinter den Erwartungen zurückgeblieben. Das einzige Mittel, von welchem erfahrungsgemäß eine Besserung zu erwarten ist, ist eine 6wöchentliche Kur der Thermen zu Teplitz, welche ich Patienten allein anempfehlen kann unter obwaltenden Verhältnissen. Dies bescheinigt hiermit pflichtgemäß auf Verlangen
>
> Lissa d. 30. Maerz 1862 Dr. Buttermilch[67]

[63] Jacob Toeplitz war verheiratet mit Amalie Ephraim aus Rawitsch; ihre zwei Töchter Ida und Julia Toeplitz leiteten als Junggesellinnen eine Pension in Breslau.
[64] Archiv Posen, Signatur 53/474/0/10.2.3/15173: Teodor-Tesitel (1870–1931): S. 379
[65] Archiv Lissa, Signatur 34/21/0/1.16/1292: Seelenliste Nr. 233–321 (1876–1884): S. 98. Weitere Ephraims tauchen in der Gegend nicht auf.
[66] Ebenda, S. 92
[67] GStA, I. HA, Rep. 76, VI Sekt. VI z, Nr. 23: Gymnasium zu Lissa, Bd. 1: 1862–1867.

Mit diesem Attest beantragte Ziegler für Toeplitz eine einmalige finanzielle Unterstützung in Höhe von 100 Rth. aus den Überschüssen der Schule:

> Der Hilfslehrer Toeplitz ist gering besoldet und hat eine kranke Frau, die an der Gicht leidet und nach dem angeschlossenen ärztlichen Atteste in diesem Jahre, und zwar da sie allein nicht reisen kann, in Begleitung eine Reise ins Bad machen muß.[68]

Offenbar verschlimmerte die Krankheit sich jedoch in den Folgejahren, denn in einem weiteren Unterstützungsantrag vom 5. Juli 1865 heißt es:

> Im laufenden Jahre ist die Ehefrau des g. Toeplitz, deren vieljährige Krankheit im letzten Winter grosse Fortschritte gemacht hat, wieder genöthigt, das gedachte Bad zu besuchen, und der Direktor des Gymnasiums hat daher gebeten, dem Toeplitz eine Unterstützung von 75 Rth. zu gewähren. Da der letzte unausgesetzt fortfährt, sich durch Tüchtigkeit und Ehrenhaftigkeit der Anstalt nützlich und der allgemeinen Achtung würdig zu zeigen, und da er nicht die Mittel besitzt, die Kosten der Reise und Kur zu bestreiten, so bitten wir Ew. Excellenz gehorsamst:
>
> hochgeneigtest zu genehmigen, daß dem Hülfslehrer Toeplitz eine außerordentliche Unterstützung von 75 Rth. aus der Schulkasse gezahlt werde. (Ebenda.)

Über den weiteren Krankheitsverlauf wissen wir nichts, Ernestine Toeplitz überlebte allerdings ihren Ehemann um mehrere Jahre und starb fast 80jährig in Breslau.

Wir haben bereits die beiden Söhne des Ehepaars erwähnt. Sie besuchten jeweils acht Jahre das Lissaer Gymnasium; Emil machte sein Abitur Ostern 1872, Oskar Ostern 1873. Beide Abiturienten erhielten die besondere Auszeichnung, von den mündlichen Prüfungen befreit zu werden.

Oskar Toeplitz studierte Jura, war dann Landgerichtsrat in Bromberg (heute Bydgoszcz) und brachte es schließlich zum Vertrauensamt eines Grundbuchrichters in Berlin-Charlottenburg. Er heiratete 1885 seine Cousine Eveline (Lina) Frankenstein, die Tochter des Kaufmanns Moritz Frankenstein und der Bertha Ephraim, Schwester seiner Mutter (siehe Abbildung 3 auf S. 27). Neben dem Onkel Julius Ephraim war Julius Toeplitz Trauzeuge der Hochzeit in Lissa. Das einzige Kind des Paares, Martin Toeplitz (1886–1942), wurde 1886 geboren. Er wurde auch Jurist, war nach dem Examen 1914 einige Jahre Hilfsrichter und wurde nach einem Intermezzo bei der Reichsversicherungsanstalt 1921 Amtsgerichtsrat am Amtsgericht Berlin-Mitte. Ab 1922 war er Landgerichtsrat und ab 1930 Kammergerichtsrat. Er war unverheiratet und zog nach dem Tod des Vaters zu seiner Mutter in die elterliche Wohnung. Bereits zum 1. November 1933 erhielt er Berufsverbot. Am 26. September 1942 wurde er nach Raasiku bei Reval deportiert und unmittelbar nach der Ankunft am 30. September ermordet; vermutlich wurde er in den Dünen von Kalev-Liiva erschossen und dort in einem Massengrab

[68] Ebenda.



Abbildung 10: Das Haus der Familie Toeplitz – Markt 22 – ist das dritte von links, abgebildet auf einem Foto von Lissa aus dem Jahre 1874.

verscharrt. Seine betagte Mutter wurde wenig später nach Theresienstadt deportiert, wo sie am 30. Juli 1943 starb. In der Elßholzstraße 30–33, vor seinem letzten Arbeitsort, wurde am 11. November 2010 zum Gedenken an Martin Toeplitz ein Stolperstein verlegt.[69]

Auf Emil Toeplitz werden wir in einer späteren Veröffentlichung ausführlich eingehen. Er studierte wie sein Vater Mathematik an den Universitäten Breslau und Leipzig; sein Studium schloss er 1876 mit einer Promotion „Über ein Flächennetz zweiter Ordnung“ ab. Er arbeitete fortan am renommierten Johannesgymnasium in Breslau, und war ein deutschlandweit bekannter Pädagoge, der auch mit bedeutenden Mathematikern verkehrte und auch mit einigen freundschaftliche Beziehungen unterhielt. 1880 heiratete er in Breslau die Pauline Lubliner (1857–1892). Auch sie war eine Cousine, nämlich die älteste Tochter der oben genannten Henriette Ephraim, wiederum eine Schwester der Mutter von Emil, sowie des Kaufmanns Samuel Siegfried Lubliner. Über beide ist nichts näheres bekannt, dem Geburtsort ihrer vier Kinder nach lebten sie wohl in Militsch (heute Milicz), 40 km von Rawitsch entfernt. Das zweite Kind Max Lubliner (1856–1940) hatte wohl ein bewegtes Leben, welches ihn über Belgien in die Schweiz brachte, wo er 1940 kinderlos verstarb.[70] Ein Jahr nach der Hochzeit zwischen Emil Toep-

[69] Die Angaben zu Martin Toeplitz, Otto Toeplitz' Cousin, stammen aus den Recherchen zu den Stolpersteinverlegungen in Berlin, die im Internet zugänglich sind.

[70] In den belgischen Archiven finden sich ebenfalls aus Militsch eine Claire Lubliner (geb. 1861)

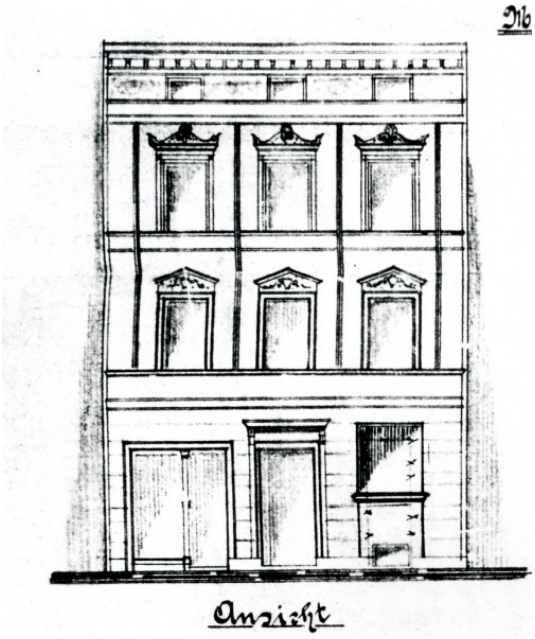


Abbildung 11: Frontansicht des Hauses Markt 22 von 1916.

litz und Pauline Lubliner wurde der spätere Mathematiker Otto Toeplitz (1881–1940) geboren. Bereits im Alter von 34 Jahren starb Pauline Lubliner an Tuberkulose, der „Unglückskrankheit“ der Familie Toeplitz, wie die Enkelin Eva Wohl (2004, S. 8) später berichtet. Wie aus den Lissaer Archiven hervorgeht, kehrte Emil Toeplitz mit seinem Sohn Otto nach diesem tragischen Ereignis für eine kurze Zeit (im Neujahr 1892/93) in das elterliche Haus nach Lissa zurück.[71]

In der Wohnung der Familie Toeplitz in Lissa lebte weiterhin in den 1880er-Jahren Rachel Rosa Lubliner, die jüngste Tochter von Ernestines Schwester Henriette Lubliner (siehe Abbildung 3).[72] Sie ging für einige Jahre, wohl mit ihrem Bruder Max, nach Ghent, wohnte von Februar 1893 bis Oktober 1894 aber wieder bei Julius und Ernestine Ephraim in Lissa. In dieser Zeit heiratete sie in Breslau den Hildesheimer Kaufmann Emil Danziger, Trauzeugen waren Max sowie ihr Cousin (und mittlerweile Schwager) Emil Toeplitz. Das Paar lebte fortan in Hamburg.

Einige Wochen nach dem Tod von Julius Toeplitz im Jahr 1897 zog die Witwe Ernestine nach Breslau. Sie war die letzte Toeplitz in Lissa.

---

und eine Betty Lubliner (geb. 1866), wahrscheinlich zwei weitere Schwestern.

[71] Archiv Lissa, Signatur 34/21/0/1.16/1328: 1893-1903

[72] Archiv Lissa, Signatur 34/21/0/1.16/1307: Volksbuch Markt, Grunegasse (1884–1892), S. 169

3 Wissenschaftliches Werk

Julius Toeplitz hat einige wissenschaftliche Arbeiten publiziert, fünf in den Jahresprogrammen des Gymnasiums zu Lissa, drei in *Grunerts Archiv* und zwei unter der Rubrik „Kleinere Mittheilungen“ in der Schlömilch-Zeitschrift.

Es war damals üblich, dass in den Jahresprogrammen der Gymnasien auch eine Veröffentlichung eines der Lehrer erschien. Da auf den humanistischen Gymnasien die alten Sprachen und die Geisteswissenschaften dominierten, war es schon eine gewisse Auszeichnung, dass Julius Toeplitz dort mehrfach publiziert hat. Grunerts Archiv und die Schlömilch-Zeitschrift waren damals vor allen Dingen für Gymnasiallehrer gedacht. Alle diese Publikationen enthalten keine bedeutenden neuen Resultate und sind wohl vor allem für Studierende oder Kollegen im Schuldienst gedacht, die ein Interesse daran haben, gewisse Themen der Physik oder Mathematik von einem höheren Standpunkt aus zu überblicken; sie sind sozusagen didaktisch orientierte Arbeiten einer besonderen Art.

Veröffentlichungen in Grunerts Archiv (1854/1858a/1859)

Das *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der höheren Lehranstalten*, auch *Grunerts Archiv* genannt, war eine 1841 bis 1920 erschienene Zeitschrift, die sich besonders an Gymnasiallehrer wandte.

Toeplitz' erste Publikation unter dem Titel „Die Theorie der periodischen Funktionen, begründet durch die Betrachtung der Integrale zwischen imaginären Grenzen“ war eine recht umfangreiche Arbeit und erschien 1854. Das Ziel seines Aufsatzes umreißt der Autor folgendermaßen:

> Die Integralrechnung allein giebt uns die naturgemässen Mittel an die Hand, neue Funktionen zu finden und ihre Eigenschaften zu erforschen. Je mehr also dafür geschieht, die Prinzipien der Integralrechnung fest zu begründen, desto klarer werden uns die Eigenschaften der Funktionen vor Augen treten, und desto sicherer werden wir mit denselben umgehen. Ein Integral wird nun direkt als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Gliedern definirt, diese Definition jedoch nur für den Fall gewöhnlich konsequent durchgeführt, wenn die Grenzen der Integration reelle Grössen sind. In diesem Aufsatze will ich nun den Versuch machen, diese Definition auf die Integrale zwischen imaginären Grenzen auszudehnen. Mein Bestreben geht dahin, zu zeigen, dass nur durch diese Ausdehnung das wahre Wesen der Integrale uns zugänglich werde, dass neue Eigenschaften der Integrale sich dadurch ganz von selbst ergeben und dass durch sie allein die wahre Quelle der Periodicität der Funktionen aufgefunden werde. (J. Toeplitz, 1854, S. 241)

Diese Einführung zeigt bereits, dass Toeplitz seinen Lesern einen wichtigen Abschnitt der komplexen Funktionentheorie nahe bringen will.

Nach Anfängen bei Euler und d'Alembert entstanden im 19. Jahrhundert drei verschiedene Traditionslinien der Entwicklung der komplexen Analysis, die von Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Bernhard Riemann (1826–1866) und Karl Weierstrass (1815–1897), „die erst im 20. Jahrhundert in einer einheitlichen Sichtweise zusammenflossen" (Bottazzini, 1999, S. 269). Riemanns fundamentale Dissertation erschien in keiner Zeitschrift und war in Göttingen nur als Manuskript gedruckt worden; sie war im fernen Lissa vermutlich nicht vorhanden und war Toeplitz um 1854 sicher nicht bekannt. Die Weierstrassssche Begründung der Theorie der analytischen Funktionen erfolgte ebenfalls erst später. So lehnt sich Toeplitz' Arbeit ganz an Cauchys Vorgehen an.[73]

Toeplitz beginnt damit, seinen Lesern den Begriff des bestimmten Integrals über eine Funktion $f(x)$ zwischen den reellen Grenzen a und b zu erläutern und die Integrationsregeln, wie z. B.

$$\int_a^b (f(x) + cg(x))dx = \int_a^b f(x)dx + c\int_a^b g(x)dx$$

herzuleiten. Von der Funktion $f(x)$ fordert er, dass sie „kontinuirlich" sei. Das bedeutet, dass $f(x)$ für jedes x zwischen a und b „einen endlichen Werth annimmt" und dass für „unendlich kleines ϵ" die Gleichung gilt

$$f(x + \epsilon) - f(x) = \epsilon \cdot f'(x),$$

d. h. $f(x)$ wird als differenzierbar vorausgesetzt. Hier sieht man schon den unmittelbaren Anschluss an Cauchy, der ebenfalls mit unendlich kleinen Größen operiert hat. Bei seinen Untersuchungen über Integrale komplexwertiger Funktionen $f(z)$ in der komplexen Zahlenebene hat Cauchy $f(z)$ als endlich und stetig vorausgesetzt, aber „ohne Bedenken Existenz und Stetigkeit von f' benutzt" (Remmert, 1984, S. 139). Schauen wir zunächst, wie Toeplitz das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ mittels unendlich kleiner Größen definiert: Seien $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_n$ „unendlich kleine Grössen von der Art, dass: $a + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n = b$ ist" (J. Toeplitz, 1854, S. 242), so haben wir als Definition die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)dx = \epsilon_1 f(a) + \epsilon_2 f(a + \epsilon_1) + \epsilon_3 f(a + \epsilon_1 + \epsilon_2) + \cdots + \epsilon_n f(b - \epsilon_n).$$

Wendet man die obige Bedingung für Kontinuität auf $x = a$ an, so erhält man

$$f(a + \epsilon_1) - f(a) = \epsilon_1 f'(a)$$

[73] Cauchy ist der einzige, der am Ende seiner Arbeit zweimal erwähnt wird; es wird aber keine Publikation Cauchys genannt. Zu Cauchys langem und mühevollem Weg von der grundlegenden Publikation (Cauchy, 1825) bis zum Stand seiner Theorie am Beginn der 1850-er Jahre siehe (Bottazzini, 1999, S. 268–295).

und sukzessive auch $f(a+\epsilon_1+\epsilon_2)-f(a+\epsilon_1)=\epsilon_2\cdot f'(a+\epsilon_1)$ usw. Alle diese Gleichungen bis n addiert, ergibt

$$f(b)-f(a)=\epsilon_1 f'(a)+\epsilon_2 f'(a+\epsilon_1)+\cdots+\epsilon_n f'(b-\epsilon_n)=\int_a^b f'(x)dx,$$

d. h. den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Es ist bei diesen Schlüssen immer an einen sukzessiven Vorgang gedacht, bei dem n unendlich groß wird. Die ganze Schlussweise ist natürlich weit entfernt von der späteren „Weierstrassschen Strenge“ in der Analysis. Allerdings lassen sich diese Schlussweisen mittels der heutigen Nichtstandardanalysis, die unendlich kleine und unendlich große Zahlen in einem nichtarchimedisch geordneten Erweiterungskörper des Körpers der reellen Zahlen zulässt, exakt begründen.

Das eigentliche Thema seiner Arbeit, nämlich bestimmte Integrale in der komplexen Ebene zu definieren und zu untersuchen, beginnt Julius Toeplitz mit der Definition von Kontinuität im komplexen Fall: Eine komplexwertige Funktion $f(x)$ heißt kontinuierlich zwischen den Grenzen $\alpha+i\beta$ und $\gamma+i\delta$, „wenn in dem Ausdrucke $f(u+vi)=\phi(u,v)+i\cdot\psi(u,v)$ sowohl $\phi(u,v)$ als $\psi(u,v)$ für alle Werthe von u zwischen α und γ, verbunden mit allen Werthen von v zwischen β und δ kontinuirlich bleiben“ (J. Toeplitz, 1854, S. 244). Das würde also bedeuten, dass die reellen Funktionen ϕ und ψ im Rechteckgebiet mit der Diagonalen $\alpha+i\beta$, $\gamma+i\delta$ überall endliche Werte annehmen und dass sie dort überall nach u und v partiell differenzierbar sind.

Beim Integral im Reellen gibt es nur einen Weg zwischen den Grenzen a und b. Beim Integral in der komplexen Zahlenebene hat man eine vollkommen andere Situation. Wie in diesem Fall $\int_{\alpha+i\beta}^{\gamma+i\delta} f(x)dx$ mittels unendlich kleiner Größen definiert werden kann, beschreibt Toeplitz so:

> [Wir lassen] die Variable x durch unendlich kleine Inkremente, die wir ganz nach unserem Belieben bald reell, bald imaginär annehmen, von dem Werthe $\alpha+\beta i$ zu dem Werthe $\gamma+\delta i$ übergehen; für diese unendlich vielen Werthe der Variablen x bilden wir die entsprechenden Werthe der Funktion $f(x)$, multiplizieren jeden dieser Werthe mit dem nächstfolgenden unendlich kleinen, reellen oder imaginären Inkremente von x und addieren dann alle diese Produkte. Eine solche Summe nennen wir *das Integral der Funktion* $f(x)$ *zwischen den Grenzen* $\alpha+\beta i$ *und* $\gamma+\delta i$. (Ebenda)

Anschaulich betrachtet kann man jeden stetigen Weg von $\alpha+i\beta$ nach $\gamma+i\delta$ innerhalb des o. g. Rechteckgebietes durch eine Folge unendlich kleiner waagerechter und senkrechter Inkremente entstanden denken. Um aber Integrale zu definieren, sollten dies ja unendlich viele unendlich kleine Schritte sein, wobei in den Formeln, die das Integral definieren, nur immer endlich viele solche Inkremente vorkommen. Das Herangehen und die damit entstehenden Probleme versucht Toeplitz nun seinen Lesern folgendermaßen nahe zu bringen:

> Diese Definition [des Integrals] scheint nun viele Unbestimmtheiten in sich zu enthalten. Denn wenn z. B. $1 + 2i$ und $5 + 6i$ die gegebenen Grenzen sind, so kann man x erst durch reelle Inkremente von dem Werthe $1 + 2i$ zu dem Werthe $3 + 2i$, dann durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $3 + 2i$ zu dem Werthe $3 + 6i$, und endlich wieder durch reelle Inkremente von dem Werthe $3 + 6i$ zu dem Werthe $5 + 6i$ übergehen lassen. Man könnte aber auch auf unendlich viele andere verschiedene Weisen verfahren, da nur die Bedingung gestellt ist, dass die Reihe der x mit dem Werthe $1 + 2i$ beginne und mit dem Werthe $5 + 6i$ schliesse, während die Art und Weise der Uebergänge ganz unserem Belieben überlassen ist. Man könnte also schliessen, dass nach unserer Definition zwischen denselben Grenzen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ bei ein und derselben Funktion $f(x)$ unendlich viele solcher Summen vorhanden sind, die wir oben Integrale genannt haben. Es bieten sich uns daher folgende Fragen zur Erörterung an: erstens, wie muss die Funktion $f(x)$ beschaffen sein, damit jede dieser Summen sich einer bestimmten endlichen Grenze nähere; zweitens, welche von diesen Summen sind einander gleich; und endlich, wenn einige dieser Summen verschiedene bestimmte Werthe annehmen, um welche Differenz unterscheiden sie sich dann von einander? (Ebenda, S. 244f)

Es ist hier nicht der Ort, die umfangreichen Rechnungen darzustellen, die Toeplitz schließlich zur Antwort auf die drei gestellten Fragen führen. Es ergibt sich für den Fall, dass $f(x)$ im o. g. Rechteckgebiet "kontinuirlich" ist, folgendes:

1. Jede der unendlich vielen möglichen Summen, welche das Integral definieren, konvergiert.

2. Alle diese Summen konvergieren gegen den gleichen Wert, d. h. $\int_{\alpha+i\beta}^{\gamma+i\delta} f(x)dx$ hängt unter obiger Voraussetzung nicht davon ab, auf welchem Weg man von der unteren zur oberen Grenze des Integrals gelangt.

Es muss aber bemerkt werden, dass weder die Konvergenz bewiesen wird noch die Tatsache, dass der Weg von $\alpha + \beta i$ nach $\gamma + \delta i$, der durch die infinitesimalen Trippelschritte in der Grenze für $n \to \infty$ entsteht, eine stetige Kurve ist.

Der für Toeplitz' eigentliches Thema wichtigste Fall ist der, dass $f(x)$ im betrachteten Gebiet nicht überall kontinuierlich ist, sondern an einer Stelle $x_1 = u_1 + iv_1$ im Innern des Gebietes unendlich wird. Dann gibt das Integral $\int_{\alpha+i\beta}^{\gamma+i\delta} f(x)dx$ nicht bei jedem Weg von der unteren zur oberen Grenze den gleichen Wert, sondern es gilt: Alle Wege rechts von x_1 liefern einen Wert w; alle Wege links von x_1 liefern $w - \Delta$, wobei Δ in speziellen Fällen auch Null sein kann. Für Wege, die x_1 enthalten, existiert das Integral nicht. Daraus ergibt sich, dass das Integral auf einem Weg, der einmal x_1 umkreist, den Wert Δ hätte, bei zweimaligem Umkreisen 2Δ usw.

Sein eigentliches Ziel, durch Integrale im Komplexen neue Funktionen einzuführen und bei deren Umkehrfunktionen gegebenenfalls Periodizitäten festzustellen, behandelt Toeplitz in einem letzten Abschnitt unter der Überschrift *Allgemeine Definition der Integrale und die Periodicität der Funktionen.* Zunächst bildet er das Integral $\int_a^x f(z)dz$ in der zuvor ausführlich erklärten Weise; nur hier soll x als

variabel aufgefasst werden. Wenn $f(z)$ überall kontinuierlich ist, d. h. eine überall holomorphe Funktion, so ist $y(x) = \int_a^x f(z)dz$ eine überall holomorphe Funktion, dass deren Ableitung gerade $f(x)$ ist. Wenn aber $f(z)$ für einen Wert $z_1 = u_1 + iv_1$ "diskontinuirlich" wird, so muss man bei der Definition des Integrals alle Wege von a nach x ausschließen, die durch z_1 gehen. Alle anderen Wege von a nach x liefern aber hier nicht dasselbe, sondern „y hat unendlich viele Werthe, die sich alle um ein positives oder negatives Vielfaches einer bestimmten Grösse Δ von einander unterscheiden" (Ebenda, S. 256).[74] Dann heißt es bei Toeplitz weiter:

> Betrachten wir umgekehrt die Grenze x als eine Funktion von y, so erhält x in dem letzteren Falle für alle Werthe von y, die sich um ein Vielfaches von Δ von einander unterscheiden, ein und denselben Werth. x bleibt also ungeändert, wenn sich y um ein Vielfaches von Δ ändert, und daher heisst dann x eine *periodische Funktion von* y und Δ der *Index der Periodicität* oder die *Periode.*

Als Beispiel betrachtet er $y = \int_1^x \frac{dz}{z}$. Dazu bemerkt er: „Bekanntlich wird y durch das Symbol $\log x$ und x durch das Symbol e^y bezeichnet." (Ebenda.) Bei $z_1 = 0$ hat $f(z) = \frac{1}{z}$ eine „Diskontinuität", einen Pol erster Ordnung. Hier ergeben seine Rechnungen $\Delta = 2\pi i$ und somit ist die Periode der komplexen Exponentialfunktion $2\pi i$: $e^{y+m\cdot 2\pi i} = e^y$. Für $y = \int_1^x \frac{dz}{z^n}$ zeigt Toeplitz, dass für jedes natürliche $n \geqslant 2$ gilt $\Delta = 0$; somit ist die Umkehrfunktion $x(y)$ nicht periodisch.

In *Grunerts Archiv* erschienen außerdem zwei weitere kleine Arbeiten von Toeplitz. Zum einen verallgemeinerte er einen einfachen Satz des Herausgebers Grunert. Dieser lautet: *Die kubische Gleichung* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, falls* $a^2 - 3b < 0$ *ist.* Toeplitz überträgt den Satz auf Polynomgleichungen allgemeinen Grades wie folgt:

> Wenn $(n-1)a^2 - 2nb < 0$ ist, so hat die Gleichung $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + kx + l = 0$ wenigstens zwei imaginäre Wurzeln. (J. Toeplitz, 1858a, S. 294)

Ein Jahr später erschien die kurze Notiz „Der Fermat'sche und der Wilson'sche Satz, aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet" (1859). In dieser beweist Toeplitz die folgende Kongruenz als gemeinsame Quelle der beiden genannten Sätze: Wenn p eine ungerade Primzahl ist, so ist für jede ganze Zahl x

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) \equiv x^{p-1} + (p-1)! \pmod{p}$$

Setzt man darin $x = 1$, so erhält man den Satz von Wilson:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

[74] Es ist bemerkenswert, dass diese Tatsache Gauß bereits 1811 bekannt war, wie aus einem Brief an Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) vom 18. Dezember 1811 hervorgeht. Der Brief ist ausführlich zitiert bei (Remmert, 1984, S. 117). Gauß publizierte das Ergebnis jedoch damals nicht. Δ ergibt sich aus dem Integral $\int_a^a f(z)dz$, wenn der Weg eine Umkreisung von z_1 beschreibt, und ist bis auf einen Faktor das Residuum von f für den Punkt z_1.

Da nun der WILSONsche Satz gilt, geht die von TOEPLITZ bewiesene Kongruenz in folgende über: $(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) \equiv x^{p-1}-1 \pmod{p}$. Da einer der Faktoren der linken Seite $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, erhält man schließlich den FERMATschen Satz

$$x^p \equiv x \pmod{p}.$$

„Das leitende Princip in der Physik und die Abhängigkeit der Hypothesen von demselben“ (1858b)

Wie wir sahen, hat JULIUS TOEPLITZ schon als junger Lehrer den Physikunterricht der oberen Klassen geleitet. Die Arbeit (J. Toeplitz, 1858b) ist eine bemerkenswerte Auseinandersetzung mit Grundlagenfragen der Physik, und ist TOEPLITZ' erste Veröffentlichung im Jahresprogramm des Lissaer Gymnasiums.

Das leitende Prinzip der Physik in den letzten Jahrhunderten, von der in der Überschrift die Rede ist, sei es gewesen, alle Erscheinungen auf die Bewegung von Materie zurückzuführen, das heißt, „die Gesetze, welche die Erscheinungen befolgen, müssen sich daher endlich als *Gesetze der Mechanik* oder Bewegungslehre herausstellen“ (J. Toeplitz, 1858b, S. 3). Zu ergründen, was die „innere Natur“ von Materie und Bewegung ist, müsse der Philosophie überlassen bleiben, die Physik nimmt Materie und Bewegung „als fertige, unerklärbare Grundlagen aller Vorgänge in der Natur an“ (Ebenda).

Nun habe sich aber gezeigt, dass für die verschiedenen Teilgebiete der Physik die Zurückführung auf die Mechanik in der Regel erst durch die Annahme zusätzlicher Hypothesen möglich wird. Die Mechanik selbst sei „der allgemeine Theil der Physik, da in ihr die Gesetze der Bewegung, die allen Naturerscheinungen gemeinsam sind, erörtert werden“ (Ebenda, S. 5). Sie benötigt über die von Newton gegebene Grundlage hinaus keine zusätzlichen Hypothesen. Auch in der Akustik sind keine weiteren Hypothesen erforderlich, da der Schall sich als Bewegung wahrnehmbarer Materie nachweisen lässt und Stärke und Höhe eines Tones „von der Größe und Schnelligkeit der Schwingungen abhängt“ (Ebenda).

Anders war die Situation in der Optik. JULIUS TOEPLITZ schildert, wie NEWTON die Optik als Teilgebiet der Physik mittels der Hypothese begründete, dass Licht aus kleinen Teilchen (Korpuskeln) bestehe, die von der Lichtquelle ausgestoßen sich nach allen Richtungen geradlinig fortbewegen.[75] Diese sollen den Bewegungsgesetzen, insbesondere dem Gravitationsgesetz, unterliegen. Die Farben des Lichtes werden durch verschiedene Größe der zugehörigen Korpuskeln verursacht. TOEPLITZ sieht in diesem Herangehen eine Pioniertat für die Physik; er schreibt:

> Erst seit Newton in seiner Optik den für seine Zeit glücklichen Versuch gemacht hat, die Lichterscheinungen auf eine solche Weise zu erklären, hat sich dieser

[75] Die Idee, dass Licht aus Teilchen bestehen könne, war schon in der Antike geäußert worden.

> Gedanke in allen Teilen der Physik zu immer grösserer Geltung und Berechtigung emporgeschwungen, und theilweise auch auf die verwandten Wissenschaften ausgedehnt. Newton kann daher mit Recht der Gründer der neueren Physik genannt werden. (Ebenda, S. 3)

Im weiteren Verlauf seiner Arbeit will Julius Toeplitz nun untersuchen, „auf welche Weise der leitende Gedanke, die Zurückführung auf materielle Bewegungserscheinungen, in den einzelnen Theilen der Physik seine Verwirklichung gefunden hat, und an welchen Stellen unsere Erkenntniss noch der Hypothesen bedarf“ (Ebenda, S. 4).

Da ist zunächst die Optik selbst noch einmal in Betracht zu ziehen. Newton konnte mit seiner Hypothese einige optische Erscheinungen, wie Reflexion, Brechung und Farben des Lichts erklären, andere jedoch nicht, wie die Polarisation. „Die Nachfolger Newtons waren daher in die Nothwendigkeit versetzt, den Lichtkörperchen immer mehr neue Eigenschaften anzudichten, und trotzdem waren sie nicht im Stande [$\cdots$] Interferenzerscheinungen zu erklären“ (Ebenda, S. 6.). Es sei deshalb nur folgerichtig gewesen, dass die (ursprünglich von Huygens begründete) Undulationstheorie des Lichts sich durchgesetzt habe. Aber auch hier benötige man eine Hypothese über den Träger der Fortpflanzung der Wellenbewegung (beim Schall sei dieser Träger beobachtbare Materie, etwa die Luft). Da aber zwischen den Himmelskörpern keine solche Materie vorhanden sei – sie hätte sich sonst über die Gravitation bemerkbar gemacht – nahm man an, dass der ganze Weltraum von einer Materie erfüllt sei, die in der Lage sei, als Träger der Lichtwellen zu fungieren, „doch zu fein sei, um irgendwie bemerkbare Attraktionswirkungen zu zeigen“ (Ebenda, S. 7). Diesen Stoff nannte man *Aether*. Julius Toeplitz zeigt dann in einem etwas längeren Überblick, wie alle bekannten optischen Erscheinungen mit der Undulationstheorie erklärt werden können. Seine Schlussfolgerung in Bezug auf die Hypothese von der Existenz des Äthers lautet folgendermaßen:

> Das Vertrauen auf die innere Wahrheit dieser Hypothese wird noch dadurch verstärkt, dass sie nicht bei jeder neuen Erscheinung einer neuen Ausschmückung bedarf; es ergeben sich vielmehr durch blosse theoretische Ausführungen neue Erscheinungen, die ohne die Theorie vielleicht nie bemerkt worden wären. Die Hypothese verlässt hiermit das Gebiet eines blossen Bildes und wird zur anschaulichen, wahrheitsgetreuen Darstellung der inneren Vorgänge in der Natur. (Ebenda, S. 8)

In der Tat war die Ätherhypothese noch in der gesamten Entwicklung der Physik im 19. Jahrhundert präsent. Erst die Experimente von Michelson und Morley und die 1905 publizierte spezielle Relativitätstheorie von Albert Einstein haben gezeigt, dass der Äther nicht existiert.

Bei weitem nicht so befriedigend wie die Ätherhypothese für die Undulationstheorie des Lichts erweisen sich nach Toeplitz die Hypothesen, die man in den übrigen Gebieten der Physik, nämlich der Wärmelehre, der Elektrizität und des Magnetismus zur Erklärung der Phänomene eingeführt hatte. Die Ausdehnung

eines Körpers bei Erwärmung konnte man erklären, indem man ein Wärmefluidum, einen Wärmestoff annahm, dessen Teilchen die Eigenschaft beigelegt wurde, einander abzustoßen. Wird dieses Fluidum in einem Körper in größerer Menge angehäuft als in der Umgebung, so kann es seinem eigenen Streben zur Ausdehnung folgen und dadurch auch den Körper ausdehnen. Auch Wärmestrahlung und Wärmeleitung ließen sich damit erklären. Um andere Erscheinungen, z. B. die Übergänge in andere Aggregatzustände, zu erklären, musste man dem Wärmestoff immer weitere Eigenschaften zuschreiben. Dazu Julius Toeplitz' Folgerung:

> Die vielfachen Anhängsel, die man so dem Wärmestoffe als Eigenschaften beigeben muss, um ihn zur Erklärung der Erscheinungen passend zu machen, liefern selbst den klarsten Beweis, dass das Wärmefluidum bei der Unzulänglichkeit unsrer Kenntniss der Wärmephänomene eben nur ein gleichsam pädagogisches Hülfsmittel zur Veranschaulichung derselben ist. Es bleibt uns freilich so lange unentbehrlich, als wir keine bessere Einsicht in die Natur der Wärmeerscheinungen erlangt haben. (Ebenda, S. 9–10.)

Zur Erklärung der miteinander zusammenhängenden Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus benötigte man sogar zwei Fluida. Die Teilchen des einen ziehen die des anderen an und stoßen sich selbst voneinander ab. In jedem materiellen Körper sind beide so innig verbunden, dass sie ihre Wirkungen gegenseitig aufheben. Wird ein Körper gerieben oder von einem elektrisch geladenen berührt, so wird das elektrische Fluidum getrennt und wirksam; dazu muss noch eine Kraft fingiert werden, die *elektromotorische Kraft.* Wird er magnetisiert, muss das magnetische Fluidum abgetrennt werden; hierzu muss eine weitere Kraft fingiert werden, die *Coërcitivkraft.* Aber selbst bei all diesen Annahmen könne man wiederum nicht alle Erscheinungen erklären, wie etwa den Diamagnetismus.

Die folgenden abschließenden Bemerkungen von Julius Toeplitz klingen wie eine Vorahnung, dass das Bestreben, alle physikalischen Teilgebiete letztlich auf die Mechanik zurückzuführen, aufgegeben werden muss.

> Endlich müssen wir zuletzt noch einmal auf das aufmerksam machen, was wir über die Entstehung und das Wesen der Hypothesen gesagt haben. Sie sind pädagogische Hülfsmittel unseres Geistes, um nothwendig vorhandene Bewegungen an bestimmte Objekte zu knüpfen. Die hypothetischen Fluida sind von uns geschaffene Bilder, und dürfen nie als wirklich in der Natur vorhanden angesehen werden. (Ebenda, S. 11)

Es ist bemerkenswert, dass er hier auch die Ätherhypothese nicht ausnimmt.

Dieser Artikel zeigt, dass Julius Toeplitz nicht nur ein fachlich hervorragender Lehrer war, der die Physik seiner Zeit überschaute, sondern auch ein eigenständiger Denker, der sich mit den Grundlagenfragen seines Faches kritisch auseinandersetzte.

„Analytisch-geometrische Studien zur Theorie der geraden Linien und der Kegelschnitte“ (1865)

In Toeplitz' zweiter Veröffentlichung im Lissaer Jahresprogramm – (J. Toeplitz, 1871) ist davon eine Fortsetzung – ging es dem Autor darum, in dem zum Teil heftigen Gegensatz zwischen den Vertretern der synthetischen Richtung der Geometrie und den Vertretern der analytischen Richtung Partei zu ergreifen, denn dieser Gegensatz beeinflusste auch die Didaktik des Geometrieunterrichts an den Gymnasien bzw. die Vermittlung geometrischer Inhalte an der Universität. Das beiden Arbeiten vorangestellte Vorwort macht sehr deutlich, auf welcher Seite er in dieser Auseinandersetzung stand, und am Ende des Vorworts werden insbesondere die didaktischen Absichten betont:

> Die synthetische Geometrie, wie sie von *Poncelet, Chasles* und *Steiner* ausgebildet wurde, schien lange Zeit hindurch der analytischen Methode den Rang abzulaufen, da sie nur von einfachen Verhältnissen Gebrauch machte, und mit deren Hülfe Sätze über das Durchschneiden von Linien und die Lage von Punkten ableitete, die analytisch nur durch langwierige Rechnungen gefunden werden konnten. Zugleich verliess die synthetische Methode nie den Boden der Anschauung, der während der umständlichen analytischen Rechnungen oft verloren ging. Dabei konnte jedoch nicht übersehen werden, dass die analytische Methode der naturgemässe Weg zur systematischen Entwicklung der Geometrie sei, während die synthetische nur in den Händen besonders begabter Männer ein geeignetes Werkzeug zur Förderung der Wissenschaft war.
>
> *Plücker* hat in seinen klassischen Werken zuerst gezeigt, wie man der analytischen Geometrie alle Vorzüge der synthetischen verschaffen könne, wenn man bei jeder Umformung einer Gleichung oder der Verbindung mehrerer Gleichungen unter einander ihre geometrische Deutung fest im Auge behalte. Aus seinen Untersuchungen geht hervor, dass alle Sätze, welche bloss die Lage von Punkten und das Durchschneiden von Linien oder deren Berührungen betreffen, einzig und allein aus Betrachtung der Formen der Gleichungen und ihrer Verbindungen ohne Herbeiholung von metrischen Relationen abgeleitet werden können und müssen. Ebenso müssen alle metrischen Relationen aus der geometrischen Deutung der Koeffizienten der Gleichungen abgeleitet werden. [...]
>
> Es enthält daher der nachfolgende Aufsatz mehr Andeutungen, als eine ausführliche systematische Behandlung des Gegenstandes, die ich mir für eine längere Arbeit vorbehalte. Jedenfalls, glaube ich, kann das Nachfolgende als Übungsmaterial für angehende Mathematiker verwendet werden. (J. Toeplitz, 1865, S. 1–2)

Es seien nun zunächst einige Bemerkungen zu den hier genannten Mathematikern erlaubt. Das Werk, mit dem die projektive Geometrie als eigenständiges Teilgebiet der Geometrie beginnt, ist das Buch *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) von Jean-Victor Poncelet (1788–1867). Wie schon der Titel des Buches sagt, bestimmt das „projektive Denken“ Poncelets neue Auffassung von Geometrie, zunächst sehr ausführlich in der Ebene, dann auch im Raum. Um projektive Transformationen, deren fundamentale Invariante das Doppelverhältnis von vier auf einer Geraden liegender Punkte ist, ausnahmslos ausführen zu können, erkennt

Poncelet die Notwendigkeit, den geometrischen Grundelementen unendlich ferne hinzuzufügen: der Geraden einen unendlich fernen Punkt, der Ebene eine unendlich ferne Gerade, dem Raum eine unendlich ferne Ebene. Zwei Geraden schneiden sich dann immer in einem Punkt, parallele Geraden in ihrem unendlich fernen Punkt. Die schon von Joseph Gergonne (1771–1859) entwickelte Lehre von Pol und Polare bei den Kegelschnitten führte Poncelet zu einer „Theorie der Reziprozität", die darauf beruht, dass – etwa in der projektiven Ebene – die Elemente Punkt und Gerade gleichberechtigt und vertauschbar als Grundelemente betrachtet werden können. Man spricht heute meist vom Prinzip der Dualität. Für die projektive Ebene kann es kurz so beschrieben werden: Durch das Hinzufügen der unendlich fernen Elemente haben wir in der projektiven Ebene folgende Inzidenzstruktur:

(1) Je zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade.

(2) Je zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Vertauscht man die Begriffe Punkt und Gerade sowie Schneiden und Verbinden, so werden nur (1) und (2) vertauscht; die Inzidenzstruktur bleibt. Dies führt zu folgendem Dualitätsprinzip: Vertauscht man in einem gültigen Satz (A) die Begriffe Punkt und Gerade sowie Schneiden und Verbinden, so entsteht ein dualer Satz (B), der ebenfalls gültig ist. Ein klassisches Beispiel für duale Sätze sind der Satz von Pascal (A) und der Satz von Brianchon (B). Poncelet hat das Dualitätsprinzip ausgiebig benutzt, insbesondere auch für die Behandlung der Kegelschnitte. Da zwei Kegelschnitte in geeigneter Konstellation vier Schnittpunkte haben, behauptet er, dass diese Anzahl immer vorhanden sein müsse, es können aber zwei oder alle vier Schnittpunkte imaginär sein. Er kann nun den Kreis in projektiver Weise als Kegelschnitt definieren, und zwar als solchen, der die unendlich ferne Gerade in zwei festen imaginären Punkten, den Kreispunkten, schneidet. Die Bezeichnung *imaginär* stammt hier vom Wortsinn *imaginieren*, und hat nichts mit imaginären oder komplexen Wurzeln von Gleichungen zu tun, denn Poncelet vertrat in seinem Werk einen streng synthetischen Zugang, der die Benutzung von Gleichungen der analytischen Geometrie ausschloss. Dementsprechend fehlen auch öfter Beweise und man kann von Poncelet sagen, dass er sich von seiner geometrischen Intuition leiten ließ oder, wie es Julius Toeplitz ausdrückte, ein für die Geometrie „besonders begabter Mann" war.

Die herausragende Figur für die weitere Entwicklung der projektiven Geometrie in Frankreich war Michel Chasles (1793–1880). Sein in dieser Beziehung wichtigstes Werk *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837) war eine Darstellung der Geschichte der Geometrie mit dem Schwerpunkt neuere Entwicklungen in Frankreich, die auch zahlreiche Noten des Autors mit neuen Ergebnissen zur projektiven Geometrie, insbesondere zu Kurven und Flächen zweiten Grades, enthielt. Bereits zwei Jahre später erschien mit (Chasles, 1839) eine deutsche Übersetzung. Im Vorwort betont Chasles seine strikt synthetische Herangehensweise an die Geometrie. Obwohl seine

> Bewunderung für das in unsern Tagen so mächtige analytische Hilfsmittel ohne Grenzen ist,

so wolle er in dem vorliegenden Werk zeigen,

> dass die Lehren der reinen Geometrie [gemeint ist der synthetische Zugang] oft und bei einer Menge von Fragen diesen einfachen und natürlichen Weg darbieten, der, bis zum Ursprung der Wahrheiten vordringend, die geheimnisvolle Kette, welche sie unter einander verbindet, offen darlegt, und sie einzeln auf das deutlichste und verständigste kennen lehrt. (Chasles, 1837, S. VIII)

Fraglich ist auch hier, ob jemand anderes für weitere Entwicklungen der Geometrie, insbesondere Kurven und Flächen höheren Grades betreffend, jene „geheimnisvolle Kette“ sieht.

Der dritte von Toeplitz im Zusammenhang mit dem synthetischen Zugang zur Geometrie genannte Gelehrte, Jacob Steiner (1796–1863), galt im deutschsprachigen Raum als Vertreter der synthetischen Geometrie schlechthin und genoss bei so berühmten Kollegen wie Jacobi oder Weierstrass ein hohes Ansehen.[76] Wie recht Julius Toeplitz mit seiner Bemerkung im obigen Zitat hatte, dass der synthetische Zugang zur Geometrie eine ganz besondere Begabung erfordere, zeigt Steiners auf synthetischem Wege erfolgte Entdeckung einer bemerkenswerten Fläche während seines Aufenthalts in Rom im Jahre 1844.[77] Es ist dies eine Fläche vierter Ordnung mit drei Doppelgeraden, die sich in einem dreifachen Punkt der Fläche treffen und deren Tangentialebenen die Fläche in Paaren von Kegelschnitten schneiden. Steiner hat darüber nie etwas publiziert; niemand erfuhr, wie er darauf gekommen ist oder wie er die speziellen Eigenschaften dieser Fläche bewiesen hat. 1863 fand Ernst Eduard Kummer im Rahmen der analytischen Geometrie diese Fläche und folgerte aus ihrer Gleichung

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2cxyz = 0$$

alle ihre bemerkenswerten Eigenschaften. Hätte sich zu diesem Zeitpunkt Weierstrass nicht daran erinnert, dass Steiner ihm von dieser Fläche einst erzählt hatte, hätte Steiner diese Entdeckung mit ins Grab genommen.

In seinem Hauptwerk (Steiner, 1832) verfolgt Steiner das Ziel, einen rein synthetischen Aufbau der Geometrie zu geben. Ausgangspunkt etwa in der Ebene sind die Grundgebilde Geraden, Geradenbüschel und die Ebene selbst. Die Grundgebilde werden projektiv aufeinander bezogen und man gewinnt so nächsthöhere Gebilde. Dieses Prinzip der sukzessiven Erzeugung höherer Gebilde aus niederen führt in dem hier publizierten ersten Teil bis zu den Kegelschnitten (die im Vorwort angekündigten weiteren vier Teile sind nie erschienen). Stofflich enthielt das Buch nichts neues; seine Wirkung beruhte auf seiner strengen Systematik des Aufbaus

[76] Weierstraß war Herausgeber von Steiners gesammelten Werken in zwei Bänden.

[77] Von Steiner selbst wurde sie Römische Fläche genannt und ist heute unter diesem Namen bekannt.

des ganzen Gebäudes. Als hervorragender Pädagoge strebte STEINER auch nach einem Gewinn für den Lernenden. Nachdem er im Vorwort beklagt hat, dass in der Geometrie die bekannten Sätze und Aufgaben „eine Sammlung von auseinander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen, Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganzes“ bilden, heißt es weiter:

> Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäß in einander greifen, in schönste Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. (Steiner, 1832, S. V–VI)

Großen Wert legte STEINER auf das für die projektive Geometrie charakteristische Dualitätsprinzip und hob die Paare “Sachverhalt – dualer Sachverhalt” durch Zweispaltendruck besonders hervor.

Bei STEINER selbst blieb dieser systematische Aufbau der Geometrie in den Anfängen stecken. Die Ende des Jahrhunderts aus dem STEINERschen Nachlass herausgegebenen Schriften konnten in dieser Beziehung keine Wirkung mehr entfalten. Der einzige konsequente Fortsetzer des STEINERschen Herangehens war HEINRICH SCHRÖTER (1829–1892), Ordinarius in Breslau. Er gab *Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie*, Teil II, aus dem STEINERschen Nachlass heraus (Schröter, 1867) und publizierte selbst drei umfangreiche Bücher (Schröter, 1880, 1888, 1890). Wir werden auf ihn in einer späteren Arbeit über EMIL TOEPLITZ, den Sohn von JULIUS TOEPLITZ, etwas näher eingehen und sehen, dass SCHRÖTERs Bemühungen auf ein totes Gleis führten.

Die drei von JULIUS TOEPLITZ genannten Exponenten der synthetischen Geometrie waren in einem Punkt inkonsequent: Sie benutzten ohne weiteres eine Metrik, d. h. sie haben unbefangen von Längen von Strecken und Größen von Winkeln Gebrauch gemacht, insbesondere um das Doppelverhältnis zu definieren und damit mittels der üblichen Formeln zu rechnen. Es ist nur einem Mathematiker gelungen, die projektive Geometrie rein synthetisch aufzubauen, und das war KARL CHRISTIAN VON STAUDT (1798–1867). In seinem Hauptwerk *Geometrie der Lage* (von Staudt, 1847) und den Folgeschriften (von Staudt, 1856/1857/1860) präsentiert er einen auf wenigen Grundsätzen basierenden deduktiven Aufbau der projektiven Geometrie, welcher „des Messens nicht bedarf“ (von Staudt, 1847, S. III).[78]

Es ist bemerkenswert, dass VON STAUDT bei seinen Bemühungen um die synthetische Geometrie gerade auch die Förderung des Gymnasialunterrichts im Blick

[78] Näheres dazu in (Klein, 1926, S. 132–140) und (Scriba und Schreiber, 2001, S. 373–377).

hatte. Fast das gesamte Vorwort zur *Geometrie der Lage* ist dieser Thematik gewidmet. Sicher hängt dies auch damit zusammen, dass VON STAUDT nach seinem Studium dreizehn Jahre als Gymnasiallehrer tätig war, ehe er 1835 zum ordentlichen Professor der Mathematik an die Universität Erlangen berufen wurde. Er hatte also große Erfahrung auf dem Gebiet der Schulmathematik. Es seien hier zwei charakteristische Passagen aus dem genannten Vorwort zitiert:

> Jeder geometrische Unterricht muss von allgemeinen Betrachtungen ausgehen, welche den Schüler mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt machen und sein Anschauungsvermögen üben. Die meisten Lehrbücher der Geometrie gehen aber zu bald zum Besondern, nämlich zur Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke über, daher sie auch manche Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit aufstellen. [· · ·]
>
> Wenn es für den Geübtern keine Uebung mehr ist, zu dem einen von zwei reciproken Sätzen den andern zu suchen, so ist diess doch für den Anfänger eine zweckmässige Aufgabe, welche ihn veranlasst, durch eigene Thätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen. Dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht. Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist. (von Staudt, 1847, S. III–IV)

Die pädagogischen Ziele, die VON STAUDT mit seinem Werk verband, dürften JULIUS TOEPLITZ gewiss interessiert haben. Man fragt sich deshalb natürlich, warum er in seinen kritischen Bemerkungen zur synthetischen Geometrie nicht auch VON STAUDT benennt, gerade denjenigen Vertreter dieser Richtung, dem es als einzigem gelungen war, sozusagen methodenrein synthetisch zu arbeiten. Dass er dessen *Geometrie der Lage* nicht kannte, ist kaum vorstellbar. Es könnte sein, dass er, 1865 noch „Hilfslehrer“ ohne feste Anstellung, nicht gegen einen hochverehrten deutschen Ordinarius polemisieren wollte, zumal er die zum Teil öffentlichen Auseinandersetzungen zwischen seinem Vorbild PLÜCKER und STEINER natürlich kannte. Dass er selbst ganz PLÜCKERs Auffassungen vertrat, geht ja aus seiner auf Seite 75 bereits zitierten Vorrede hervor.

Mit Einsatz der analytischen Geometrie erreichte auch die projektive Geometrie im deutschsprachigen Raum einen gewissen Abschluss durch die Beiträge von AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) und JULIUS PLÜCKER (1801–1868). Dabei ist bemerkenswert, was sicherlich mit den damaligen Beziehungen der Geometrie zu Anwendungen zusammenhängt, dass MÖBIUS und PLÜCKER, ähnlich wie MONGE, CARNOT und PONCELET, auch als Naturwissenschaftler berühmt wurden: MÖBIUS als Astronom und PLÜCKER als Physiker.

MÖBIUS' wichtigster Beitrag zur Geometrie ist sein Buch *Der barycentrische Calcul: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie* (1827). Es

ist in drei Abschnitte gegliedert. Im ersten Abschnitt *Darstellung des barycentrischen Calculs und einer darauf gegründeten analytischen Geometrie* führt er als erster homogene Koordinaten in die Geometrie ein. Wie der Titel des Buches schon sagt, besteht die Grundidee darin, den aus der Mechanik bekannten Begriff des Schwerpunkts für die Geometrie nutzbar zu machen. In der Ebene sei ein festes Dreieck, das Fundamentaldreieck, gegeben. Bringt man in seinen Ecken A, B, C Massen p_1, p_2, p_3 an, so wird dadurch ein Punkt P im Fundamentaldreieck bestimmt, der Schwerpunkt des so belasteten Dreiecks. Da Möbius auch negative Massen zulässt, kann so jeder Punkt der Ebene durch drei reelle Koordinaten p_i bestimmt werden. Dieses Koordinatensystem ist homogen, denn für $\mu > 0$ bestimmt $(\mu p_1, \mu p_2, \mu p_3)$ denselben Punkt, d. h. lediglich das Verhältnis der Koordinaten bestimmt den Punkt.[79] Möbius benutzt konsequent Vorzeichen in der Geometrie. Strecken und Geraden haben einen Richtungssinn; hat etwa die Strecke AB die Länge a, so hat BA die Länge $-a$. Bei Flächen gibt es entsprechend einen Umlaufsinn, so dass sich bei entgegengesetztem Umlauf das Vorzeichen des Flächeninhalts ändert. Im Abschnitt II ist es ihm dann mittels Benutzung der Vorzeichen möglich, eine konsistente Theorie des Doppelverhältnisses von vier Punkten auf einer Geraden zu entwickeln.

Der Abschnitt II *Von der Verwandtschaft der Figuren und den daraus entspringenden Classen geometrischer Aufgaben* ist im gewissen Sinne ein Vorläufer des berühmten Erlanger Programms von Felix Klein (1849–1925). Möbius untersucht hier eingehend Klassen geometrischer Transformationen zunehmender Allgemeinheit, also im Falle der Ebene bijektiver Abbildungen der Ebene auf sich, bei denen in jeder Klasse gewisse geometrische Eigenschaften erhalten bleiben. Er spricht auch von der Verwandtschaft geometrischer Figuren bei diesen Klassen von Transformationen. Die erste Klasse sind die Kongruenzabbildungen (die verwandten Figuren sind kongruent), es folgen die Ähnlichkeitsabbildungen, die affinen Abbildungen und schließlich die aus Sicht der projektiven Geometrie besonders interessanten von ihm neu eingeführten Kollineationen. Diese sind dadurch charakterisiert, dass stets Geraden in Geraden übergehen. Die entscheidende Invariante ist hier das Doppelverhältnis.

Im Abschnitt III, *Anwendung des barycentrischen Calculs auf die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*, geht es zunächst um die Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf auf ihm liegende Punkte oder durch fünf ihn berührende Tangenten. Die Punkt–Geraden–Dualität untersucht er zunächst an Kegelschnitten mittels der Pol–Polare–Dualität. Sein diesbezügliches allgemeines Ergebnis lautet:

> Liegen drei oder mehrere Puncte in einer Geraden, so schneiden sich die ihnen entsprechenden Geraden in einem Puncte und umgekehrt. (Möbius, 1827, § 275)

[79] Im Raum geht er von einem Fundamentaltetraeder aus; jeder Punkt ist dann durch das Verhältnis der vier „Massen“ p_i, die an den Ecken des Tetraeders angebracht sind, bestimmt.

Schließlich leitet er aus der Geradengleichung in baryzentrischen Koordinaten die Punkt–Geraden–Dualität ohne Benutzung der Kegelschnitte ab und betont, dass zu jedem Satz über kollinear verwandte Figuren durch Vertauschen der Begriffe Punkt und Gerade sowie Verbinden und Schneiden ein dualer Satz entsteht. Möbius betont am Schluss, dass es für den Raum eine analoge Punkt–Ebenen–Dualität gibt, er wolle sie aber nicht behandeln, um „die Grenzen dieser Schrift nicht zu überschreiten“ (Ebenda, § 298).

Julius Plücker hat mit seinen Büchern (Plücker, 1828/1831), (Plücker, 1835), (Plücker, 1839) und (Plücker, 1846) das Gesamtgebiet der analytischen Geometrie seiner Zeit ausführlich behandelt und in viele Richtungen schöpferisch weiterentwickelt. Insbesondere hat er die projektive Geometrie in analytischer Behandlung, wie sie vor allem Möbius für die Ebene begründet hatte, sowohl für die Ebene allgemeiner als Möbius gefasst als auch für den Raum entwickelt. In (Plücker, 1835) führt er für Punkte P der Ebene homogene Dreieckskoordinaten x_1, x_2, x_3 ein, welche proportional zu den Abständen von P und den drei Geraden des gewählten Fundamentaldreiecks sind.[80] Eine Geradengleichung in der Ebene hat dann die Form $u_1x_1 + u_2x_2 + u_2x_3 = 0$. Geeignet interpretiert, liefert diese Gleichung sofort das Dualitätsprinzip: Die Gleichung beschreibt bei festen Koeffizienten u_i alle Punkte (x_1, x_2, x_3) auf der durch die u_i bestimmten Geraden, bei festen Koordinaten x_i und variablen Koeffizienten u_i alle Geraden durch den Punkt $P = (x_1, x_2, x_3)$, d. h. das Geradenbüschel durch P. Die u_i nennt Plücker dann die Linienkoordinaten. Da die Gleichung in den zweierlei Arten von Koordinaten symmetrisch ist, kann man in jedem Satz, in dem es um Inzidenzbeziehungen von Punkten und Geraden geht, die Worte Punkt und Gerade sowie Verbinden und Schneiden miteinander vertauschen, und erhält so einen ebenfalls gültigen Satz. Die homogenen Koordinaten erlauben auch, die unendlich fernen Objekte der Theorie einzuführen und die bei Poncelet offen gebliebenen Beweise zwanglos zu führen. So ist z. B. $x_3 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden in der projektiven Ebene. Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ in eine beliebige, in homogenen Koordinaten gegebene Kreisgleichung erhält man die beiden absoluten Kreispunkte, in dem sich alle Kreise der projektiven Ebene schneiden.[81]

Originell und sein ganzes Werk von Anfang an charakterisierend ist eine neue Methode, die gelegentlich „Methode der abgekürzten Bezeichnung“ genannt wurde. Sind etwa in der Ebene zwei Geraden durch die linearen Ausdrücke

$$p = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3, \quad q = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$$

bestimmt, so arbeitet Plücker stets in geschickter Weise mit den Abkürzungen und einem geeigneten Parameter. So liefert der Ausdruck $p - \mu q = 0$ das Geradenbüschel durch den Schnittpunkt der beiden Geraden; zu jedem μ gehört eine

[80] Im Raum sind es vier Werte und es werden zur Definition die Abstände des Punktes von den vier Ebenen des gewählten Fundamentaltetraeders benutzt.

[81] Sie kommen ebenso wie die unendlich ferne Gerade als eigenwillige Leitideen bereits in (Poncelet, 1822) vor.

Gerade des Büschels. Beim Satz von Pascal etwa geht es um zwei Tripel von Geraden $p, q, r;\ p', q', r'$. Dann beschreibt $pqr - \mu p'q'r' = 0$ ein Büschel von Kurven dritter Ordnung, die sämtlich durch die neun Schnittpunkte der beiden Geradentripel gehen. Daraus schließt man sofort ohne weitere Rechnung den Satz von Pascal.[82] PLÜCKER spricht in diesem Zusammenhang im Vorwort zu (Plücker, 1835) von einer

> [...] neuen Gestaltung der analytischen Geometrie, deren Eigenthümlichkeit und deren Stärke in dem vollständigen Parallellismus zwischen geometrischen und analytischen Formen, oder, um mich bestimmter auszudrücken, in dem Umstande beruht, dass wir, durch das Zusammenrücken, das Zusammenwachsen gleichsam, von Construction und analytischer Darstellung, dahin gelangen, über die großartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebieten zu können, ohne irgend einen der unersetzlichen Vortheile, welche die unmittelbare Anschauung gewährt, aufzugeben. (Plücker, 1835, S. III–IV)

Aus dieser Passage wird deutlich, dass PLÜCKERs Ziel, über den Aufbau der projektiven Geometrie hinausgehend, ein Neuaufbau der analytischen Geometrie insgesamt war. Dabei wollte er nicht nur die analytischen Formeln im Blick haben, sondern, wie er sich ausdrückt, ein „Zusammenwachsen“ der Formeln mit den Konstruktionen der durch sie beschriebenen geometrischen Gebilde erreichen. Dies zeigt besonders eindrucksvoll sein Buch (Plücker, 1835), in dem die Kurven dritter Ordnung in der Ebene behandelt werden. Die Theorie beruht auf der gründlichen analytischen Untersuchung der Kurvenbüschel

$$pqr + \mu s,\ pqr + \mu s^2,\ \ pqr + \mu s^3$$

mit vier Geraden p, q, r, s. Im Anhang findet man fünf Einlageblätter mit insgesamt 218 teilweise geradezu bewunderungswürdigen Konstruktionen, die typische Situationen zeigen, die bei Kurven dritter Ordnung auftreten können.

In (Plücker, 1839) finden sich die *Plückerschen Formeln*, die als seine bedeutendste Errungenschaft auf dem Gebiet der Geometrie gelten.[83] So findet man zum Beispiel für eine Kurve n-ter Ordnung in der Ebene mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten ihre Klasse k, d. h. ihren Grad in Linienkoordinaten, nach der Formel $k = n(n-1) - 2d - 3r$. Bei Betrachtung von Kurven beliebiger Ordnung wie hier oder gar bei späteren Untersuchungen von Räumen höherer Dimension werden die Grenzen rein synthetischen Zugangs, wie STEINER ihn vertreten hat, deutlich.

In den Auseinandersetzungen zwischen Vertretern der synthetischen Geometrie und denen der analytischen Geometrie spielten insbesondere STEINER und PLÜCKER eine führende Rolle. In BURAUs biographischem Artikel heißt es dazu:

> But differences between the synthetic school in geometry, of which Steiner was the head in Berlin, and Plücker's analytical school – together with a conflict of

[82] Siehe dazu (Klein, 1926, S. 122).
[83] Näheres in (Burau, 1991) oder (Gray, 1986).

> personality between the two men – resulted in Plücker's being resident at Berlin for only one year. (Burau, 1991, S. 2011)

Dies bezieht sich auf das folgende Ereignis in PLÜCKERs Laufbahn: Er war ab 1828 außerordentlicher Professor in Bonn und ging Ende 1832 als Extraordinarius in die preußische Hauptstadt, wo er auch noch am berühmten Friedrich-Wilhelm-Gymnasium unterrichtete. Nach einem Jahr verließ er Berlin wieder und wurde dann nach kurzem Zwischenaufenthalt in Halle/Saale Ordinarius in Bonn. Er war in Berlin auch im Gespräch als zukünftiger Direktor einer geplanten Oberlehrer-Bildungsanstalt. Dass er trotzdem aus der Hauptstadt wieder in die Provinz ging, wird der Verschärfung des Konflikts mit dem JACOBI-STEINERschen Kreis angelastet.[84] Erwähnt sei noch, dass sich PLÜCKER nach Erscheinen von (Plücker, 1846) von der Mathematik vollständig abwandte und viele Jahre als Experimentalphysiker wirkte. Auch auf diesem Gebiet hat er Bedeutendes geleistet. Etwa ab 1863 wandte er sich wieder der Geometrie zu und entwickelte die sogenannte Liniengeometrie, niedergelegt in zwei Teilen in (Plücker, 1868/1869).[85] In dieser Geometrie ist der gewöhnliche Raum vierdimensional, da seine Grundelemente nicht Punkte sind, sondern die Geraden, welche durch vier Parameter r, ρ, s, σ bestimmt werden. Die geometrischen Gebilde werden dann durch eine oder mehrere Gleichungen $f(r, \rho, s.\sigma)$ bestimmt. Die Liniengeometrie war im 20. Jahrhundert Ausgangspunkt zahlreicher Untersuchungen.[86] Zu PLÜCKERs erneuter Hinwendung zur Mathematik macht FELIX KLEIN folgende interessante Bemerkung:

> Als einen bemerkenswerten Zug aber möchte ich anführen, dass der Wiederbeginn von Plückers geometrischen Arbeiten mit Steiners Todesjahr 1863 zusammenfällt. Ob hier ein Zusammenhang vorliegt, kann natürlich nicht entschieden werden. (Klein, 1926, S. 121)

Aber gut möglich wäre ein solcher Zusammenhang schon.

Aus dem bereits zitierten Vorwort zu den beiden zusammengehörigen Artikeln (J. Toeplitz, 1865) und (J. Toeplitz, 1871) ging ja hervor, dass JULIUS TOEPLITZ PLÜCKERs Standpunkt vertrat und seinen Lesern, etwa „angehenden Mathematikern", die methodischen Vorzüge desselben verdeutlichen wollte. Zu seiner angekündigten „systematischen Behandlung des Gegenstandes" ist es allerdings nicht mehr gekommen. Er verwendet in seinen Arbeiten natürlich durchweg PLÜCKERs Methode der abgekürzten Bezeichnungen. Ist also zunächst in rechtwinkligen Koordinaten x, y eine lineare Funktion $p = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1$ gegeben, so wird die Gerade $p = 0$ mit p bezeichnet. Seien p, q zwei Geraden mit dem Schnittpunkt C, so liefert $\lambda p - \mu q = 0$ das Geradenbüschel durch C; jeder Wert von $\frac{\lambda}{\mu}$ bestimmt eine Gerade des Büschels. TOEPLITZ betrachtet dann das Doppelverhältnis von vier

[84] Siehe (Klein, 1926, S. 115f, 120). Steiner war ab 1825 in Berlin als Lehrer und Oberlehrer tätig und wurde in dieser Tätigkeit bis in höchste Kreise geschätzt; 1834 wurde er Extraordinarius an der Berliner Universität.

[85] Der zweite Teil erschien nach Plückers Tod und war von Felix Klein vollendet und 1869 herausgegeben worden.

[86] Siehe (Burau, 1991, S. 2012).

Punkten einer Geraden; er nennt es wie CHASLES „anharmonisches Verhältnis“.[87] Das Resultat des ersten Paragraphen der Arbeit (J. Toeplitz, 1865) ist folgender Satz:

> Die sinus der Winkel, welche 4 durch ein und denselben Punkt gehende Gerade mit einander bilden, haben dasselbe anharmonische Verhältnis, wie die entsprechenden Abschnitte einer beliebigen Transversalen, welche die 4 Geraden schneidet.
>
> Dieser Satz bildet bekanntlich die Grundlage der Theorie der anharmonischen Verhältnisse. (J. Toeplitz, 1865, S. 3)

In der Tat zeigt er die Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektionen.

Im nächsten Paragraphen *Darstellung von Punkten mit Hülfe der Gleichungen dreier, nicht durch denselben Punkt gehender Geraden* werden homogene Dreieckskoordinaten folgendermaßen eingeführt: Die Geraden p, q, r mögen das Dreieck ABC bilden. TOEPLITZ nennt es das *Fundamentaldreieck*, p, q, r die *Fundamentallinien* und A, B, C die *Fundamentalecken*. Das Geradenbüschel durch A wird durch $\alpha p - \beta q = 0$, das durch C mit $\beta q - \gamma r = 0$ mit variablen α, β, γ beschrieben. M sei nun ein gegebener Punkt der Ebene und $\lambda p - \mu q = 0$ sei die Gerade AM und $\mu q - \nu r = 0$ die Gerade CM. Dann heißen (λ, μ, ν) die Koordinaten von M; durch sie ist M eindeutig bestimmt. Sie sind homogen: $(\kappa\lambda, \kappa\mu, \kappa\nu)$ bestimmt denselben Punkt M.

Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, dass jedes homogene Tripel (α, β, γ) reeller Zahlen, von denen mindestens eine ungleich 0 sein muss, vermittels der Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$ genau eine Gerade bestimmt. Hat ein Punkt M die Koordinaten (λ, μ, ν) und eine Gerade g die Gleichung $\lambda p + \mu q + \nu r = 0$, so heißen M und g zueinander konjugiert. Toeplitz will nun insbesondere zeigen, wie das PLÜCKERsche Vorgehen in der Lehre von den Kegelschnitten angewendet werden kann. Ebenso wie eine beliebige Gerade durch eine Gleichung der Form $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$ gegeben ist, wird ein Kegelschnitt durch eine Gleichung der Form

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 - 2\alpha\beta pq - 2\alpha\gamma pr - 2\beta\gamma qr = 0$$

gegeben. Er beweist zunächst zwei duale Sätze, die er „reciproke Sätze“ nennt und im Zweispaltendruck nebeneinander stellt:

> (1) Dreht sich eine gerade Linie um einen festen Punkt, so beschreibt ihr konjugierter Punkt einen Kegelschnitt, der durch die drei Fundamentalpunkte geht.
>
> (2) Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden fort, so umhüllt die konjugierte Linie desselben einen Kegelschnitt, der von den drei Fundamentallinien berührt wird. (J. Toeplitz, 1865, S. 5–9)

[87] Das Punktequadrupel nennt man harmonisch, wenn sein Doppelverhältnis -1 ist.

Im Paragraphen 7 untersucht Toeplitz nun Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen oder von drei festen Geraden berührt werden. Eines der bemerkenswerten Ergebnisse der recht umfangreichen Rechnungen in diesem Paragraphen sind die beiden folgenden zueinander dualen Sätze:

> Geht ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte, die man zu Fundamentalpunkten nimmt, und konstruiert man zu jedem andern Punkte des Kegelschnitts die konjugierte Linie, so schneiden sich alle diese konjugierten Linien in einem festen Punkte, den wir den *Hauptpunkt* des Dreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt nennen. In diesem Hauptpunkte schneiden sich auch die Verbindungslinien der Ecken des Fundamentaldreiecks mit den Ecken des umschriebenen Dreiecks, welches entsteht, wenn man an den drei Fundamentalecken Tangenten an den Kegelschnitt zieht.
>
> Berührt ein Kegelschnitt drei feste Geraden, die man zu Fundamentallinien nimmt, und konstruiert man zu jeder anderen Tangente des Kegelschnitts den konjugierten Punkt, so liegen alle diese konjugierten Punkte auf einer festen Geraden, die wir die *Hauptlinie* des Dreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt nennen. Auf dieser Hauptlinie liegen auch die Schnittpunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks mit den Seiten des eingeschriebenen Dreiecks, welches entsteht, wenn man die Berührungspunkte der drei Fundamentallinien und des Kegelschnitts durch gerade Linien verbindet. (J. Toeplitz, 1865, S. 11–12)

Es erstaunt etwas, dass Julius Toeplitz, obwohl er alle Grundlagen dafür in der Hand hatte, nirgends projektive Geometrie betreibt: der unendlich ferne Punkt einer Geraden oder die unendlich ferne Gerade kommen nicht vor. Ihm kam es vor allem auf das Neue an, das Plücker im Herangehen an die gesamte analytische Geometrie vertreten hatte, an „das Zusammenwachsen der Formeln mit den Konstruktionen der durch sie beschriebenen geometrischen Gebilde“, wie es bei Plücker in der oben, S. 82, zitierten Passage aus dessen Vorwort zu (Plücker, 1835) heißt. Das wird besonders deutlich in dem auf § 7 folgenden Paragraphen *Lineare Konstruktionen an Kegelschnitten*, der so beginnt:

> Durch die Sätze des § 7 sind wir in den Stand gesetzt, viele die Kegelschnitte betreffende Aufgaben durch lineare Konstruktion d. h. durch blosses Ziehen von geraden Linien zu lösen. (J. Toeplitz, 1865, S. 12)

Es folgen nun Konstruktionsaufgaben mit Lösungen. Bis auf eine bestehen sie alle aus Aufgabe und jeweiliger dualer Aufgabe. Wir wollen Aufgabe II mit dualer Aufgabe III und Aufgabe VI mit dualer Aufgabe VII hier vorstellen; sie werden bei Toeplitz, wie bei dualen Sachverhalten üblich, im Zweispaltendruck nebeneinander präsentiert.

> Aufgabe II. Von einem Kegelschnitte sind 5 Punkte gegeben; man soll durch lineare Konstruktion beliebig viele neue Punkte des Kegelschnitts finden.
>
> Aufgabe III. Von einem Kegelschnitte sind 5 Tangenten gegeben; man soll durch lineare Konstruktion beliebig viele neue Tangenten des Kegelschnitts finden. (Ebenda)

Von der Aufgabe II soll die Auflösung von Toeplitz hier zitiert werden:

> Man wählt 3 der gegebenen Punkte zu Fundamentalpunkten, und bestimmt zu den andern beiden Punkten die konjugierten Linien. Der Punkt, in dem sich die letzteren schneiden, ist der Hauptpunkt des Fundamentaldreiecks. Zieht man durch diesen Hauptpunkt beliebig viel gerade Linien, und sucht man zu denselben die konjugierten Punkte, so sind diese Punkte des Kegelschnitts. (Ebenda, S. 12–13)

Die Lösung der Aufgabe III ist nun eine hübsche Übung für den Umgang mit der Dualität in der Ebene; den Beginn „Man wählt drei der gegebenen Tangenten zu Fundamentallinien, und bestimmt ...“ kann man leicht fortsetzen. Hier noch das zweite Beispiel:

> Aufgabe VI. Von einem Kegelschnitte sind 5 Punkte gegeben; man soll in jedem der gegebenen Punkte die Tangente durch lineare Konstruktion finden.
>
> Aufgabe VII. Von einem Kegelschnitte sind 5 Tangenten gegeben; man soll den Berührungspunkt jeder der gegebenen Tangenten durch lineare Konstruktion finden. (Ebenda, S. 13)

Es sei noch erwähnt, dass (J. Toeplitz, 1865) am Schluss zwei Einlegeblätter mit 15 Abbildungen linearer Konstruktionen (d. h. es kommen nur Geraden vor) enthält und so auch in dieser Beziehung dem Vorgehen Plückers in seinen Büchern folgt.

Im nächsten Paragraphen unter dem Titel *Gleichung der Tangente; Pol und Polare* leitet Toeplitz zu einem gegebenen Punkt auf einem Kegelschnitt die Gleichung der dort berührenden Tangente her. Er betont, dass er dazu die Differentialrechnung nicht benötigt. Es sei nun $P = (\lambda, \mu, \nu)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Er leitet nun die Gleichung der Geraden her, welche die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten an den Kegelschnitt verbindet, die „Gleichung der Berührungssehne“, wie er sich ausdrückt. Dann heißt es:

> Diese Gerade ist immer reell, wenn auch die Berührungspunkte imaginär werden; sie heisst die *Polare* des Punktes λ, μ, ν, und der letztere der *Pol* der Geraden. (Ebenda, S. 16)

Ein geometrisches Beispiel für den Fall imaginärer Berührungspunkte wird nicht angegeben, etwa wenn P innerhalb einer Ellipse liegt. Die Sache gilt auch nicht für jeden Punkt der Ebene, wenn man sich nicht in der projektiven Ebene befindet: Die Polare des Mittelpunkts einer Ellipse ist die unendlich ferne Gerade.

Auf die Polarität, d. h. die duale Beziehung zwischen Punkten und Geraden, die durch einen Kegelschnitt vermittelt wird, bezieht sich der folgende Satz: Dreht sich die Polare g eines Punktes P um einen festen Punkt P', so bewegt sich P auf der Polaren g' von P' fort. Dual dazu: Bewegt sich der Pol P auf einer gegebenen Geraden g' fort, so dreht sich die Polare g von P um den Pol P' von g'.

Den Abschluss der Untersuchungen in der Ebene bilden einige metrische Relationen an Kegelschnitten, die sich vor allem auf die Berechnung von Doppelverhältnissen von vier Punkten auf geeigneten Transversalen beziehen. Am Ende ist

das Ziel wiederum, aus den Ergebnissen der Berechnungen auf die Möglichkeit gewisser linearer Konstruktionen zu schließen. Der Abschnitt endet mit folgendem Ergebnis:

> Jede durch einen Pol gehende Transversale wird von dem Kegelschnitte und der Polare in drei Punkten geschnitten, die im Verein mit dem Pole 4 harmonische Punkte bilden. Bekanntlich dient dieser Satz zur Lösung der Aufgabe: Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kegelschnitt die beiden Tangenten durch lineare Konstruktion zu ziehen. (Ebenda, S. 19)

Im letzten Paragraphen wird auf zwei Seiten angedeutet, wie auf PLÜCKERsche Weise die analytische Geometrie des Raumes aufgebaut werden kann. Mittels eines *Fundamentaltetraeders* gebildet aus vier Ebenen p, q, r, s, den *Fundamentalebenen*, werden homogene Punktkoordinaten $(\lambda, \mu, \nu, \kappa)$ eingeführt. Eine Ebene kann durch eine Gleichung $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ bestimmt werden. Man betrachtet nun zum Punkt $(\lambda, \mu, \nu, \kappa)$ die Ebene $\lambda p + \mu q + \nu r + \kappa s = 0$, dann heißen dieser Punkt und diese Ebene zueinander konjugiert. Die Ausführungen zum Raum enden mit folgender Aussicht:

> Dreht sich eine Ebene um einen festen Punkt, so durchläuft ihr konjugierter Punkt eine Fläche dritten Grades, für die sich dann eben solche lineare Konstruktionen ergeben, wie wir oben für Kegelschnitte erhalten haben. Diese Untersuchungen spare ich jedoch für eine andere Gelegenheit auf. (Ebenda, S. 21)

Dazu ist es allerdings nicht mehr gekommen.

„Analytisch-geometrische Studien. II. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren“ (1871)

Es dauerte ganze sechs Jahre, bis Teil II der „Analytisch-geometrischen Studien“ erschien. Zunächst wird einiges aus dem ersten Teil in Erinnerung gerufen. Von grundlegender Bedeutung für das Folgende sind die beiden zueinander dualen Sätze (1) und (2), die wir hier auf Seite 84 zitiert haben. Kegelschnitte aus Satz (1) sind dem Fundamentaldreieck umbeschriebene Kegelschnitte, Kegelschnitte aus Satz (2) sind dem Fundamentaldreieck einbeschriebene Kegelschnitte. Es ist nun das Ziel, alle Kegelschnitte zu bestimmen, die durch vier feste Punkte A, B, C, P gehen. Dazu wählen wir ABC als Fundamentaldreieck und suchen so alle Kegelschnitte, die ABC umbeschrieben sind und durch P gehen. Wir lassen nun auf der zu P konjugierten Geraden g einen beweglichen Punkt P' laufen, indem sich jeweils ein Geradenbüschel mit Mittelpunkt P' befinden soll. Alle konjugierten Punkte der Geraden dieses Büschels beschreiben nach Satz (1) einen ABC umbeschriebenen Kegelschnitt. Mittels der Gleichungen aller hier vorkommenden geometrischen Gebilde in den aus ABC hervorgegangenen homogenen Koordinaten kann man leicht zeigen, dass dieser Kegelschnitt durch P geht, unabhängig davon, wo sich P' auf g befindet. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte, die durch

vier feste Punkte gehen, heißt ein *Kegelschnittbüschel*. Auf diese Betrachtungen folgt nun ein ganz bemerkenswerter Satz von Julius Toeplitz:

> Daraus ist ersichtlich, dass die Anzahl der Kegelschnitte eines Büschels von demselben Grade der Unendlichkeit ist, wie die Anzahl der Punkte einer geraden Punktreihe. (J. Toeplitz, 1871, S. 5)

Ist das eine Vorahnung, im Transfiniten Zahlen einzuführen? 1879 hätte Cantor formuliert: Ein Kegelschnittbüschel hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Die vier festen Punkte, durch die alle Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels gehen, hatte Jacob Steiner die vier Mittelpunkte des Büschels genannt. Dieser Bezeichnung schließt sich Toeplitz an. Er analysiert nun mittels umfangreicher Rechnungen, welche Rolle das vollständige Viereck aus den Mittelpunkten für lineare Konstruktionen spielt. Grundlegend ist der folgende Satz: Gegeben sei ein Punkt P. Man bildet für jeden Kegelschnitt des Büschels die Polare von P. Dann schneiden sich alle diese Polaren in einem Punkt P'. Dieser Punkt heißt der *Polarpunkt* von P in Bezug auf das gegebene Büschel. Toeplitz zeigt dann, wie man den Polarpunkt eines Punktes mittels des vollständigen Vierecks aus den Mittelpunkten des Büschels linear konstruieren kann.

Der Begriff des Polarpunktes spielt in dem folgenden interessanten Theorem eine wichtige Rolle: Sucht man zu einer festen Geraden die Pole in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels, so liegen alle diese Pole auf einem Kegelschnitt, den wir den *Pol-Kegelschnitt* nennen. Dieser ist zugleich der geometrische Ort aller Polarpunkte der Punkte der gegebenen Geraden.

Auch im zweiten Teil seiner „Analytisch-geometrischen Studien“ stellt Julius Toeplitz dem Leser Aufgaben. Wir zitieren hier ein Beispiel nebst der beigefügten Auflösung:

> Aufgabe. Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte gegeben; man soll in einem dieser Punkte die Tangente des Kegelschnitts construieren.
>
> Auflösung. Man suche den Polarpunkt des gegebenen Punktes in Bezug auf die anderen 4 Punkte. Verbindet man dann diesen Polarpunkt mit dem gegebenen Punkt durch eine Gerade, so ist diese die gesuchte Tangente. (Ebenda, S. 10)

Die Kegelschnittscharen sind sozusagen das duale Objekt der Kegelschnittbüschel. Wir ziehen dazu den zu (1) dualen Satz (2) aus (J. Toeplitz, 1865) heran, hier zitiert auf Seite 84. Die nun betrachteten Kegelschnitte sind also dem Fundamentaldreieck ABC einbeschrieben, d. h. sie haben die Fundamentalgeraden a, b, c zu Tangenten. Das Ziel ist nun, alle Kegelschnitte zu bestimmen, die diese Eigenschaft haben und von einer weiteren Geraden g berührt werden. Lassen wir einen Punkt P sich auf g bewegen, so tangiert die konjugierte Gerade von P nach Satz (2) jeweils einen dem Fundamentaldreieck einbeschriebenen Kegelschnitt. Wir erhalten also eine Gesamtheit von unendlich vielen Kegelschnitten, welche vier gegebene Geraden a, b, c, g berühren. Eine solche Gesamtheit heißt eine *Kegelschnittschar*. Auch hier bemerkt Toeplitz wieder, „dass die Anzahl der Kegelschnitte einer

Schaar von demselben Grade der Unendlichkeit ist, wie die Anzahl der Strahlen eines Strahlbüschels“ (J. Toeplitz, 1871, S. 11).

Das von den vier festen Geraden, die alle Kegelschnitte einer Kegelschnittschar berühren, gebildete vollständige Vierseit spielt hier für lineare Konstruktionen die analoge Rolle wie das aus den Mittelpunkten gebildete vollständige Viereck in der Theorie der Kegelschnittbüschel. Der duale Satz zu dem oben genannten grundlegenden Satz für Büschel besagt folgendes für eine vorliegende Kegelschnittschar: Gegeben sei eine Gerade s. Man bildet für jeden Kegelschnitt der Schar den Pol von s. Dann liegen alle diese Pole auf einer Geraden s'. Diese Gerade s' heißt die *Polgerade* der Geraden s in Bezug auf die gegebene Kegelschnittschar.

Auch hier gibt es ein duales Theorem zu dem über die Polarpunkte, in dem nun die Polgeraden eine entscheidende Rolle spielen: Sucht man zu einem festen Punkte die Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schar, so hüllen alle diese Polaren einen Kegelschnitt ein, den wir den *Polar-Kegelschnitt* nennen. Dieser wird zugleich von allen Polgeraden derjenigen Geraden eingehüllt, die durch den gegebenen festen Punkt gehen.

Auch zum Thema Kegelschnittscharen werden Aufgaben gestellt; wir zitieren die duale zu obiger Aufgabe nebst deren Auflösung:

> Aufgabe. Ein Kegelschnitt soll 5 gegebene Geraden berühren; man soll auf einer dieser Geraden den Berührungspunkt finden.
>
> Auflösung. Man suche die Polgerade der einen Geraden in Bezug auf die übrigen 4 Geraden. Der Durchschnittspunkt dieser Polgeraden mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Berührungspunkt. (Ebenda, S. 14)

Der reichhaltige Inhalt der zweiteiligen Arbeit über Kegelschnitte konnte hier nur angedeutet werden. Insbesondere war es nicht möglich, auf die umfangreichen Rechnungen einzugehen, die ganz im Sinne der PLÜCKERschen „Methode der abgekürzten Bezeichnungen“ immer wieder auch auf die Konstruktion der geometrischen Gebilde hinarbeiten. Leider ist nichts über die Reaktionen auf diese bemerkenswerten Veröffentlichungen bekannt.

Veröffentlichungen in der Schlömilch-Zeitschrift (1869/1878)

Toeplitz publizierte zwei „kleinere Mittheilungen“ in der an Lehrer adressierten *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, nach ihrem Gründer auch *Schlömilch-Zeitschrift* genannt.

In der ersten Arbeit, „Die constanten Relationen bei den Dreiecken und tetraedrischen Coordinaten“ (J. Toeplitz, 1869), betrachtet Toeplitz die homogenen Dreieckskoordinaten in der Ebene bzw. die homogenen Tetraederkoordinaten im Raum, wie sie von Plücker eingeführt wurden. In der Ebene werden Punkte durch die Verhältnisse der senkrechten Abstände des Punktes zu den Fundamentallinien (versehen mit geeigneten Vorzeichen) bestimmt. Geraden werden durch die Verhältnisse ihrer senkrechten Abstände zu den Fundamentalecken bestimmt. Analoges gilt im Raum für die Bestimmung von Punkten und Ebenen. Um zu zeigen, was Toeplitz mit den „constanten Relationen“ meint, soll hier der einfachste Fall eines Punktes O innerhalb des Fundamentaldreiecks ABC betrachtet werden. Seien a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB des Fundamentaldreiecks und p, q, r die senkrechten Abstände von O zu den Seiten des Fundamentaldreiecks, so gilt offensichtlich die von O unabhängige, also konstante Relation

$$ap + bq + cr = 2F,$$

wo F der Flächeninhalt von ABC ist. Liegt O nicht innerhalb des Fundamentaldreiecks, so müssen die Abstände noch nach gewissen Regeln mit Vorzeichen versehen werden; dazu schreibt Toeplitz: „Für die Zeichen, mit denen p, q, r zu versehen sind, gelten die bekannten Regeln“ (Ebenda, S. 254). Ein analoges Ergebnis gilt im Raum: Sind a, b, c, d die Flächeninhalte der Seitenflächen des Fundamentaltetraeders $ABCD$ und p, q, r, s die mit geeigneten Vorzeichen versehenen senkrechten Abstände eines Punktes O von diesen Seitenflächen, so gilt die konstante Relation

$$ap + bq + cr + ds = 3V,$$

wo V das Volumen des Fundamentaltetraeders ist.

Wesentlich aufwändiger ist das Auffinden einer konstanten Relation zwischen den Koordinaten einer Geraden g in der Ebene. Nach langwierigen Rechnungen erhält Toeplitz das folgende Ergebnis: Sind a, b, c die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks und p, q, r die (mit geeigneten Vorzeichen versehenen) senkrechten Abstände der Fundamentalecken A, B, C von der Geraden g, so lautet die konstante, d. h. unabhängig von g geltende, Relation

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 + (c^2 - a^2 - b^2)pq + (b^2 - a^2 - c^2)pr + (a^2 - b^2 - c^2)qr = 4F^2.$$

Die Thematik, die Julius Toeplitz in der zweiten Arbeit, „Zur Theorie der Elimination“ (1878), bearbeitete, ist insbesondere für die algebraische Geometrie von Bedeutung gewesen. Dies erwähnt er in seinem Artikel zwar nicht, verweist aber

für Anwendungen auf die damals weithin bekannten Werke (Salmon und Fiedler, 1865) und (Hesse, 1869). Er beginnt seinen Artikel mit folgender Bemerkung:

> Das Problem, aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die Werthepaare, welche beiden Gleichungen genügen, herzuleiten, ist längst vollständig gelöst. Es ist leicht, die Endgleichung für eine der Unbekannten aufzustellen, und zwar nach Bézout, Sylvester und Cayley in Determinantenform, sowie für jeden Werth dieser Unbekannten den zugehörigen Werth der andern zu bestimmen. (J. Toeplitz, 1878, S. 61)[88]

Sein Ziel ist es, für ein System von drei solchen Gleichungen in drei Variablen, die Tripel von Variablen zu bestimmen, die allen drei Gleichungen genügen. Um die Bedeutung dieses Problems, aber auch seine Schwierigkeit, etwa für die Geometrie im Raume zu demonstrieren, zitieren wir aus (Hesse, 1869):

> Die Frage nach der Zahl der Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung $\phi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,z) = 0$, $\chi(x,y,z) = 0$, welche sich nicht in einer und derselben Curve schneiden, ist ein rein algebraisches Problem, welches dadurch seine Lösung findet, dass man feststellt, wie viele Systeme [von] Werthe[n] der Variabeln den angegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit genügen, oder dass man den Grad der Endgleichung bestimmt, welche aus den drei Gleichungen durch Elimination von zwei Variabeln hervorgeht. (Hesse, 1869, S. 125)[89]

Wenn man vermeidet, dass der Grad der Endgleichung durch einen überflüssigen Faktor erhöht wird, erhält man schließlich als Grad der Endgleichung das Produkt der Grade der drei Gleichungen, also 8. Dazu Hesse:

> Wenn daher das im Allgemeinen einzuhaltende Eliminationsverfahren schliesslich auch eine Gleichung des achten Grades giebt, so wird man dadurch den Beweis geführt haben, dass überhaupt drei Oberflächen zweiter Ordnung sich in 8 Punkten schneiden. (Ebenda)

Toeplitz beginnt seine Betrachtungen mit der Frage, unter welchen Bedingungen zwei algebraische Gleichungen

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^{m-k} = 0, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^{n-k} = 0$$

j gemeinsame Wurzeln haben. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln von $F(x) = 0$, so bildet man die Funktion

$$\psi(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - f(\alpha_k)) \doteq z^m + R_1 z^{m-1} + \cdots + R_{m-1} z + R_m.$$

Alle Koeffizienten von $\psi(z)$ lassen sich als Funktionen der Koeffizienten der gegebenen Gleichungen darstellen: R_m ist die Resultante (Sylvestersche Determinante)

[88] Toeplitz meint dabei stets Polyonomgleichungen und betrachtet solche in 1, 2 oder 3 Variablen und mit komplexen Koeffizienten, auch wenn dies nicht explizit erwähnt wird.

[89] Eine Fläche zweiter Ordnung im Raume hat die Form
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1yz + b_2zx + b_3xy + c_1x + c_2y + c_3z + 1 = 0.$

von F und f und aus dieser gehen auch vermöge

$$R_{m-p} = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p R_m}{\partial (b_n)^p}$$

die übrigen Koeffizienten von $\psi(z)$ hervor. Es gilt nun der Satz: Genau dann genügen j Wurzeln von $F(x) = 0$ auch der Gleichung $f(x) = 0$, wenn folgendes zutrifft: $R_m = 0, R_{m-1} = 0, \ldots, R_{m-j+1} = 0$.

Es seien nun zwei Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ vom m-ten und n-ten Grade gegeben. Sie entstehen aus obigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$, indem die Koeffizienten a_i und b_i Polynome einer Variablen y sind, aber stets so, dass der Grad jedes Terms m bzw. n nicht übersteigt. Das Polynom $a_0(y)$ muss also eine Konstante sein, $a_1(y)$ ein linearer Term in y usw., ebenso für die b_i. $b_n(y)$ etwa ist ein Polynom vom n-ten Grade in y. Schon in der Einleitung hatte Toeplitz erwähnt, dass das Problem der Bestimmung der den beiden Gleichungen genügenden Wertepaare (x, y) längst gelöst sei und die Endgleichung in y den Grad mn hat. Zu jeder ihrer Lösungen y kann man den zugehörigen Wert der Variablen x bestimmen, so dass das Ergebnis folgendermaßen formuliert werden kann:

> Zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten resp. vom m-ten und vom n-ten Grade werden durch mn Werthepaare von x und y befriedigt. (J. Toeplitz, 1878, S. 65)

Neu für sich beansprucht Julius Toeplitz in seinem Artikel die Behandlung des Falles von drei algebraischen Gleichungen in drei Unbestimmten. Drei algebraische Gleichungen in drei Variablen $F(x, y, z) = 0,\ f(x, y, z) = 0$ und $\phi(x, y, z) = 0$ vom m-ten, n-ten und p-ten Grade kann man sich aus drei Polynomgleichungen $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ und $\phi(x) = 0$ m-ten, n-ten und p-ten Grades entstanden denken, wenn darin die Koeffizienten a_i, b_j, c_k $(i = 0, \cdots, m,\ j = 0, \cdots, n,\ k = 0, \cdots, p)$ durch Polynome in zwei Variablen (y, z) ersetzt werden, immer unter Beschränkungen der Grade, wie wir sie im Falle zweier Gleichungen schon angedeutet haben. Das Endergebnis einer Reihe aufwendiger Rechnungen besteht darin, dass es in diesem Falle im allgemeinen mnp Wertetripel (x, y, z) gibt, welche allen drei Gleichungen genügen. Toeplitz formuliert das folgendermaßen:

> Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$, $\phi(x, y, z) = 0$ resp. vom m-ten, n-ten und p-ten Grade gegeben, so giebt es im Allgemeinen mnp zusammengehörige Werthepaare von x, y und z, welche alle drei Gleichungen befriedigen. (Ebenda, S. 66)

Um diese Wertesysteme zu erhalten, hat man eine Endgleichung vom Grad mnp, etwa in z, zu lösen und danach, sozusagen auf einer Stufe tiefer, die zugehörigen Wertepaare (x, y) zu bestimmen.

Dieser Artikel von Julius Toeplitz ist ein origineller Beitrag zur Forschung und gewiss nicht als didaktische Übung für Studenten und interessierte Kollegen gedacht oder geeignet. Wie sonst bei Toeplitz oft üblich, wird auch kein

Beispiel angegeben. Das verwundert nicht, denn bereits für $m = n = p = 3$ wäre eine Gleichung 27. Grades zu lösen. Die Arbeit hat auch keine Resonanz in der Forschung gefunden, vielleicht auch deshalb, weil der damals schon berühmte Leopold Kronecker 1881 in den Monatsberichten der Berliner Akademie eine umfangreiche Arbeit vorgelegt hat, in der eine Theorie für multivariate polynomiale Gleichungssysteme präsentiert wird, in der nacheinander die Variablen des Systems eliminiert werden. Man spricht seitdem von Kroneckers Eliminationstheorie.[90] Um wirklich praktisch die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen eines solchen Systems auszurechnen, waren die Fortschritte der Invariantentheorie und der Idealtheorie erforderlich.[91]

„Geometrische Untersuchungen über den Zusammenhang der Theorie der Kurven mit der Theorie der Verwandtschaften“ (1879)

Dies ist die vierte Veröffentlichung von Julius Toeplitz in den Lissaer Jahresprogrammen und beginnt mit der Ankündigung:

> Das Nachfolgende ist der Anfang einer grösseren Arbeit über Constructionen an Curven 3. und 4. Ordnunmg. (J. Toeplitz, 1879, S. 3)

Eine größere Arbeit ist allerdings nicht erschienen, so dass diese wenigen Seiten alles sind, was Toeplitz zu diesem Thema veröffentlicht hat.

Ein erster Abschnitt *Die Verwandtschaft auf der Geraden* führt den grundlegenden Begriff der Verwandtschaft analytisch ein. Eine Gerade in der Ebene wird mit einer Metrik versehen, indem man einen Punkt O auf der Geraden als Ursprung nimmt und jedem Punkt der Geraden eine reelle Zahl zuordnet, nämlich den mit Vorzeichen versehenen Abstand von O. Diese Zahl heißt die Abszisse des Punktes. Toeplitz betrachtet nun zwei *Punktreihen* auf der Geraden, gegeben durch die Reihen von Abszissen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Zwei Punktreihen heißen verwandt, und zwar heißt die Verwandtschaft eine „m- und n-deutige“, wenn jedem Wert der α-Reihe m Werte der β-Reihe und jedem Wert der β-Reihe n Werte der α-Reihe entsprechen. Eine solche Zuordnung wird durch eine *Verwandtschaftsgleichung*

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,m}\alpha^{n-k} = 0 \tag{1}$$

beschrieben, wo $b_{k,m}$ Polynome m-ten Grades in β sind. Er schreibt für diese Gleichung symbolisch $f(\alpha^n, \beta^m) = 0$.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die „ein und eindeutige oder projectivische Verwandtschaft“ (Ebenda). Gleichung (1) ergibt dann eine lineare Gleichung der

[90] Siehe dazu (Ostrowski, 1977). Kronecker erwähnt Julius Toeplitz nicht.
[91] Siehe (Gröbner, 1949) und darauf basierend schließlich moderne Computer-Algebrasysteme.

Form $a\alpha\beta + b\alpha + c\beta + d = 0$. Das Konstantenquadrupel a, b, c, d ist homogen, d. h. die Verhältnisse $a : b : c : d$ bestimmen die Verwandtschaft. Man kann leicht zeigen, dass eine projektive Verwandtschaft durch die Angabe dreier einander entsprechender Punktepaare $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ bestimmt ist. Wir legen nun einen Ursprungspunkt O fest und betrachten vier entsprechende Punkte mit den Abszissen α_i und β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Die Punkte auf der Geraden mit diesen Abszissen seien A_i und B_i. Dann ist das Doppelverhältnis der A_i gleich dem der B_i; Toeplitz formuliert das so:

> In zwei projectivischen Punktreihen sind die Doppelverhältnisse von 4 Punkten der einen Reihe gleich den Doppelverhältnissen der entsprechenden Punkte der zweiten Reihe. (Ebenda, S. 4)

Dies kann man durch folgende Gleichung in den α_i und β_i ausdrücken:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} : \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} : \frac{\beta_4 - \beta_2}{\beta_4 - \beta_3} \tag{2}$$

Wir wollen nun nur noch einige wenige Begriffe und Ergebnisse aus dieser reichhaltigen, wenn auch nur kurzen Arbeit ins Auge fassen. Da ist zunächst der wichtige Begriff der Involution. Gilt für die Konstanten $b = c$, so hat die Verwandtschaftsgleichung die Form $a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + d = 0$, ist also in α und β symmetrisch. Man hat dann eine selbstinverse Abbildung der α-Reihe auf die β-Reihe; diese Verwandtschaft heißt eine *involutorische Verwandtschaft* oder eine *Involution*.

Ohne dass Julius Toeplitz es irgendwo erwähnt, sieht man, dass er in der projektiven Ebene arbeitet, nämlich bei der Einführung der *Gegenpunkte*. Er sucht für jede Reihe denjenigen Punkt, welcher dem unendlich fernen Punkt der anderen Reihe entspricht. Diese Punkte heißen Gegenpunkte, bezeichnet mit u_α beziehungsweise u_β. u_α erhält man, indem man „$\beta = \infty$ setzt“ (also die Verwandtschaftsgleichung durch β teilt und $\frac{1}{\beta} = 0$ setzt). Es ergibt sich $u_\alpha = -\frac{c}{a}$ und analog $u_\beta = -\frac{b}{a}$. Setzt man bei vier entsprechenden Punktepaaren $\alpha_1 = \infty$ und $\beta_4 = \infty$, so ist $\alpha_4 = u_\alpha$, $\beta_1 = u_\beta$ und es folgt aus Gleichung (2)

$$(u_\alpha - \alpha_2)(u_\beta - \beta_2) = (u_\alpha - \alpha_3)(u_\beta - \beta_3),$$

in Worten: Die Produkte der Entfernungen zweier einander entsprechender Punkte von ihren Gegenpunkten sind konstant. Bei einer Involution ist $b = c$, also $u_\alpha = u_\beta$. Es gilt auch die Umkehrung: Sind die beiden Gegenpunkte einer Verwandtschaft einander gleich, so ist diese Verwandtschaft eine Involution.

Toeplitz fragt nun nach Punkten, welche mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen, d. h. nach Punkten, die beiden Reihen gemeinsam sind. Für sie ist $\alpha = \beta$. Nennen wir diesen gemeinsamen Wert g, so ergibt die Verwandtschaftsgleichung $ag^2 + (b + c)g + d = 0$. Die zwei gemeinsamen Punkte sind also reell und verschieden, reell und einander gleich oder imaginär, je nachdem die Diskriminante $(b + c)^2 - 4ad$ größer, gleich oder kleiner 0 ist.

Es gilt $g_1 + g_2 = -\frac{b+c}{a} = u_\alpha + u_\beta$. Also ist die Mitte der Entfernung der zwei gemeinsamen Punkte gleich der Mitte der Entfernung der Gegenpunkte. Für eine Involution besagt das, dass der Gegenpunkt in der Mitte zwischen den beiden gemeinsamen Punkten liegt. Er wird deshalb als der *Zentralpunkt* der Involution bezeichnet.

Es soll noch kurz auf die Realisierung einer projektiven Verwandtschaft auf einer Geraden g durch lineare Konstruktionen eingegangen werden. Gegeben sei eine Gerade l und zwei nicht auf ihr liegende Punkte P und Q. Der Träger g sei eine Transversale, die sowohl l als auch die Gerade PQ schneidet. Sei nun A ein Punkt auf g, so findet man den A entsprechenden eindeutig bestimmten Punkt B auf g folgendermaßen: Die Verbindungsgerade von A und P schneide l in A'. Wir bilden die Gerade $A'Q$; sie schneide g in B. Dann ist B der A zugeordnete Punkt auf dem Träger. Man sieht leicht, dass die beiden einander entsprechenden Punktepaare mit $A_1 = B_1$ und $A_2 = B_2$ der Schnittpunkt von PQ mit dem Träger und der Schnittpunkt von l mit dem Träger sind. Die Verwandtschaftsgleichung, d. h. die Verhältnisse ihrer vier Konstanten $a : b : c : d$, ist also durch die Vorgaben von l, P, Q und g sowie eines Punktes A auf g bestimmt.

Es sei noch ein weiteres geometrisches Beispiel angeführt, welches an (J. Toeplitz, 1871) anschließt: Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel und eine Transversale g des Büschels (g ist also zu keiner der beiden Geraden, welche das Geradenpaar des Büschels bilden, parallel), der Träger. Schneidet ein Kegelschnitt des Büschels den Träger g in A, so auch in einem weiteren Punkt B von g, der dem Punkt A zugeordnet wird. Alle Kegelschnitte des Büschels erzeugen somit auf dem Träger eine projektive Verwandtschaft; diese ist eine Involution. Die beiden Kegelschnitte des Büschels, welche durch die beiden gemeinsamen Punkte der Involution gehen, berühren den Träger; sie sind die einzigen Kegelschnitte des Büschels, welche den Träger berühren.

Auf den letzten vier Seiten von (J. Toeplitz, 1879) werden einige Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der „m und n-deutigen“ Verwandtschaften gemacht, deren Spezialfälle man für Konstruktionen an Kurven 3. und 4. Ordnung benutzen kann. Grundlage ist die Verwandtschaftsgleichung (1); es seien hier nur einige Folgerungen aus dieser Gleichung als Beispiele angeführt. Jedes Polynom $b_{k,m}$ in (1) ist vom Grad m. Ist ein α vorgegeben, so ist (1) eine Gleichung m-ten Grades in β, d. h. jedem α entsprechen m Werte β; umgekehrt entsprechen jedem β genau n Werte von α. Jedes der $b_{k,m}$ enthält im allgemeinen $m+1$ Konstanten; die Verwandtschaftsgleichung (1) enthält folglich $(m+1)(n+1)$ Konstanten. Die Verwandtschaft ist bestimmt, wenn die $(m+1)(n+1)-1$ Verhältnisse der Konstanten gegeben sind. Beispielsweise ist eine 1 und 1-deutige Verwandtschaft durch drei (wie wir schon wissen), eine 3 und 6-deutige Verwandtschaft durch 27 einander entsprechende Paare von Punkten bestimmt. Setzt man $\beta = \alpha$, so bekommt man die gemeinsamen Punkte der beiden verwandten Punktreihen. Die linke Seite von

Gleichung (1) ist dann ein Polynom vom Grad $m + n$. Also haben zwei „m und n-deutige“ Punktreihen $m + n$ gemeinsame Punkte.

Die Arbeit schließt auf S. 14 mit dem uneingelösten Versprechen „Die Fortsetzung folgt in einem der nächsten Programme.“ Warum diese ausblieb, wissen wir nicht, vielleicht hat TOEPLITZ vor dem auch in den 1880er Jahren schon gewaltigen Umfang dieses Gebietes kapituliert. Die ausführlichste zeitgenössische Übersicht über die Theorie der Verwandtschaften findet man in dem vierbändigen Werk (Sturm, 1908/1909) von insgesamt etwa 1900 Seiten.

„Über Additionstheoreme“ (1885)

Mit dieser letzten von TOEPLITZ (wiederum im Lissaer Jahresprogramm) veröffentlichten Arbeit begegnet uns der Autor wieder als engagierter Didaktiker der Mathematik mit einem hohen Anspruch an das mathematische Niveau seiner Leser. In der kurzen Einleitung erwähnt er, dass bereits EULER und auch LAGRANGE das Additionstheorem für eine Klasse elliptischer Funktionen gefunden haben. LAGRANGE z. B. ging von der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0 \text{ mit } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

aus und leitete daraus eine algebraische Integralgleichung her, die unmittelbar zum Additionstheorem führt. Analog führt TOEPLITZ vor, wie man aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

das Logarithmengesetz $\log x + \log y = \log(xy)$ herleiten kann; er nennt es „das Additionstheorem für die Logarithmen“ (J. Toeplitz, 1885, S. 2). Weiter heißt es in der Einleitung:

> Die eigentliche Quelle aller Additionstheoreme fand Abel. Seine Untersuchungen sind in dem berühmten Aufsatze: *„Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes“* [(Abel, 1841)] niedergelegt. Jacobi erkannte sofort die ganze Tragweite der Abel'schen Untersuchungen. In den beiden Aufsätzen: *„De functionibus quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur“* (Crelle, Bd. 13)[92] und *„Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleicungen“* (Crelle, Bd. 32) [(Jacobi, 1846)] hat Jacobi die schwierigen Untersuchungen Abels zugänglich gemacht, und insbesondere gezeigt, dass bei der Umkehrung der Abel'schen Integrale nicht Functionen *einer*, sondern *mehrerer* Variabeln eingeführt werden müssen.

[92] Der Titel ist falsch abgeschrieben, der korrekte Titel und genauere Angaben finden sich im Literaturverzeichnis unter (Jacobi, 1835).

> Die Abel-Jacobi'sche Methode zur Auffindung von Additionstheoremen scheint die einzig naturgemässe zu sein. Die Allgemeinheit und Schwierigkeit der Abel'schen Untersuchungen hat es aber verhindert, dass in den gangbaren Lehrbüchern über elliptische Functionen diese Art der Herleitung der Additionstheoreme angewendet wird. Es dürfte daher keine vergebliche Arbeit sein, wenn in dem Folgenden der Versuch gemacht wird, die bekanntesten Additionstheoreme nach der Abel-Jacobi'schen Methode herzuleiten, und dadurch den Einblick in diese Methode zu erleichtern. (J. Toeplitz, 1885, S. 2)

Der erste Abschnitt dieses Zitats gibt Anlass zu einigen kritischen Anmerkungen. Es könnte vermutet werden, dass es die hier zitierte Arbeit Abels (1841) war, die Jacobi bewegt hat, bei seinen Untersuchungen an Abel anzuknüpfen. Das ist keineswegs der Fall. Diese sehr umfangreiche und wohl berühmteste Arbeit Abels[93] hatte dieser im Oktober 1826 der Pariser Akademie eingereicht. Sie wurde dort beiseite gelegt, blieb jahrelang unauffindbar und wurde erst 1841, zwölf Jahre nach Abels Tod, schließlich in Paris veröffentlicht. Die Theorie der Abelschen Integrale und der Abelschen Funktionen beginnt mit Untersuchungen von Euler, Lagrange, Condorcet, Gauss und anderen über elliptische Integrale und deren Umkehrungen, die elliptischen Funktionen. Ein Pionier war hier Adrien-Marie Legendre mit seinem dreibändigen Werk *Traité des fonctions elliptiques et integrales Euleriennes* (Legendre, 1825/1826/1829).[94] Abel und Jacobi waren es, die erstmals die doppelte Periodizität der Umkehrfunktionen elliptischer Integrale erkannten. Beide haben früh darüber umfangreiche Werke publiziert; Abel im Crelle-Journal (Abel, 1827; Abel, 1828) und Jacobi bereits in einer Monographie (Jacobi, 1829).[95]

Die erste hier zitierte Arbeit Jacobis, die 1835 im Crelle-Journal erschien, befasst sich mit den über die elliptischen Funktionen weit hinausgehenden Ideen Abels. Dort spricht Jacobi anerkennend von Abelschen Transzendenten (Abelschen Funktionen), von Abelschen Integralen und vom Abelschen Theorem, Bezeichnungen, die sich dann allgemein durchgesetzt haben. Stützen konnte er sich dabei – wie gesagt – nicht auf Abels große Arbeit für die Pariser Akademie, sondern nur auf Veröffentlichungen Abels im Crelle-Journal; hier kommen vor allem die Arbeiten (Abel, 1826) und (Abel, 1828) und natürlich auch Abels Behandlung der elliptischen Funktionen in Frage.[96] Die zweite hier zitierte Arbeit (Jacobi, 1846) verfolgt zwar Ideen Abels, aber Abel wird in dieser Arbeit an keiner Stelle erwähnt.

Der zweite Abschnitt des obigen Zitats zeigt deutlich die didaktischen Absichten,

[93] Siehe die Ausführungen dazu von Felix Klein in (Klein, 1926, S. 103–107) sowie die dort auf S. 103 und S. 106 genannten ausführlichen Einschätzungen von Leo Königsberger und Ludwig Sylow.

[94] Zu einer zusammenfassenden Würdigung dieses Werkes siehe (Itard, 1991).

[95] Auch Abel hatte eine Art zusammenfassende Darstellung vor; Teil I von etwa 70 Seiten erschien im Crelle-Journal 1829 (Abel, 1829). Der Herausgeber Crelle schrieb unter die letzte Zeile dieses Aufsatzes: „Mr. Abel est mort sans l'avoir fini".

[96] In (Jacobi, 1835) heißt es auf S. 73 „integralia Abeliana seu hyperelliptica".

die Julius Toeplitz mit diesem Aufsatz verfolgte. Toeplitz war, wohl nicht ganz zu Unrecht, der Meinung, dass die Herleitung von Additionstheoremen bei der Behandlung Abelscher Integrale und deren Umkehrfunktionen keine besondere Rolle in der Literatur gespielt hat, wie etwa das weit verbreitete Lehrbuch von Carl Neumann (Neumann, 1865) zeigt.

Der Text des Artikels ist in Abschnitte gegliedert, in deren Überschrift jeweils als Ausgangspunkt ein Abelsches Integral genannt wird. Wir wollen es dabei bewenden lassen, nur zwei solche Überschriften zu nennen und dazu jeweils einige konkrete Ergebnisse.

(1) Additionstheorem für das Integral $\int_\alpha^x \frac{dx}{a_0x^2-a_1x+a_2}$.

(2) Additionsformel für $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4}}$

Das erste Integral liefert, gleich u gesetzt, bei $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $\alpha = 1$ für die Umkehrfunktion $\phi(u)$ das Additionstheorem der Exponentialfunktion: $\phi(u + v) = \phi(u) \cdot \phi(v)$. Für $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\alpha = 0$ erhält man das Additionstheorem des Tangens. Aus dem zweiten Integral leitet Toeplitz die Additionstheoreme von Sinus und Cosinus sowie das der Jacobischen elliptischen Funktion *Sinus amplitudinis* ab.[97]

[97] Zu den Jacobischen elliptischen Funktionen siehe in (Hurwitz und Courant, 1925) das Kapitel „Die Elliptischen Funktionen Jacobis“, S. 212–218.

4 Ausblick: Der mathematische Einfluss von Julius Toeplitz auf seinen Sohn Emil Toeplitz

Die vorliegende Arbeit bildet den Auftakt zu umfangreicherer Forschung über die Mathematikerfamilie Toeplitz. Wir möchten diese mit einigem Bemerkungen schließen über den mathematischen Einfluss, welchen Julius Toeplitz auf seinen Sohn Emil Toeplitz ausübte. Dieser ist besonders in seiner 1876 bei C. G. Naumann in Leipzig gedruckten Dissertationsschrift *Über ein Flächennetz zweiter Ordnung* (E. Toeplitz, 1876) zu erkennen. Die dort von ihm verfasste Vita beginnt mit folgenden Sätzen:

> Ich, Emil Toeplitz, bin am 15. October 1852 zu Lissa (Prov. Posen) geboren und bin der älteste Sohn des Gymnasial-Oberlehrers Julius Toeplitz und der Frau Ernestine, geb. Ephraim, jüdischer Religion. Nach mehrjährigem Besuch der Privatschule des Herrn Poper, trat ich Ostern 1861 in die Quinta des kgl. Gymnasiums meiner Vaterstadt ein, das bis vor Kurzem unter der Leitung des Herrn Dir. Prof. Ziegler stand, genoss daselbst den mathematisch-physicalischen Unterricht bei dem Herrn Prof. von Karwowski und meinem Vater und legte Ostern 1872 die Abiturientenprüfung ab. Hauptsächlich in Folge der vielfachen Anregungen, die ich von meinem Vater empfing, ergriff ich das Studium der Mathematik und Physik und bezog die Universität zu Breslau [...] (E. Toeplitz, 1876, S. III)

Die Widmung der Dissertationsschrift lautet folgendermaßen:

> Herrn Professor Dr. J. Rosanes als Zeichen der Hochachtung und Dankbarkeit und seinem lieben Vater gewidmet. Vom Verfasser. (E. Toeplitz, 1876, S. V)

Die öffentliche Verteidigung der *Inauguraldissertation zur Erlangung der Doctorwürde* fand am 30. Oktober 1876 statt. Es war üblich, dass der Doktorand eine Reihe von Thesen rechtzeitig vorher publik machte. Insbesondere wurden sie dem Dekan brieflich zugeschickt, der sie dann zur Prüfung und Genehmigung an die Kollegen der Fakultät verteilte. Während der Verteidigung hatte der Doktorand gegen mehrere Opponenten zu argumentieren. In unserem Falle hatte er seine Thesen „öffentlich zu vertheidigen gegen die Herren Gustav Westphal, Dr. Phil., Paul Trippke, Cand. rer. nat., Max Rauhut, stud. hist.“ Die Opponenten waren meist gute Bekannte des Promovenden. Wir wissen über die drei Genannten nichts, außer dass Westphal ebenfalls 1876 bei Rosanes promoviert hatte.

Die Thesen waren in der Regel allgemeine Aussagen zu verschiedenen Gebieten des Hauptfaches und reichten oft auch weit darüber hinaus. Die Doktorarbeit selbst betrafen sie meist nicht oder nur am Rande. Emil Toeplitz hatte acht Thesen formuliert, die wir im folgenden vorstellen und in Bezug auf die enge wissenschaftliche Bindung an seinen Vater Julius Toeplitz teilweise kommentieren:

1. Die Geometrie der Lage entbehrt noch einer selbständigen, naturgemässen Begründung.

Unter *Geometrie der Lage* verstand man die projektive Geometrie. Was Emil Toeplitz hier unter einer selbständigen naturgemässen Begründung meint, bleibt unklar. Da eine mathematische Begründung sowohl von synthetischer (siehe die *Geometrie der Lage* von von Staudt, 1847) als auch von analytischer Perspektive (insbesondere die Werke von Plücker) vollzogen war, ist möglicherweise eine (natur-)philosophische Begründung gemeint, analog zu dem Versuch Kants der Begründung der euklidischen Geometrie als Erkenntnis *a priori*. In jedem Fall ist bei dieser These wahrscheinlich der Einfluss von Julius Toeplitz auf seinen Sohn wirksam gewesen. In Julius Toeplitz' Veröffentlichungen zur Geometrie in den Jahresprogrammen des Lissaer Gymnasiums hatte dieser alle wesentlichen Elemente der projektiven Geometrie benutzt, wie die von Plücker eingeführten homogenen Koordinaten, projektive Abbildungen und das Doppelverhältnis als deren zentrale Invariante sowie das Dualitätsprinzip mit zahlreichen Anwendungen, aber nirgends wirklich projektive Geometrie betrieben, denn die unendlich fernen Elemente, wie etwa die unendlich ferne Gerade der projektiven Ebene, kommen nie in Betracht.

2. Die Analysis operirt jetzt ebenso sicher mit unendlichen, wie mit endlichen Grössen.

Vor allem Cauchy und Weierstrass hatten der schon weit fortgeschrittenen Analysis des 18. Jahrhunderts die Form einer strengen mathematischen Theorie gegeben und auch ihren Inhalt wesentlich erweitert. Auf wen sich Emil Toeplitz hier bezieht, sagt er nicht. Die These zeigt aber, dass er der Meinung war, dass dieser Prozess der strengen Begründung der Analysis bereits zum Ziel geführt hatte. Er hatte hier vermutlich die didaktisch sehr überzeugende Arbeit (J. Toeplitz, 1854) seines Vaters in Grunerts Archiv im Blick, die ganz auf Cauchys Herangehen beruhte.

3. Der beste Weg, sich mit der Theorie der elliptischen Functionen bekannt zu machen, ist der historische.

Diese These ist aus historischer Sicht ganz besonders bemerkenswert. Wir hatten gesehen, dass die meisten Arbeiten von Julius Toeplitz letztlich didaktische Ziele verfolgten. Diesen Trend setzt Emil Toeplitz hier fort, ja mehr noch, er benutzt für die Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen ein didaktisches Prinzip, welches der Sohn Otto Toeplitz für die Einführung in die Infinitesimalrechnung mehrfach praktiziert und immer wieder verbessert hat, die *genetische Methode* (siehe *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, O. Toeplitz, 2013). Als Otto Toeplitz in Göttingen unter dem Einfluss von Felix Klein (1849–1925) begann, sich auch didaktischen Fragestellungen zu widmen, war sein Vater noch jahrelang als Pädagoge aktiv und wird dieses Interesse seines Sohnes gewiss befördert haben.

4. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat einen

rein theoretischen Character und führt noch nicht zu practischen Auflösungs-Methoden.

Diese These ist zunächst verwunderlich, da ihre Behauptung 1876 schon seit vielen Jahren nicht mehr zutraf. Emil Toeplitz war mit partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gut vertraut. Er hatte in Leipzig bei Adolph Mayer (1839–1908), einem der produktiven Forscher auf diesem Gebiet, zwei einschlägige Vorlesungen besucht und auch an den Übungen teilgenommen. Es ist nicht gut vorstellbar, dass er von den wichtigen Anwendungen dieser Theorie, etwa in der Mechanik durch Jacobi und Hamilton, nichts wusste. Deshalb sei uns hier auch eine These erlaubt: Es ist bekannt, dass die öffentliche Verteidigung von Thesen gegen Opponenten, die man gut kannte und mochte, auch einen gewissen Unterhaltungswert hatte. Vielleicht war es so, dass bei der relativ großen Zahl von acht Thesen Emil Toeplitz auch eine wählte, bei der seine Opponenten mit Sicherheit als Sieger hervorgehen würden. Man kann annehmen, dass sein Vater auch bei der Verteidigung anwesend war, und so auch seinen Spaß hatte.

5. Die objective Existenz von Kräften ist durch Nichts begründet; in der Natur giebt es bloss Bewegungen.

Diese These hat sehr wahrscheinlich ihren Ursprung im Einfluss, den der Vater Julius Toeplitz auf seinen Sohn ausgeübt hat. Wir hatten gesehen, dass sich Julius Toeplitz eingehend mit Grundlagenfragen der Physik auseinandergesetzt hatte. In dieser These geht es um eine Grundlagenfrage der Mechanik, und oberflächlich betrachtet gilt ihre Aussage bis heute: Seit 2019 werden sämtliche SI-Einheiten definiert, indem man physikalischen Konstanten einen festen Wert zuweist. Dabei wird zunächst 1 Sekunde definiert als die Dauer von 9 192 631 770 Perioden einer bestimmten Schwingung des Cäsium-133-Atoms. Das Meter folgt als diejenige Strecke, die das Licht im Vakuum innerhalb des Zeitintervalls von 1/299 792 458 Sekunden zurücklegt. Beide Definitionen benötigen also lediglich Bewegungen, wie von Toeplitz postuliert. Erst die anderen SI-Einheiten, für welche man weitere Naturkonstanten hinzunimmt, referieren zu Kraft und Energie. Beispielsweise definiert man das Kilogramm heute über die Planck-Konstante $h = 6,626\,07015 \cdot 10^{-34} Js$, indem man $1Js = 1kg \cdot m^2/s$ umschreibt. Im Ganzen betrachtet steht die neue Regelung aber im Gegensatz zu Toeplitz' Idee einer Hierarchie der physikalischen Größen, denn durch die Festlegung bestimmter Naturkonstanten gibt es keinen prinzipiellen Unterschied mehr zwischen Basis- und abgeleiteten Einheiten, alle physikalischen Einheiten folgen aus der kohärenten Benutzung von sieben Naturkonstanten.

6. Ein sicherer Fortschritt der Psychologie ist erst dann zu erwarten, wenn es gelungen sein wird, quantitative Relationen zwischen psychischen Vorgängen festzustellen.

7. Es ist sehr wichtig für die Psychologie, das Verhältniss des Sprachgebrauchs zum wissenschaftlichen Gebrauch eines Terminus festzustellen.

8. Realschule und Gymnasium sind durch eine einzige Bildungs-Anstalt zu ersetzen.

Diese These ist für einen Absolventen eines klassischen Gymnasiums zu diesem Zeitpunkt ganz ungewöhnlich. Sie erklärt sich nur daraus, dass Emil Toeplitz das segensreiche Wirken von Karl Emil Gruhl, des guten Freundes seines Vaters, für die Entwicklung des preußischen Realschulwesens kannte und vielleicht auch die Gelegenheit hatte, selbst mit Gruhl über diese Fragen zu diskutieren.

Danksagung. Wir danken den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Geheimen Staatsarchives Preußischer Kulturbesitz, sowie der städtischen und universitären Archive in Lissa, Posen und Breslau, für ihre freundliche Unterstützung. Wir danken außerdem Hannes Junker für kritische Anmerkungen, sowie Gregor Nickel und Ralf Krömer für die Unterstützung auf dem Weg zur Veröffentlichung in den *Siegener Beiträgen*. Der größte Dank geht jedoch an Fèlix Oskar Mikolajski aus Stettin für die außerordentliche Unterstützung beim Auffinden und bei der Sichtung der Materialien aus den polnischen Archiven, sowie bei der Erforschung der Familienverhältnisse.

Archivquellen

Archiv der Universität Breslau: Archiwum Uniwersytetu Wrocławskiego. https://archiwum.uni.wroc.pl/index.php/archiwum-uniwersytetu-wroclawskiego

Archiv Lissa: Archiwum Państwowe w Lesznie, Akte miasta Leszno. Fast alle relevanten Akten wurden digitalisiert und sind frei zugänglich: https://www.szukajwarchiwach.gov.pl/zespol/-/zespol/26909

Archiv Posen: Archiwum Państwowe w Poznaniu, Akta miasta Poznania. Akten sind digital katalogisiert, aber größtenteils nicht eingescannt: https://www.szukajwarchiwach.gov.pl/de/zespol/-/zespol/136370

GStA PK: Geheimes Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz, insb. I. HA, Rep. 76: Kultusministerium 1807–1935

Jahresprogramme des Königlichen Gymnasium Lissa: Unter verschiedenen Titeln jährlich erschienen und zum großen Teil digital auf den Bibliotheksseiten der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf (HHU) bzw. auf den Seiten des Münchener Digitalisierungszentrums (MDZ) zu finden:

- bis 1840: *Einladungschrift zu der öffentlichen Prüfung im Königl. Gymnasio zu Lissa ... – Programma na Popis Publiczny Królwskiege Leszczyńskiege Gimnazyum ...* (nicht digital erhältlich)

- 1841: *Zu der ... statt findenden öffentlichen Prüfung der Zöglinge des Königlichen Gymnasiums ladet ... ehrerbietigst ein* (HHU)
- 1843-1868 und 1870-1874: *Zur öffentlichen Prüfung der Zöglinge des Königl. Gymnasiums zu Lissa ... ladet ... ehrerbietigst ein* (HHU)
- 1869 und 1876: *Zur Schlußfeierlichkeit des Schuljahres ... im Königl. Gymnasium zu Lissa ... ladet alle Beschützer, Gönner und Freunde des Schulwesens ehrerbietig ein* (HHU, MDZ)
- 1878-1888: *Programm des Königlichen Gymnasiums zu Lissa : für die Zeit von Ostern ... bis Ostern ...* (HHU, MDZ, nicht komplett)
- 1889-1898: *Jahresbericht : für die Zeit von Ostern ... bis Ostern ...* (HHU)

Literatur

Abel, Niels Henrik (1826). „Ueber die Integration der Differentialformel $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1, S. 185–221.

– (1827). „Recherches sur les fonctions elliptiques“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2, S. 101–181.

– (1828). „Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 3, S. 313–323.

– (1829). „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4, S. 236–277, 309–348.

– (1841). „Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes“. In: *Mémoires présentés par divers savants* 7.

Anonym (1860). *Die Anstellung israelitischer Lehrer an preußischen Gymnasien und Realschulen – Ein Wort zur Aufhellung der Sachlage von einem practischen Schulmanne*. Berlin: Julius Springer.

Bottazzini, Umberto (1999). „Theorie der Komplexen Funktionen, 1780–1900“. In: *Geschichte der Analysis*. Hrsg. von Hans Niels Jahnke. Heidelberg: Springer, S. 267–327.

Burau, Werner (1991). „Plücker, Julius“. In: *Biographical Dictionary of Mathematicians, Vol. IV*. New York: Charles Scribner's Sons, S. 2011–2014.

Cauchy, Augustin-Louis (1825). *Mémoires sur les intégrales définies prises entre les limites imaginaires*. Paris: De Bure.

Chasles, Michel (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Brüssel: M. Hayez.

– (1839). *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neuern Methoden*. Übers. von L.A. Sohncke. Halle: Gebauersche Buchhandlung.

Friebe, Moritz (1903). *Geschichte der Königlichen Berger-Oberrealschule zu Posen während ihres fünfzigjährigen Bestehens 1853–1903*. Posen: Merzbach'sche Buchdruckerei.

Gray, Jeremy (1986). *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. Boston, Basel: Birkhäuser, S. 210–215.

Gröbner, Wolfgang (1949). *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen*. Wien: Springer.

Gruhl, Emil (1873). *Lehrbuch der Analytischen Geometrie. Band I: Analytische Geometrie der Ebene*. Ein zweiter Band ist nicht erschienen. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung.

Heppner, Aaron G und Isaak G Herzberg (1905a). *Geschichte der Juden in den Posener Landen*. Bd. 1. Koschmin, Bromberg: Selbstverlag der Verfasser.

– (1905b). *Geschichte der jüdischen Gemeinden in der Provinz Posen*. Bd. 2. Koschmin, Bromberg: Selbstverlag der Verfasser.

Hesse, Otto (1869). *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung*. 2. Aufl. Leipzig: Teubner.

Hildebrandt, Stefan und P.D. Lax (1999). *Otto Toeplitz*. Bonner Mathematische Schriften 319. Mathematisches Institut der Universität Bonn.

Hurwitz, Adolf und Richard Courant (1925). *Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 3. Berlin: Springer.

In memoriam Otto Toeplitz (1982). Bonner Mathematische Schriften 143. Mathematisches Institut der Universität Bonn.

Itard, Jean (1991). „Legendre, Adrien-Marie“. In: *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Bd. 3. New York: Scribner's Son, S. 1477–1486, dort insbesondere S. 1482–1484.

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1829). *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Königsberg: Bornträger.

– (1835). „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* 13, S. 55–78.

– (1846). „Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* 32, S. 220–226.

Kalisch, Ludwig (1872). *Bilder aus meiner Knabenzeit*. Leipzig: Keil. URL: https://www.digitale-sammlungen.de/de/details/bsb11014758.

Kemlein, Sophia (1997). *Die Posener Juden 1815–1848. Entwicklungsprozess einer polnischen Judenheit unter preußischer Herrschaft*. Hamburg: Dölling und Galitz Verlag.

Klein, Felix (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer*. Berlin: Springer.

Legendre, Adrien Marie (1825/1826/1829). *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes, 2. Band*. Paris: Huzard-Courcier.

Lewin, Louis (1904). *Geschichte der Juden in Lissa*. Pinne: Verlag von N. Gundermann.

Meyer, Alfred G. (1918). *Karl Emil Gruhl weiland Wirklicher Geheimer Oberregierungsrat – Ein Lebensbild*. Leipzig: O. R. Reisland.

Möbius, August Ferdinand (1827). *Der barycentrische Calcul: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*. Neuausgabe: Olms, Hildesheim 1976. Leipzig: Johann Ambrosius Barth.

Neumann, Carl (1865). *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*. 2. Auflage 1884. Leipzig: B. G. Teubner.

Ostrowski, Alexander M. (1977). „On Kronecker's elimination theory". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle-Journal)* 296, S. 37–57.

Perles, Joseph (1865). *Geschichte der Juden in Posen*. Breslau: Schletter.

Plücker, Julius (1828/1831). *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. 2 Bände. Essen: G. D. Baedeker.

– (1835). *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend*. Berlin: Duncker und Humblot.

– (1839). *Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine Behandlungsweise der analytischen Geometrie*. Bonn: Adolph Marcus.

– (1846). *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe*. 2. Auflage 1852. Düsseldorf: W. H. Scheller.

– (1868/1869). *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Erste Abteilung 1868; Zweite Abteilung posthum herausgegeben von Felix Klein 1869. Leipzig: B. G. Teubner.

Poncelet, Jean-Victor (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris: Bachelier.

Prümers, Rodgero (1895). *Das Jahr 1793: Urkunden und Aktenstücke zur Geschichte der Organisation Südpreußens*. Bd. 3. Sonder-Veröffentlichungen der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Posen: Historische Gesellschaft der Provinz Posen. URL: https://www.wbc.poznan.pl/dlibra/publication/567643/.

Remmert, Reinhold (1984). *Funktionentheorie I*. Berlin Heidelberg: Springer.

Reychman, Kazimierz (1936). *Szkice Genealogiczne [Genealogische Skizzen]*. Warszawa: F. Hoesick. URL: https://archive.org/details/szkice-genealogiczne.-serja-1-kazimierz-reychman..

Rosenhain, Johann Georg (1895). *Abhandlungen über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse sind*. Hrsg. von Heinrich Weber. Bd. 65. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Engelmann.

Salmon, George und Otto Wilhelm Fiedler (1865). *Analytische Geometrie des Raumes. Deutsche Übersetzung und Überarbeitung von Salmons Analytic Geometry of Three Dimensions, Dublin 1862*. 2. Aufl. Leipzig: Teubner.

Schmidt, Gesine (2018). *Jüdisches Leben in Lissa/Leszno*. Berlin, Leipzig.

Schröter, Heinrich (1867). *Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Ei-*

genschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte bearbeitet. Leipzig: B. G. Teubner.

Schröter, Heinrich (1880). *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiners Prinzipien auf synthetischem Wege abgeleitet*. Leipzig: B. G. Teubner.

– (1888). *Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet*. Leipzig: B. G. Teubner.

– (1890). *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species*. Leipzig: B. G. Teubner.

Schubring, Gert (1985). „Die Erinnerungen von Karl Emil Gruhl (1833–1917) an sein Studium der Mathematik und Physik in Berlin 1853–1856“. In: *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, S. 143–173.

– (1986). *Bibliographie der Schulprogramme in Mathematik und Naturwissenschaften (wissenschaftliche Abhandlungen) 1800–1875*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Schulte, Marion (2014). *Über die bürgerlichen Verhältnisse der Juden in Preußen. Ziele und Motive der Reformzeit (1787-1812)*. Bd. 11. Europäisch-jüdische Studien Beiträge. Walter de Gruyter.

Scriba, Christoph J. und Peter Schreiber (2001). *5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Serrier, Thomas (2005). *Provinz Posen, Ostmark, Wielkopolska – Eine Grenzregion zwischen Deutschen und Polen, 1848–1914*. Bd. 12. Materialien und Studien zur Ostmitteleuropa-Forschung. Marburg: Herder-Institut.

Steiner, Jacob (1832). *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc.* Erster Theil (im Vorwort werden fünf Teile angekündigt, es ist aber nur dieser erste Teil erschienen). Berlin: G. Fincke.

Sturm, Rudolf (1908/1909). *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*. Band 1 und 2: 1908; Band 3 und 4: 1909. Leipzig: B. G. Teubner.

– (1911). „Geschichte der mathematischen Professuren im ersten Jahrhundert der Universität Breslau 1811–1911“. In: *Jahresbericht der DMV* 20, S. 314–321.

Toeplitz, Emil (28. Okt. 1876). „Über ein Flächennetz zweiter Ordnung“. Verteidigt am 28. Oktober 1876. Druck von C. G. Naumann, Leipzig. Dissertation. Universität Breslau.

Toeplitz, Julius (1854). „Die Theorie der periodischen Funktionen, begründet durch die Betrachtung der Integrale zwischen imaginären Grenzen“. In: *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der höheren Lehranstalten (Grunerts Archiv)* 23, S. 241–263.

– (1858a). „Erweiterung eines Satzes des Herrn Prof. Grunert“. In: *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der höheren Lehranstalten (Grunerts Archiv)* 31, S. 222–224.

– (1858b). „Das leitende Princip in der Physik und die Abhängigkeit der Hypothesen von demselben“. In: *Jahresprogramm*, S. 1–12.

– (1859). „Der Fermat'sche und der Wilson'sche Satz, aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet". In: *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der höheren Lehranstalten (Grunerts Archiv)* 32, S. 104–106.
– (1865). „Analytisch-geometrische Studien zur Theorie der geraden Linien und der Kegelschnitte". In: *Jahresprogramm*, S. 1–22.
– (1869). „Die constanten Relationen bei den Dreiecken und tetraedrischen Coordinaten". In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch-Zeitschrift)* 14, S. 253–260.
– (1871). „Analytisch-geometrische Studien. II. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen". In: *Jahresprogramm*, S. 1–21.
– (1878). „Zur Theorie der Elimination". In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch-Zeitschrift)* 23, S. 61–67.
– (1879). „Geometrische Untersuchungen über den Zusammenhang der Theorie der Kurven mit der Theorie der Verwandtschaften". In: *Jahresprogramm*, S. 1–14.
– (1885). „Über Additionstheoreme". In: Jahresprogramm, S. 1–14.
Toeplitz, Otto (2013). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung: Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung Nach der Genetischen Methode. Erster Band.* Bd. 56. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
Toeplitz, Uri (1999). *Und Worte reichen nicht. Von der Mathematik in Deutschland zur Musik in Israel.* Konstanz: Hartung-Gorre-Verlag.
Von Sanden, Alfred (1905). *Zur Geschichte der Lissaer Schule 1555–1905. Festschrift zur 350 jährigen Jubelfeier des Königlichen Comeniusgymnasiums zu Lissa.* Lissa: Friedrich Ebbekes Verlag. URL: https://www.wbc.poznan.pl/dlibra/publication/34308/.
Von Staudt, Georg Karl Christian (1847). *Geometrie der Lage.* Nürnberg: Verlag der Korn'schen Buchhandlung.
– (1856/1857/1860). *Beiträge zur Geometrie der Lage.* Drei Hefte, erschienen 1856, 1857 und 1860. Nürnberg: Verlag der Korn'schen Buchhandlung.
Wohl, Eva (2004). *So einfach liegen die Dinge nicht. Erinnerungen – Von Deutschland nach Israel.* Bonn: Edition Lempertz.
Stiehl, Ferdinand, Hrsg. (1867). *Zentralblatt für die gesamete Unterrichts-Verwaltung in Preußen.* Berlin: Wilhelm Hertz (Bessersche Buchhandlung).
– Hrsg. (1868). *Zentralblatt für die gesamete Unterrichts-Verwaltung in Preußen.* Berlin: Wilhelm Hertz (Bessersche Buchhandlung).
– Hrsg. (1869). *Zentralblatt für die gesamete Unterrichts-Verwaltung in Preußen.* Berlin: Wilhelm Hertz (Bessersche Buchhandlung).

Anhang: Verzeichnis der mathematischen und physikalischen Vorlesungen während Julius Toeplitz' Studienzeit

Dozent	Vorlesung	h
	Sommersemester 1844	
Koch	Integralrechnung mit ihrer Anwendung auf analytische Geometrie	6
Kummer	Einleitung in die Analysis des Unendlichen	4
Koch	Uebungen in der höhern Analysis	2
Kummer	Fortsetzung der Theorie der elliptischen Functionen	2
Kummer	Die Kreistheilung, in ihrer Verbindung mit der Zahlentheorie	2
v. Boguslawski	Anleitung zur richtigen Anstellung astronomischer, magnetischer und meteorologischer Beobachtungen	1
v. Boguslawski	Theorie und Einrichtung der astronomischen, magnetischen und meteorologischen Instrumente	2
Pohl	Experimentalphysik	5
Frankenheim	Experimentalphysik	5
Pohl	Ueber Licht und Wärme	2
Pohl	Ueber Pendelbewegung	2
Frankenheim	Einrichtung und Gebrauch der physikalischen Apparate	2
	Wintersemester 1844/45	
Koch	Elementare Arithmetik	3
Rosenhain	Algebra	4
Kummer	Analytische Geometrie	5
Kummer	Differenzialrechnung	4
Koch	Integration der Differenzialgleichungen und ihre Anwendung auf analytische Geometrie	3
Rosenhain	Mathematische Uebungen	1
Kummer	Praktische Uebungen der in den Vorlesungen über Differenzialrechnung und analytische Geometrie abzuhandelnden Gegenstände	2
Koch	Statik und Mechanik	4
v. Boguslawski	Sphärische Astronomie und mathematische Geographie	2
v. Boguslawski	Unterhaltungen über astronomische, magnetische, meteorologische und hyposometrische Gegenstände, verbunden mit praktischen Uebugen	1
Frankenheim	Physik, theoretisch und experimental	5
Pohl	System der Experimentalphysik	5
Pohl	Ueber Elektromagnetismus und Magnetoelektricität	2

	Sommersemester 1845	
Rosenhain	Elementare Mathematik	4
Rosenhain	Einleitung in die Analysis des Unendlichen	4
Kummer	Integralrechnung	4
Kummer	Die gesamte Mechanik ohne Anwendung der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Maschinen	4
Kummer	Uebungen in der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie	2
v. Boguslawski	Verhandlungen über Gegenstände der Astronomie, der Meteorologie und des tellurischen Magnetismus, verbunden mit praktischen Uebungen und Beobachtungen	1
Rosenhain	Praktische Uebungen an den in den Vorlesungen über Einleitung in die Analysis des unendlichen abzuhandelnden Gegenständen	2
Pohl	System der Experimentalphysik	5
Frankenheim	Physik	5
Frankenheim	Ueber Galvanismus	2
	Wintersemester 1845/46	
Rosenhain	Analytische Geometrie	4
Kummer	Zahlentheorie	4
Rosenhain	Differentialrechnung	4
Kummer	Elemente der elliptischen Funktionen	2
Kummer	Analytische Mechanik	4
v. Boguslawski	Verhandlungen über Gegenstände aus dem Gebiete der Astronomie, der Meteorologie und des tellurischen Magnetismus, verbunden mit praktischen Uebungen	1
Pohl	System der Experimentalphysik	5
Frankenheim	Physik	5
Frankenheim	Optik	2
Pohl	Ueber Elektromagnetismus und Magnetelektricität	2
Frankenheim	Praktische Anleitung zum Gebrauch der physikalischen Apparate	2
	Sommersemester 1846	
Kummer	Einleitung in die Analysis des Unendlichen	4
Frankenheim	Ebene und sphärische Trigonometrie	2
Kummer	Die Lehre von der Kreistheilung	2
Kummer	Mathematische Uebungen	2
v. Boguslawski	Verhandlungen über Gegenstände der Astronomie, der Meteorologie und des Erdmagnetismus, verbunden mit Uebungs-Beobachtungen	1
Pohl	System der Experimentalphysik	5
Frankenheim	Experimentalphysik	5

Pohl	Ueber Licht und Wärme	2
Pohl	Anleitung zur Anstellung physikalischer Versuche	2
	Wintersemester 1846/47	
Kummer	Analytische Geometrie	5
Rosenhain	Ueber die neueren Methoden der reinen Geometrie	4
Kummer	Differenzialrechnung	4
Frankenheim	Akustik	2
Kummer	Mathematische Uebungen	2
v. Boguslawski	Verhandlungen über die neuesten Fortschritte der Wissenschaft im Gebiete der Astronomie, der Meteorologie und des Erdmagnetismus, verbunden mit Uebungsbeobachtungen	1
v. Boguslawski	Physische Weltbeschreibung nach Alexander von Humboldt's Kosmos	2
Pohl	System der Experimentalpyhsik	5
Frankenheim	Die gesammte Physik	6
Pohl	Ueber Elektromagenatismus und Magnetoelektricität	2
	Sommersemester 1847	
Rosenhain	Algebra	4
Rosenhain	Trigonometrie	2
Kummer	Integralrechnung	4
Kummer	Die gesamte Mechanik ohne Hilfe der höheren Analysis mit Anwendungen auf Maschinen	4
Kummer	Mathematische Uebungen	2
v. Boguslawski	Praktische Astronomie	2
v. Boguslawski	Verhandlungen über Gegenstände der Astronomie, der Meteorologie und des Erdmagnetismus, verbunden mit Uebungs-Beobachtungen	1
Franke	Die Physik theoretisch und experimentell	5
Pohl	Experimentalphysik	5
Frankenheim	Ueber den Magnetismus	2

The Untraveled Journey from Alpha Graphs to Linear Notation

Alfred Olszok

1 Introduction

The ways in which logic is presented have evolved significantly over time. (Roegel, 2002) Contemporary presentations often rely on a LINEAR NOTATION[1] that structures logical expressions in distinct directions in which we write and read them. This format typically involves two dimensions: On the one hand the arrangement of formulas in a line written and read from left to right, which we will call horizontal notation, and on the other hand the organization of multiple such formulas beneath one another to display inference or derivation, which we refer to as vertical notation. Well-known examples of this can be found in the works of Gentzen (1935, pp. 181), for example. Another remarkable approach of the last century achieved by Smullyan (1968, pp. 15), gained popularity in educational contexts, Priest (2008, pp. 6) leading to a broader trend in logic pedagogy that highlights visual clarity. This matches with observations by Gardner, who suggests that such presentations, which we will call diagrammatic notation, can be particularly effective in teaching logic. According to Gardner, a „diagram is a two-dimensional geometric Figure with spatial relations that are isomorphic with the structure of a logical statement". (Gardner, 1958, p.28) In this context, it becomes meaningful to compare traditional LINEAR NOTATIONS, such as those by Hilbert or Gentzen, with diagrammatic approaches like Smullyan or also Peirce's *alpha graphs*. While the former adhere to linear presentation, the latter offer diagrammatic notations. The precise meaning of all signs will be clarified later. For the moment, however, it can be firmly stated that the following two expressions — one diagrammatic and the other linear — convey the same meaning:[2]

[1] A reader's guide explaining the meanings of all type styles employed in this work follows directly after the introduction.

[2] The following figure omits several details concerning both *alpha graphs* and LINEAR NOTATION that we will address later; it is intended merely to provide an outlook on what we aim to accomplish here. In any case, for the signs used and for the way in which a formula is

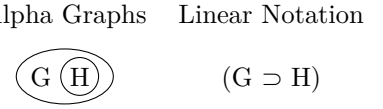


Figure 1: Comparison of Alpha Graphs and Linear Notation

Although various authors have compared *alpha graphs* to linear presentations as, for example, Roberts (1973) and Pietarinen (2024) as in Appendix A, such translations from Peirce's *alpha graphs* to linear presentations are often carried out in a simplified way. This holds for other kinds of graphs arising from Peirce's ideas as well, as we can see, for example, in Oostra (2010), who developed intuitionistic graphs, and in Zeman (1964), who introduced modal graphs. Consequently, such corresponding translations are also widely used across different graphs inspired by Peirce graphs.
In this paper, we aim to reconstruct this TRANSFORMATION in a more systematic way by developing a step-by-step TRANSFORMATION of *alpha graphs* into LINEAR NOTATION. At each stage of this TRANSFORMATION, we will examine both what is lost from Peirce's original ideas and what is gained in terms of adjustment with linear presentation. While this process inevitably involves departing from many of the foundational aspects of *alpha graphs*, it may also reveal opportunities to develop new LINEAR NOTATIONS inspired by Peirce's approach. Such a perspective will offer fresh insights into the conventional ways of writing logic today.

2 Reader Guidance

Let us offer a few brief remarks to guide the reader through the following work. Throughout the main text of this paper, we will employ the following distinct languages:

Peircean Language: All italicized text is drawn from Peirce and should be understood in his original sense which we will explain for each content. For technical reasons, this does not apply to all content written in a math font.

Research Terminology: Words specifically created for our research will be written in small capitals. These words will be explained in the following chapter before we begin our analysis.

Contextual Highlighting: Quotation marks are used to highlight certain terms within the given context in order to enhance clarity.

Pedagogical Commentary: Footnotes will always contain pedagogical commentary. These are often simplified and reflect contemporary perspectives, intended

constructed in LINEAR NOTATION, you may already refer to Appendix B.

solely to aid in grasping the foundational concepts.

Analytical Language: All remaining text constitutes our own analytical language, through which we explore Peirce's *alpha graphs* and the TRANSFORMATIONS we aim to develop.

With the reader guidance now provided, you may reread the introduction to gain a clearer understanding of our intentions.

3 Research Objectives

Since Roberts and Pietarinen translate the *alpha graphs* with aims such as completeness or soundness in mind, they often omit a proper translation. For such a translation, it would be necessary to specify the concrete grammar of the *alpha graphs* as well as that of the respective LINEAR NOTATION they employ. In our paper, we aim to demonstrate a different approach to arriving at a LINEAR NOTATION.
Let us give an example from another field in which we do the same: teaching elementary mathematics. Let us depict the following picture:[3]

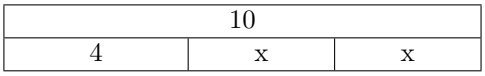


Figure 2: Illustration for a TRANSFORMATION

From this picture it is easy to argue that the upper box containing one 10 is horizontally equally long as the three lower boxes containing one 4 and two x. For this reason, we can conclude that $10 = 4 + 2x$. As long as we give you the instruction that the word „equal“ and the word „and“ from the description of the picture are to be TRANSFORMED into the equal sign „=“ and the addition sign „+“ in a formula, you will be able to go from the picture to the formula without any definition of what a well-formed formula actually is. By the way, we will encounter similar approaches in Peirce's *alpha graphs* with respect to the words „not“ and „and“, as we will analyze in the following chapter. All in all, we first obtain a diagrammatic representation, which we describe, and from this description the corresponding LINEAR NOTATION follows. This process is precisely what we refer to as the TRANSFORMATIONS of *alpha graphs* into LINEAR NOTATION. To be clear: this means that we will, first and foremost, understand the *alpha graphs* as diagrams, in accordance with Peirce's original intent. Starting from this, we will proceed step by step toward a LINEAR NOTATION, which will require a definition of the signs we will use in our LINEAR NOTATION we will build in the following. For such TRANSFORMATION, we require two tools, on the one hand as the ability

[3]The following method of teaching elementary mathematics is employed primarily in adaptive learning programs, such as Area9, for example; see Area9 (2025).

to hide certain parts of the pictures with respect to the TRANSFORMATION of the sheet of assertion, a process that will detach us from *alpha graphs*, and on the other hand substitution for the *cut* and *juxtaposition* using signs for the words „not“ and „and“, which will attach us to LINEAR NOTATION. Throughout this development, we will summarize these steps with regard to these TRANSFORMATIONAL tools; see Figure 10 and Figure 20. In using these tools we do not require a closer look at the grammar of *alpha graphs* or LINEAR NOTATION, while our approach is less syntactical as those of Roberts and Pietarinen. Since we have now agreed to TRANSFORM instead of translate, we must clearly state that the $\mathcal{T}$ used in the following chapters denotes TRANSFORMATION and not translation.
Before we start our analysis, let us also provide a brief outline of how we will write in LINEAR NOTATION, simply focusing on the signs that are most frequently used. Discussing logic, every author is entitled to employ their own LINEAR NOTATION, which is why we encounter a wide variety of symbols in different works. Nevertheless, some symbols occur more frequently than others. A brief look at the history of notation in the 20^{th} century reveals one symbol that has been used more than any other: $\vee$ for disjunction. (Elkind and Zach, 2023) Regarding other symbols, Roegel (2002) provides a detailed overview, showing that $\sim$ stands for negation, & for conjunction, and $\supset$ for implication mostly. When TRANSFORMING from Peirce's *alpha graphs* to a LINEAR NOTATION, we will adopt precisely these four symbols, as they have been the most common in LINEAR NOTATION so far. A brief inspection of the signs used in the *alpha graphs* will reveal that they lack symbols explicitly representing disjunction or implication. Yet, as can be seen from the translations provided in Appendix A, both of them occur repeatedly in the context of *alpha graphs*. For this reason, we now have provisionally adopted a precise and commonly employed LINEAR NOTATION for them. Since we will introduce several languages in LINEAR NOTATION, Appendix B provides a precise definition of how formulas are constructed in these LINEAR NOTATIONS, together with an explanation of the ideas guiding such constructions.

4 The Journey in Terms of Writing

A review of the history of logic reveals a variety of notational systems, forms of deduction, and justifications of why logic works. Comparing such systems is not always straightforward, as each originator pursued distinct objectives in formulating his system. Moreover, different historical times brought with them different expectations of logic. At the beginning of the 20^{th} century, a significant shift in logic occurred with the work of Hilbert (1902), who, among other things focused on soundness and consistency. The pursuit of such requirements in logic has persisted, as seen, for instance, in the systems of Hilbert (1902) himself, Gentzen (1935), and Smullyan (1968) and can be *transformed* to the *alpha graphs* as we will see soon. Over the past decades, these three systems have been widely used

in the teaching of logic, as illustrated, for example, in Mendelsohn (2015), Prawitz (1965), and Priest (2008). Although they differ substantially in notation, they share a common feature: We have to read linearly, as in for example (A ⊃ B). This left-to-right reading order is merely conventional. One could easily imagine an alternative convention that reads in the opposite direction — from right to left — which might appear disorienting but would nevertheless work, and, from our point fo view, require a rotation of 180° in the third dimension, which means rotating 180° around the axis build of a straight line from your point of view behind the sheet of paper: (Ɐ ⊂ A), It is equally conceivable to adopt other conventions, such as reading top down or from the bottom up:[4]

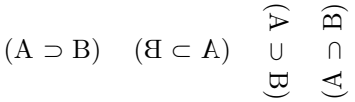


Figure 3: Rotating formula

All of these conventions share the characteristic that formulas are read along a line, a practice we will henceforth refer to as LINEAR NOTATION. In addition to the conventional reading from left to right, the systems of Hilbert, Gentzen, and Smullyan include rules for decuction that enable the execution of deductions. In presenting rules or deductions, the prevailing convention is to arrange multiple lines vertically, as in the case of Gentzen's rules for conjunction: $\frac{\text{A}\quad\text{B}}{\text{A\&B}}$ $\frac{\text{A\&B}}{\text{A}}$ $\frac{\text{A\&B}}{\text{B}}$. (Gentzen, 1935, p. 186) First, we observe the linear horizontal reading of each line; second, we see the vertical reading of multiple lines in relation to each other. Here as well, it is possible to rotate what we have written, the same as before, see Figure 4. Here, we see that no matter how we rotate what we have written, two forms of linear reading remain in use, one is horizontal and the next vertical.

The same applies to more complex deductions, examples of which can be found in Gentzen (1935). Later, when turning to *alpha graphs*, we will find that they function quite differently, as none of the linear readings discussed so far apply. Before proceeding to Peirce's *alpha graphs*, we want to address three fundamental

[4] In Figure 3 and Figure 4, the first formula represents the standard writing we are accustomed to. The second formula shows this writing rotated by 180° in the third dimension. The third formula, again starting from the standard writing, illustrates a 90° rotation to the right, while the last formula shows a 90° rotation to the left.

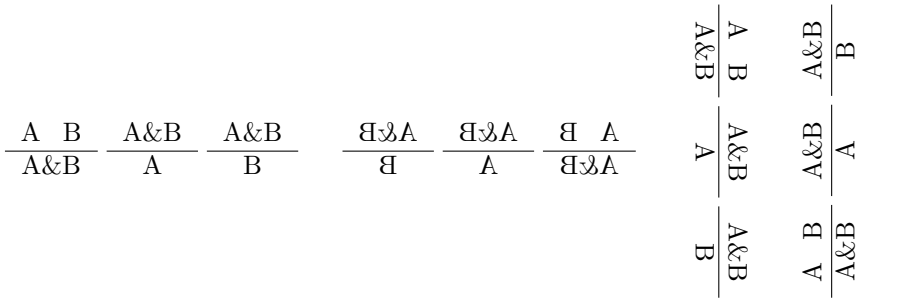


Figure 4: Rotating rule

concepts they contain: the *sheet of assertion*, the *cut*[5] and the *juxtaposition*.[6] Peirce presents his *alpha graphs* according to several conventions, (Peirce, 2021b, p. 161) of which the first addresses all three concepts all together:

> ***Convention No. 1.*** *The whole surface of this blackboard, excepting such parts as we may agree to sunder from the rest, together with any other surface which we may hereafter adjoin to it, shall be called our sheet of assertion, and every proposition the regular expression of which our imaginary graphist shall, at any time, render legible upon this surface, shall be understood to be thereby asserted of the universe, thus rendering the blackboard a more definite representation of the universe.* (Peirce, 2021b, pp.163)

To be fair, this does not mean we must always use a blackboard; a whiteboard, a sheet of paper — anything on which we can write and erase — can serve as a *sheet of assertion*.[7] In this convention, we see several arguments for the *sheet of assertion*, *cut*, and *juxtaposition*, of which the most will be lost when moving from Peirce's notation to a LINEAR NOTATION. But let us first examine how the *sheet of assertion* is used, which we will note as $\boxed{}$ hereafter. Already here we encounter a significant problem regarding Peirce's original idea of the *sheet of assertion*: it

[5]Since, from a contemporary perspective, reading the word *cut* is often associated with Gentzen's cut Gentzen (1935), let us state that Peirce's *cut* intends something quite different—more akin to a negation. The *cut* in Peirce's *alpha graphs* has a different conceptual background, but for didactic purposes, it may help to think of it as a form of negation until we present it in more detail.

[6]From a contemporary perspective, it might be helpful to keep conjunction in mind when encountering *juxtaposition*. Of course, *juxtaposition* is quite different from a modern conjunction, but for didactic purposes, this comparison may assist until we explain Peirce's concept of *juxtaposition* more precisely.

[7]For example we will later see Peirce discussing the sheet of assertion by means of a blackboard in his *Lowell Lectures*.

is not written on any surface, it is the surface itself. In fact, the sheet you are currently looking at is a *sheet of assertion* whose *universe of discourse*[8] contains everything we need to bridge the gap from *alpha graphs* to LINEAR NOTATION.

Speaking of the *sheet of assertion* in the abstract, we must represent it as  . Strictly speaking, this representation offends Peirce's original conception, but why? First, Peirce states that the *sheet of assertion* itself is a graph, meaning it has significance even when nothing is written on it, which we will call hereafter the *blank sheet*. Second, it exists only in the minds of *graphist* and *grapheus* by virtue of their agreement. (Peirce, 2021b, pp.159) Here we again encounter three interrelated components: *graphist*, *grapheus*, and *graph*. Peirce distinguishes three different kinds of graphs:

> *Partial graphs are graphs scribed in on the sheet of assertion that are not the only ones scribed on the sheet. The entire graph is all that is scribed on the sheet. The total graph is the entire graph together with the sheet of assertion itself.* (Peirce, 2021b, pp.165)

We see the *sheet of assertion* is not merely a *graph*, it is the *total graph*, existing solely by the shared agreement of *graphist* and *grapheus*, making it an overlap of two minds. Even when nothing is written on the *sheet of assertion*, it is still a total graph following the latter quote. Thus, let us state that a *blank sheet* is a total graph and ask what the meaning of such a *blank sheet* may be in Peirce's sense. To answer this, we have to inquire what the entire graph of a *blank sheet* may be in particular. Let us see what Peirce writes about it:

> *For example, if the board is a perfect blank, I call that a graph, because it represents my universe to exist, although it conveys no positive meaning, because that is among the things of which we had to take cognizance in the fundamental principles of the system upon which you and I agreed at the outset. So likewise I call any blank portion of the board a graph, because it represents the same state of things that the whole board, when blank, represents.*(Peirce, 2021b, pp.143)

We can see here that the *blank sheet* is a graph due to its assertion that the represented universe exists. Even though it is blank and thus does not state anything, it nevertheless contains different *blank portions* in which we can write other graphs, surely following the rules. One might perhaps think of the Urteilsstrich of Frege (1879), represented by |, which expresses a similar idea. It differs, however, in that

[8] From a contemporary perspective, one might reasonably think of a set of propositions or formulas when reading the term *universe of discourse*, but this is not Peirce's sense. Here, the *universe of discourse* is understood as an agreement between *graphist* and *grapheus*, which we will explain shortly herafter. Peirce himself uses the term multiple times in introducing his first graphs; see, for example, his *Logical Tracts* in Peirce (2021a, pp.202).

the Urteilsstrich appears only to be written, whereas the *blank sheet* is not. Yet, compared to the Urteilsstrich, the *blank sheet* also holds the potential to assert something, which would correspond to the Inhaltsstrich of Frege (1879). Let us consider the following comparison of both:

Peirce		Frege	
blank sheet	$\boxed{}$	Urteilsstrich	$\vert$
some asserted G	$\boxed{G}$	Urteilsstrich, Inhaltsstrich, and G	$\vdash G$

Figure 5: Comparison of Peirce and Frege

To be fair, everything we write on the *blank sheet* must follow the rules of the *alpha graphs*, which we will examine in the following Chapter. However, this already illustrates a major difference between Peirce and Frege, which will lead to a more precise understanding of the *blank sheet* we will need when TRANSFORMING the *alpha graphs* into LINEAR NOTATION. It is difficult to TRANSFORM Frege's Inhaltsstrich into the system of *alpha graphs*. It may not be the main goal of our work, yet let us nevertheless consider such a TRANSFORMATION in order to illustrate the meaning of the *blank sheet* more concretely. Peirce introduces the dot, which asserts that something exists. For that reason, we may say that $\cdot$ in Peirce has a meaning similar to – in Frege (but both have no meaning when standing alone), while $\boxed{\cdot}$ in Peirce expresses a meaning similar to $\vdash$ in Frege. However, the problem arises that $\cdot$ is not itself a sign of the *alpha graphs*, and moreover, a single dot on a *sheet of assertion* does not add any meaning to the *blank sheet*. (Peirce, 2021b, p.159) Yet, the *alpha graphs* require no additional sign such as the Inhaltsstrich, which in Frege's system must be written simultaneously with other signs to make an assertion like we see in Figure 5. In the *alpha graphs*, we simply write what we wish to assert on the *blank sheet*, surely following the rules of the *alpha graphs* which we will examine in the following chapter. Since, moreover, a *blank sheet* also contains *blank portions* on which we can write our graphs, we shall consider it a logical space. This leads to the idea of TRANSFORMING the *blank sheet* into $\top$, as, for example, Pietarinen (2024) does in comparison to Appendix A. Since we may consider *blank portions* of any sheet of assertion, we may likewise allow ourselves to fill any *blank portion* of any *entire graph* with $\top$ when TRANSFORMING the *alpha graphs* into LINEAR NOTATION, which we will do later in Figure 16.

Peirce persistently sought ways to depict thoughts as precisely as possible, as seen in works such as Peirce (1877) and Peirce (1878), where he focuses primarily on the nature of thought itself. A decade later, in his *Lowell Lectures*, (Peirce, 2021b) we see him concentrating on the relationship between writing and thinking, with

the two merging into one another.
In this context, he distinguishes between clear and obscure ideas, as well as distinct and confused ideas. An idea, he writes, is clear when *it will be recognized wherever it is met with, and so that no other will be mistaken for it*, and distinct when *it contains nothing which is not clear.* (Peirce, 1878, pp.286) While Peirce admits these are technical definitions, they suffice to apply to the *sheet of assertion.* It must be a clear and distinct idea, recognized universally, unmistakable, and it must retain these qualities regardless of what is written upon it according to the rules of the *alpha graphs.*
Because of these properties, the *sheet of assertion* can serve as a kind of container for *partial graphs* joining to an *entire graph*, effectively making it a logical space. This becomes evident when Peirce introduces his rules, all of which involve writing and erasing on the *sheet of assertion.* Notably, the rule *erase in even* allows one to delete the *entire graph* at any time, thereby regenerating the blank *sheet of assertion* as the *total graph.* (Peirce, 2021b, p.176) We will return to this later, but for now, let us turn to the *cut* and *juxtaposition.*
Next to the *sheet of assertion* is the *cut*, represented by a closed line that separates one part of the *sheet of assertion* from another. We will depict it as ◯. Simply writing ◯ without enclosing it within a *sheet of assertion* does represent it is a *partial* or *entire graph* without belonging to a *total graph.* By writing  we would state that there is a *sheet of assertion* on which a *cut* was written, which would not work following the rules of the *alpha graphs* as we will show later. For such reasons ◯ must hold for our our purposes of explaining in the following.
The *cut* is a self-returning line that separates two regions: the outer *place*, displayed through shading by and the inner *area*, shaded like  . (Peirce, 2021b, p.173) The *place* is clear and distinct; the *area* is obscure and confused, and everything written within it inherits those qualities. Since we may argue that the *area* is a part of the *sheet of assertion* that has been cut from it, we may equally argue that it is not part of the *sheet of assertion* anymore. For this reason, we will later introduce the sign for negation in LINEAR NOTATION; see Figure 8.
Finally, Peirce introduces the *juxtaposition*, essentially his analogue to conjunction. Writing two graphs next to each other asserts them both, along with their *juxtaposition.* Since we can, in this way, argue that two *partial graph* written on a *sheet of assertion* assert one *partial graph* and another *partial graph*, we can later introduce the sign for conjunction in LINEAR NOTATION; see Figure 9.
Considering G and H standing for *partial graphs* written according to the rules of the *alpha graphs* it is allowable here to write  or  , whereby positioning is completely irrelevant. Moreover, we could think of for example  asserting three things, G, H and the *juxtaposition* of G and H, from which the first two

are *partial graphs*, the third is the *entire graph*, and the third together with the *sheet of assertion* is the *total graph*. Another thing we already know from Peirce's perspective is the remarkable visibility of the *juxtaposition*. In contrast with the current tendency to write in lines, in Peirce's notation we draw pictures. This means there is no need for writing $\boxed{\text{GH}}$, we can instead also write $\boxed{\text{HG}}$, $\boxed{\begin{matrix}\text{G}\\\text{H}\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\text{H}\\\text{G}\end{matrix}}$, but also $\boxed{\begin{matrix}\text{G}&\\&\text{H}\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}&\text{H}\\\text{G}&\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\text{G}&\\&\text{H}\end{matrix}}$, which means that absolutely no positioning is relevant for constituting a *juxtaposition*. Peirce holds the view, that a *juxtaposition* has to work similar to actual thinking. Following examples like two coins in a wallet Peirce (1877, p. 3) or two fruits in a lunch box we also do not consider any ordering as relevant, we have two coins or fruits anyway. But in Peirce's notation there is not only no need for commutativity, there is also no need for linear writing. But that's not all, we also need nothing like associativity if we write three *graphs* on a *sheet of assertion*. For example we can write $\boxed{\begin{matrix}\text{G}&\\\text{H}&\text{I}\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\text{I}&\text{H}\\\text{G}&\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\text{I}&\\\text{G}&\text{H}\end{matrix}}$, however we prefer; there is absolutely no need for any thought on linear writing, commutativity, and associativity.

Having examined these three core concepts, *sheet of assertion*, *cut*, and *juxtaposition*, we can now turn to their TRANSFORMATIONS into LINEAR NOTATION. While modern logic predominantly uses $\sim$ for negation, & for conjunction, $\vee$ for disjunction, and $\supset$ for implication, Peirce's system allows for a direct but semantically meaningful mapping, in which parentheses function not merely as syntactic aids but as logical symbols. For example, the graph $\boxed{\text{G}\,\textcircled{\text{H}}}$ can be rendered as `|(G(H))|` by hiding the upper and lower parts of the picture, representing our first TRANSFORMATION $\mathcal{T}_1$ into the language $\mathcal{L}_1{=}\langle g, |, (,)\rangle$:

$$\mathcal{T}_1\boxed{\text{g}} \longrightarrow |\text{g}|$$

$$\mathcal{T}_1\boxed{\textcircled{\text{G}}} \longrightarrow |\mathcal{T}_1(\text{G})|$$

$$\mathcal{T}_1\boxed{\text{GH}} \longrightarrow |\mathcal{T}_1\text{GH}|$$

Figure 6: First TRANSFORMATION

At this point we have to clarify how we TRANSFORM exactly. To define what a formula is we need to take the symbols of our language and then define how they have to be combined inductively by substitution as for example shown in Church (1932, pp.350) Moreover, we need a distinction between primitives and variables for which substitution works, as postulated in Church (1940, p.57). In the latter example (and the following too) we use lowercase letters for primitives and uppercase letters for variables as Church stated it. The substitution then

comes into play in saying that a variable can be substituted with everything which is a formula itself. By this we roughly generated a definition for what a formula is, as you can see in Appendix B.

To be precisely on the left side of the arrow, we have graphs and on the right side of the arrow we have formulas (in the sense of Church), which leads to the question of what we are TRANSFORMING exactly. Concerning graphs, we have the *sheet of assertion*, *cuts* and *juxtapositions*, concerning $\mathcal{L}_1$ we have vertical lines and braces. Anyway, this TRANSFORMATION preserves structural properties and operates inductively on primitives and variables, much like the definition of well-formed formulas in formal logic.

Peirce himself emphasizes the precision of his rules, stating that they enable one *to express any assertion with such precision as to deduce its precise consequences without danger of committing any errors, so long as certain evident rules are adhered to.* (Peirce, 2021b, p.138) In this way, the TRANSFORMATION from *alpha graphs* to LINEAR NOTATION preserves the distinction between clear and distinct versus obscure and confused, much as modern definitions of well-formed formulas aim to ensure only syntactically valid expressions.

Looking back at our first TRANSFORMATION, $\mathcal{T}_1$, we must acknowledge that we have lost essentially all of the original ideas behind the *sheet of assertion*, since no distinct surfaces remain. Regarding the *cut*, we likewise have no clear indication for describing its *place* and *area* in the way Peirce intended. Nevertheless, we can retain the idea that, in linear reading, an opening parenthesis signifies stepping into a first *area*. We have also lost certain aspects of the *juxtaposition*, as we are now constrained to writing linearly and can no longer arrange elements horizontally or diagonally. Still, we can preserve the notion that, in LINEAR NOTATION, placing two elements next to each other *juxtaposes* them. In summary, in constructing $\mathcal{T}_1$, we have lost the *sheet of assertion* and parts of the original concepts of both the *cut* and the *juxtaposition*.

That said, $\mathcal{T}_1$ and the process by which we obtained it serve as a bridge from *alpha graphs* to LINEAR NOTATION. Since the *sheet of assertion* is now absent, the horizontal lines lose their function in LINEAR NOTATION. Consequently, we can also hide additional elements from left and right. Returning to the earlier example,  can also be rendered as (G(H)) by hiding the left and the right part too. Using this approach, we obtain the TRANSFORMATION $\mathcal{T}_2$, which *transforms alpha graphs* into $\mathcal{L}_2 = \langle g, (,) \rangle$:

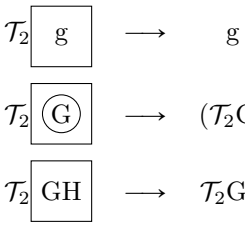


Figure 7: Second TRANSFORMATION

The notable point in using $\mathcal{T}_1$ or $\mathcal{T}_2$ is that we essentially take the *alpha graphs* and merely conceal certain parts, which leaves all original rules valid in $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$. From a modern perspective, such results also hold, for example Robert's proof of the soundness and correctness of the *alpha graphs* in Roberts (1973, pp.139), following the notion of both as described by Amor (2009).
In fact, $\mathcal{T}_2$ is the TRANSFORMATION that most readily comes to mind when one first encounters *alpha graphs*. Many intuitively leave these parts behind to interpret *alpha graphs* in a more linear way. The reason $\mathcal{T}_1$ does not occur to most people may be attributed to the widespread tradition of omitting the box when working with *alpha graphs*, as seen in Roberts (1973) and Pietarinen (2024) as well in Appendix A, who also disregard the *sheet of assertion* mostly, overlooking certain related issues.
In reality, the sheet on which these letters are now written — whether as a physical copy or on a digital device — is, in a sense, the *sheet of assertion* you are holding. However, on this same sheet, we have written both the thoughts about graphs and the graphs themselves, resulting in two distinct universes of discourse. To resolve this, we draw the box around every graph we TRANSFORM. In this way, $\mathcal{L}_1$ stays closer to Peirce's original ideas than $\mathcal{L}_2$.
Still, both are far removed from any notation involving symbols such as $\sim$, &, $\vee$, or $\supset$, since we have not yet introduced any of these signs. Examining either of the two transformations already defined, we may treat two parentheses as indicating negation, thereby moving somewhat closer to LINEAR NOTATION. This is roughly achieved in $\mathcal{T}_3$, TRANSFORMING into $\mathcal{L}_3 = \langle g, (,), \sim \rangle$:

$$\mathcal{T}_3\boxed{\text{g}} \longrightarrow \text{g}$$

$$\mathcal{T}_3\boxed{\textcircled{\text{G}}} \longrightarrow \sim(\mathcal{T}_3\text{G})$$

$$\mathcal{T}_3\boxed{\text{GH}} \longrightarrow \mathcal{T}_3\text{GH}.$$

Figure 8: Third TRANSFORMATION

The most striking change here is the shift in the meaning of parentheses. Up to $\mathcal{T}_2$, parentheses were necessary in LINEAR NOTATION to indicate negation, but from $\mathcal{T}_3$ onward, negation is explicitly marked by $\sim$, and parentheses now merely indicate the beginning and end of the negated portion. Looking, for example, at Polish notation Simons (2023), we could, in principle, dispense with parentheses after $\mathcal{T}_3$, defining the *area* of negation as whatever immediately follows $\sim$. However, this would cause problems: consider $\sim$(gh) and $\sim$(g)h, both valid in $\mathcal{L}_3$, which, without parentheses, would become indistinguishable. For this reason, parentheses remain necessary, but indicating the *area* of the *alpha graphs*. Thus, in generating $\mathcal{T}_3$, we

completely abandon the original meaning of the *cut*, replacing it with a negation expressed in an entirely different way.
We can move further toward LINEAR NOTATION by treating two written graphs as a conjunction, producing $\mathcal{T}_4$ with $\mathcal{L}_4 = \langle g, (,), \& \rangle$:

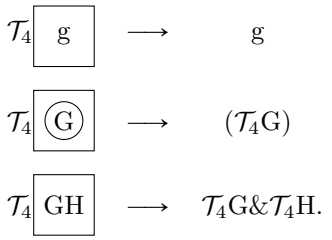


Figure 9: Fourth TRANSFORMATION

Since our focus here is on introducing & as the sign for conjunction in LINEAR NOTATION, we completely lose the original idea that placing elements next to each other constitutes a *juxtaposition*. At this point, we may conclude that we have lost many of Peirce's original ideas but have gained a fully LINEAR NOTATION.
Let us summarize the steps we have taken so far:

(1) We began with $\mathcal{T}_1$, in which we lost distinct surfaces and left the *sheet of assertion* entirely behind. This also altered the *cut* as a separation of one surface from another and forced the *juxtaposition* into a linear form.

(2) We then developed $\mathcal{T}_2$, removing the remaining lines indicating the *sheet of assertion*, as they no longer served any purpose.

(3) With $\mathcal{T}_3$, we introduced a distinct sign for negation, completely changing the role of parentheses.

(4) With $\mathcal{T}_4$, we introduced a distinct sign for conjunction, abandoning the original notion of *juxtaposition* entirely.

Figure 10: First steps on the journey from alpha graphs to LINEAR NOTATION

Having now reached $\mathcal{T}_4$, we have fully arrived at LINEAR NOTATION and can examine the rules of the *alpha graphs*. Clearly, $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ were built by concealing parts of the diagrams drawn in Peirce's style, so all the rules of *alpha graphs* still hold in these first two homomorphisms. In contrast, to obtain $\mathcal{T}_3$ and $\mathcal{T}_4$, we added or drew additional elements rather than merely omitting parts, fundamentally altering the nature of the notation.

5 The Journey in Terms of Reasoning

Let us take a closer look at the rules to confirm whether they also work for $\mathcal{T}_3$ and $\mathcal{T}_4$:

> *(1) Rule of Erasure and Insertion. Within an even number of cuts (or none), any partial or total graph can be erased, and in an odd number of cuts any graph can be inserted [...]*
> *(2) Rule of Iteration and Deiteration. Any partial or total graph may be iterated within the same or additional cuts [...] And if any graph is so iterated, it may be deiterated by erasing any replica provided it does not lie outside any cut [...]*
> *(3) Rule of Two cuts. Two cuts within the other with nothing between [...] may be together erased or inserted anywhere.*[9] (Peirce, 2021b, p.176)

It is important to clarify that Peirce developed the rules of alpha and beta graphs together. For this reason, in the quoted passage above, we have omitted the parts concerning beta graphs. Nevertheless, this is a precise definition of the rules, which we can reliably use for TRANSFORMING the rules of *alpha graphs* into any $\mathcal{L}$ we have established so far.
Starting with rule (1) (hereafter R1), we can say that for every TRANSFORMATION defined so far, it is permissible to erase anything enclosed by an even number (including zero) of pairs of parentheses, and it is permissible to insert anything, provided that it is subsequently surrounded by an odd number of pairs of parentheses. Essentially, we replace the words *cut* and *cuts* with "pair of parentheses" and "pairs of parentheses." For $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, this generates rules analogous to R1.
However, we now encounter a significant problem for $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$. We might introduce the requirement that any erasable or insertable element must be transformable from *alpha graphs* to $\mathcal{L}_3$ or $\mathcal{L}_4$ and vice versa. This ensures, for example, that nothing is inserted directly before or after any $\sim$ in $\mathcal{L}_3$. However, this will not safeguard the proper use of & in $\mathcal{L}_4$. Let us set this aside for the moment, as we will encounter more concrete examples of such issues with & when creating rules (2) (hereafter R2) and (3) (hereafter R3) for $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$ below.
TRANSFORMING R2 is considerably more complex, since in $\mathcal{L}_3$ the symbol $\sim$ must be considered. For $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, again, we can substitute *cut* and *cuts* with "pair of parentheses" and "pairs of parentheses," and the rule functions analogously to the original *alpha graphs*. For $\mathcal{L}_3$, however, we must substitute *cut* with $\sim$ () or combinations of $\sim$ (). Because Peirce's original wording *within* is not specific enough for our purposes, especially when considering iteration directly adjacent

[9] Since Peirce developed the alpha and beta graphs together, the rules he states are much more complex. As we are concerned here only with the *alpha graphs*, we have omitted those parts of the rules that pertain to the beta graphs in the quoted passage above.

to a $\sim$, we must add the requirement that any result produced by applying the rule must be transformable in both directions with respect to $\mathcal{L}_3$. Here we notice an important point: while it is theoretically possible to formulate an R2 analogue for $\mathcal{L}_3$ without using the notation of $\mathcal{L}_3$ itself, doing so would require excessively verbose descriptions of e.g., "negation," "opening brace," "closing brace," just to specify where insertions and deletions may occur. In Peirce's original *alpha graphs*, rules can be stated succinctly without writing $\boxed{}$ or $\bigcirc$. This simplicity is lost once we move to TRANSFORM the rules of the *alpha graphs* into $\mathcal{L}_3$.

Formulating an analogous rule for R2 in $\mathcal{L}_4$ requires even more complexity: every time we iterate something, we must also insert &, and every time we deiterate something, we must delete &, but only if there is already content in that *area* before the iteration, and after the deiteration.

Turning to R3, for $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, we can again substitute *cut* with "pair of parentheses" and preserve the rule's function. For $\mathcal{L}_3$, the substitution must be as in R2, but we can define it more succinctly: it is permissible to add or erase $\sim$ ($\sim$ ()) with nothing in between the second opening brace and the first closing brace. This ensures TRANSFORMABILITY with *alpha graphs* and avoids overly complicated formulations. For $\mathcal{L}_4$, we substitute as in R1 and require TRANSFORMABILITY to avoid ambiguity:[10]

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$
R1	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with pair of parentheses and require TRANSFORMABILITY	substitute *cut* with pair of parentheses and add or delete &
R2	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with $\sim$ ($\sim$ ()) and require TRANSFORMABILITY	substitute *cut* with pair of parentheses and add or delete &
R3	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with pair of parentheses	substitute *cut* with $\sim$ ($\sim$ ()) and require TRANSFORMABILITY	substitute *cut* with pair of parentheses and require TRANSFORMABILITY

Figure 11: First comparison of rules

[10] The following table is only meant to show a precise overview of what we have done for TRANSFORMING each rule in each $\mathcal{L}$.

One observation becomes clear: The higher the index of our $\mathcal{L}$, the further we move away from Peirce's original *alpha graphs*. $\mathcal{L}_1$ still uses an analogue of the *sheet of assertion* and employs only parentheses for the *cut*, making it well-suited for keyboard use while remaining close to Peirce's original conception. In $\mathcal{L}_2$, we discard the *sheet of assertion*, moving a step further away from Peirce, particularly since the *sheet of assertion* is fundamental to his *alpha graphs*. Nevertheless, it is puzzling why the *sheet of assertion* is so often omitted in practice, as seen in Roberts (1973) and Pietarinen (2024) following Appendix A.

There are two main explanations: First, from a contemporary perspective, *alpha graphs* can be interpreted as a system of axioms and rules, with the *sheet of assertion* functioning as the sole axiom. In this reading, its explicit depiction is unnecessary, much like axioms in other formal systems. Second, it is often assumed that the physical medium (paper, whiteboard, blackboard, screen, etc.) serves as the *sheet of assertion*. However, this conflates a physical object with an axiom, which is highly problematic from a contemporary perspective of logics. If we interpret the *sheet of assertion* as the sole axiom plus three pairs of rules, the system still works for generating tautologies or theorems in Hilbert's sense, but this reading diverges significantly from Peirce's intentions. This suggests that TRANSFORMING *alpha graphs* into languages like our $\mathcal{L}$ involves substantial conceptual loss.

Finally, $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$, which add elements of our chosen notation, bring us closer to LINEAR NOTATION but further from Peirce's concepts. Figure 11 shows that rules for $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ TRANSFORM smoothly, whereas rules for $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$ become increasingly complex, requiring TRANSFORMABILITY and careful dealing with $\sim$ and &. In $\mathcal{L}_3$ R2 and R3 need different substitutions regarding the conjunction and in $\mathcal{L}_4$, R2 is problematic because & is absent from the original *alpha graphs*. Here lies the uniqueness of *juxtaposition*: It is a sign, yet unwritten in a physical sense. Its absence from LINEAR NOTATION requires that, once & is introduced, extra rules beyond TRANSFORMABILITY and substitution must be added. Consequently, $\mathcal{L}_4$ is the furthest removed from Peirce's notation. We have now seen that the key issues with the *sheet of assertion* in $\mathcal{L}_2$ and *juxtaposition* in $\mathcal{L}_4$ stem from a common feature: Both are unwritten in a physical way in the original *alpha graphs*.

Thus, let us also relate the *alpha graphs* to our four $\mathcal{L}$ by focusing on the relative distances of each $\mathcal{L}$ to the *alpha graphs*:[11]

$\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_3$ $\mathcal{L}_4$

[11] As with Figure 11, Figure 12 is provided solely as an overview for didactic purposes. To present all subsequent tables more clearly, we will use the abbreviations SA for *sheet of assertion*, JX for *juxtaposition*, and CU for *cut*.

SA	written	ignored	ignored	ignored
CU	substitution	substitution	substitution, addition	substitution
JX	—	—	—	written, addition
R1	substitution by words	substitution by words	substitution by words, TRANSFORMABILITY	substitution by words, TRANSFORMABILITY
R2	substitution by words	substitution by words	substitution by terms, TRANSFORMABILITY	substitution by words, addition
R3	substitution by words	substitution by words	substitution by terms, TRANSFORMABILITY	substitution by words, TRANSFORMABILITY

Figure 12: Second comparison of rules

We can now clearly identify the special characteristics of the *sheet of assertion* and the *juxtaposition*, both of which are not written in *alpha graphs* but must be redefined in new and distinct ways in any $\mathcal{L}$. Moreover, the increasing distance from the *alpha graphs* as the index of an $\mathcal{L}$ increases is also clearly reflected in the corresponding rules.
Let us now shortly highlight what is new due to the changes made to the *sheet of assertion*, the *cut*, the *juxtaposition* and the rules for each $\mathcal{L}$ into which we TRANSFORMED so far, which will clearly display the argument for the increase of the index of each $\mathcal{L}$ when stepping farther away from Peirce's original ideas:[12]

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$
SA	written	ignored	ignored	ignored
CU	substitution	substitution	substitution, addition	substitution
JX	—	—	—	written, addition

[12] Using the abbreviations introduced in Figure 11, Figure 12 will also serve to give a better overview of our last discussion for didactic purposes. Each shaded box highlights a new change compared to the $\mathcal{L}$ one index higher.

R1	substitution by words	substitution by words	substitution by words, TRANSFORMABILITY	substitution by words, addition
R2	substitution by words	substitution by words	substitution by terms, TRANSFORMABILITY	substitution by words, addition
R3	substitution by words	substitution by words	substitution by terms, TRANSFORMABILITY	substitution by words, TRANSFORMABILITY

Figure 13: Third comparison of rules

Since we already know that R1 does not directly involve the *sheet of assertion*, *cut*, or *juxtaposition*, it is unsurprising that no TRANSFORMATION explicitly focuses on it. Looking at R2, however, we see that it requires both the *cut* and the *juxtaposition*, which is why $\mathcal{L}_3$, focusing on *cut*, and $\mathcal{L}_4$, focusing on *juxtaposition*, must be significantly modified. Let us now continue our journey from *alpha graphs* to LINEAR NOTATION by constructing a TRANSFORMATION that combines the use of negation $\sim$ and within a new language $\mathcal{L}_5 = \langle g, (,), \sim, \& \rangle$:

$$\mathcal{T}_5 \boxed{\text{g}} \longrightarrow \text{g}$$

$$\mathcal{T}_5 \boxed{\textcircled{\text{G}}} \longrightarrow \sim(\mathcal{T}_5\text{G})$$

$$\mathcal{T}_5 \boxed{\text{GH}} \longrightarrow \mathcal{T}_5\text{G}\&\mathcal{T}_5\text{H}.$$

Figure 14: Fifth TRANSFORMATION

This TRANSFORMATION is essentially a combination of the four given earlier: The first line comes from $\mathcal{L}_2$, the second from $\mathcal{L}_3$, and the third from $\mathcal{L}_4$. With this, we now have a clearly defined TRANSFORMATION into a language suitable for LINEAR NOTATION. We also have rules for $\mathcal{L}_5$ by combining the changes already introduced for the other $\mathcal{L}$. Written out fully, the rules can be stated largely in Peirce's original words, with the previously discussed modifications:

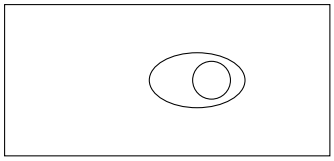
> (R1$\mathcal{L}_5$), Rule of Insertion and Erasure: Within an even number of pairs of parentheses (or none), any *partial* or *entire graph* can be erased,

and within an odd number of pairs of parentheses any graph can be inserted. If inserting produces a graph in a *place* where another graph is already written, an & must be placed between the newly inserted and the existing graph. Moreover, if the inserted graph is adjacent to a combination of ∼ (on the left or to a) on the right, an & must also be inserted between them. The same applies in reverse for erasure.
(R2$\mathcal{L}_5$), Rule of Iteration and Deiteration: Any *partial* or *entire graph* may be iterated within the same or additional pairs of parentheses. If a graph is iterated, it may be deiterated by erasing any replica, provided it does not lie outside any pair of parentheses. If inserting results in a graph adjacent to an existing graph, an & must be inserted between them. Similarly, if the iterated graph is adjacent to a combination of ∼ (on the left or to) on the right, an & must be placed between them. The same applies in reverse for deiteration.
(R3$\mathcal{L}_5$), Rule for ∼ (∼ ()): The combination ∼ (∼ ()) may be erased anywhere if, before erasure, there was content only between the second opening parenthesis and the first closing parenthesis. Likewise, ∼ (∼ ()) may be inserted anywhere if, after insertion, there is content only between these parentheses. TRANSFORMABILITY must always be checked after applying this rule.

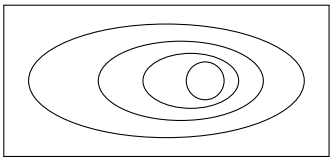
Figure 15: Rules for $\mathcal{L}_5$

We now finally see how imprecise the definition of the rules becomes when we attempt to use signs from LINEAR NOTATION. Let us illustrate this with an example in which all the rules will be required. A good example is the deduction of the graph 

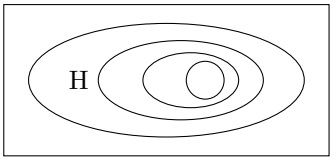
. For clarity, we must specify the rules being used in *alpha graphs* , as well as the TRANSFORMATION of the deduction into $\mathcal{L}_5$ and indicate the corresponding rules for $\mathcal{L}_5$:[13]

AG-Deduction	AG-Rule	$\mathcal{L}_5$-Deduction	$\mathcal{L}_5$-Rule
	R3	∼ (∼ ())	R3$\mathcal{L}_5$

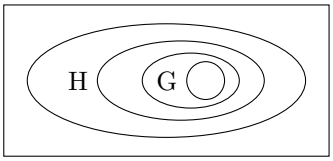
[13]Let us also use AG instead of *alpha graphs* in the following table for greater clarity.



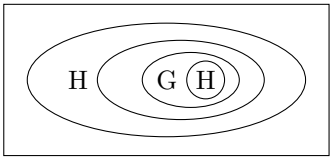
R3 $\sim (\sim (\sim (\sim ())))$ R3$\mathcal{L}_5$



R1 $\sim (H\& \sim (\sim (\sim ())))$ R1$\mathcal{L}_5$



R1 $\sim (H\& \sim (\sim (G\& \sim ())))$ R1$\mathcal{L}_5$



R2 $\sim (H\& \sim (\sim (G\& \sim (H))))$ R2$\mathcal{L}_5$

Figure 16: First deduction

As we here see, we encounter a different use of braces than we are commonly used to. Usually, it is not necessary to employ braces every time we use a negation, as we also did in Figure 8 and Figure 14. Moreover, we are generally accustomed to using braces in the case of conjunction, since we usually face the problem that we must first establish its commutativity and associativity. However, since conjunction follows directly from the *alpha graphs*, as we can see in Figure 9, we have TRANSFORMED the arguments of *juxtaposition* — for which neither commutativity nor associativity needs to be established — into the conjunction.
Using the braces in this way for negation, as we already pointed out directly after Figure 8, and moreover not for conjunction, yields LINEAR NOTATIONS in which we can still recognize the *alpha graphs* simply by looking for braces, since we know that each pair of braces represents one *cut* from the *alpha graphs*.
Hereby we can firmly state that we have indeed lost the writing of the *cut*, as we pointed out directly after Figure 8, as well as the writing of the *juxtaposition*, as noted directly after Figure 9. Nevertheless, we can still recognize the *alpha graphs* in our LINEAR NOTATION and have preserved the argument of *juxtaposition* concerning commutativity and associativity, all solely due to how we use braces.
Moreover, in the latter figure we observe that only the last line is directly applicable to LINEAR NOTATIONS, as in the preceding lines there is always an opening

parenthesis immediately followed by a closing parenthesis, which is incompatible with common linear systems. While it would be possible to create a convention that allows an opening and closing parenthesis directly in succession, doing so would not align with contemporary LINEAR NOTATION. Since our journey began with *alpha graphs*, there was initially no need to TRANSFORM the *sheet of assertion* into any explicit symbol, as it functioned merely as a form of logical space that did not require written representation. This stands in clear contrast to, for example, Pietarinen (2024) (see Appendix A), who introduces $\top$, representing the *sheet of assertion*, at the very beginning of his analyses. We can now see that such an introduction is not required until much later.

It is only with this first example of deduction that the problem emerges: in any $\mathcal{L}$ we are now writing elements that require a way to address this issue.

One possible approach would be to add a clause such as $\mathcal{T}_5$  $\longrightarrow \mathcal{T}_5 \sim(\top)$ to $\mathcal{T}_5$, but this would be problematic, as it would require multiple different transformations for *cut*. Another, simpler, option would be to stipulate that if nothing is written on any *area*, we instead write $\top$. As this is the more straightforward approach, we can formalize it as a restriction for each moment in which there is a blank spot in between any braces:

> (RE), Restriction on Emptiness: If we create an opening and a closing parenthesis directly in succession by using any rule, we must immediately insert $\top$ between them. If we iterate or introduce something in a *place* where $\top$ is already written, we must delete $\top$ before adding the new content.

Figure 17: Restriction on emptiness

As a result, our language $\mathcal{L}_5$ must now be enriched by $\top$, giving us the new language $\mathcal{L}_6$=$\langle g, (,), \sim, \&, \top\rangle$. Combining $\mathcal{L}_6$ with the TRANSFORMATION from Figure 14, the rules from Figure 15, and the restriction from Figure 17 yields a method that effectively bridges *alpha graphs* and LINEAR NOTATION, even for deduction in a contemporary sense. The only change required is renaming the rules to R1$\mathcal{L}_6$, R2$\mathcal{L}_6$, and R3$\mathcal{L}_6$, while preserving their content from Figure 15, as they now fit the language $\mathcal{L}_6$. Referring back to the example in Figure 16, we can now deduce in our new $\mathcal{L}_6$:

Deduction in $\mathcal{L}_6$	Rule used in $\mathcal{L}_6$
$\sim (\sim (\top))$	R3$\mathcal{L}_6$ and RE
$\sim (\sim (\sim (\sim (\top))))$	R3$\mathcal{L}_6$
$\sim (H\& \sim (\sim (\sim (\top))))$	R1$\mathcal{L}_6$

$$\sim (H\& \sim (\sim (G\& \sim (\top)))) \qquad \text{R1}\mathcal{L}_6$$

$$\sim (H\& \sim (\sim (G\& \sim (H)))) \qquad \text{R2}\mathcal{L}_6 \text{ and RE}$$

Figure 18: Second deduction

Finally, we wish to construct an even richer language for LINEAR NOTATION: $\mathcal{L}_7$=$\langle g, (,), \sim, \&, \vee, \supset, \top\rangle$. In classical logic, we can rely on semantic equivalences like in Post (1921) to generate $\vee$ and $\supset$ from $\sim$ and &. For example, the final line in Figure 16 yields $(H \supset (G \supset H))$, which is recognizable as a Hilbert axiom. The semantic equivalences from $\mathcal{L}_6$ to $\mathcal{L}_7$ are stated as follows:

$$\begin{aligned} \sim (\sim (G)\& \sim (H)) \quad &\equiv \quad G \vee H \\ \sim (G\& \sim (H)) \quad &\equiv \quad (G \supset H) \end{aligned}$$

Figure 19: Semantic equivalences

Through these equivalences, we can extend to $\mathcal{L}_7$ and derive $(H \supset (G \supset H))$ using *alpha graphs*, thereby connecting them to a standard LINEAR NOTATION — a rather long journey. Let us summarize the steps taken, as introduced in Figure 10:

(1) We constructed $\mathcal{T}_1$, thereby removing distinct surfaces and completely omitting the *sheet of assertion*. This also affected the *cut*, as cutting one surface from another, and the *juxtaposition*, as we were compelled to write linearly.

(2) We constructed $\mathcal{T}_2$ and removed the remaining lines that indicated the *sheet of assertion*, as they no longer carried meaning in LINEAR NOTATION.

(3) We developed $\mathcal{T}_3$, introducing a distinct symbol for negation and completely altering the meaning of parentheses.

(4) We developed $\mathcal{T}_4$, introducing a distinct symbol for conjunction and entirely omitting the *juxtaposition*.

(5) We fully adapted the rules of the *alpha graphs* to $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, and $\mathcal{L}_4$ and discussed their differences.

(6) We created $\mathcal{L}_5$ by combining $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$, producing a functionally complete set of operators in LINEAR NOTATION.

(7) We TRANSFORMED the rules from *alpha graphs* into $\mathcal{L}_5$, yielding a new method of deduction in LINEAR NOTATION.

(8) We imposed a restriction on the *sheet of assertion*, resulting in $\mathcal{L}_6$, which also includes $\top$.

(9) We used semantic equivalences to obtain $\mathcal{L}_7$, which includes $\vee$ and $\supset$, completing the LINEAR NOTATION.

Figure 20: All steps on the journey from alpha graphs to LINEAR NOTATION

This journey from *alpha graphs* to a suitable LINEAR NOTATION is indeed long. At each stage, we leave behind more of Peirce's original ideas, yet we also move closer to a workable form of deduction in LINEAR NOTATION.

6 Conclusion

Let us look back at the journey we have traveled: Starting with *alpha graphs*, we first explored ways of representing them with parentheses, then by using $\sim$ and & we changed the meaning of parentheses completely, and eventually also introduced $\vee$, $\supset$, and $\top$, which never existed in Peirce's original graphs. In doing so, we developed a method not only for TRANSFORMING notation but also for TRANSFORMING deduction by adapting the rules — a process that was admittedly somewhat awkward but nevertheless workable. This can be regarded as a small milestone, as it enabled us to construct a new method of deduction in LINEAR NOTATION by using the rules of Figure 15 for $\mathcal{L}_6$, the restriction of Figure 17, and the equivalences shown in Figure 19 together. On this basis, we were able to TRANSFORM the proofs of soundness and completeness from Roberts (1973, pp.139), thereby ensuring that this new deductive method satisfies the requirements defined by Amor (2009, p.175).

To sum up, by looking at Figure 20, we see that the journey from *alpha graphs* to LINEAR NOTATION is much longer than suggested in Pietarinen (2024) and Roberts (1973). Peirce himself clearly did not separate the *alpha graphs* into notation and deduction in the way we have done here. However, since contemporary motivations for logic distinguish between writing, reasoning, and deduction, we have adopted such a division. The difference can be summarized as follows: Nowadays writing receives less attention than reasoning; see, for example, Gentzen (1935).

Viewed in this way, we can classify the steps as follows: In (1) and (2) we removed elements from Peirce's notation, and in (3) and (4) we added elements from LINEAR NOTATION. Since the well-known works of Pietarinen (2024), Oostra (2010), Roberts (1973), and Zeman (1964) primarily focus on deduction, the second half of this paper concentrated on the deductive aspects of Peirce's *alpha graphs*. In TRANSFORMING them into LINEAR NOTATION in steps (5) through (7), we created a method of deduction in LINEAR NOTATION, and in (8) and (9) we introduced symbols that were never part of the *alpha graphs* but are required mostly in LINEAR NOTATION, as they are used by the authors we have referred to so far. In essence, we have abandoned Peirce's ideas of notation since step (2), and since step (8) we have significantly modified Peirce's approach to deduction by drastically changing the role of the *sheet of assertion* through the introduction of $\top$, which does not

follow Peirce in any sense.
Let us briefly summarize what we have gained throughout TRANSFORMING the ALPHA GRAPHS into LINEAR NOTATION:

- We have gained both new linear writings, see all our $\mathcal{L}$ and a new linear reasoning, see Figure 15.
- There is no need for using $\top$; but if we wish to employ it, we can introduce it far later than it usually would be, see Figure 17.
- We use braces in a different way, since they are required only for negation, see Figure 16.
- This use of braces yields an implication arising from the use of the *cut* of the *alpha graphs*, see Figure 18.
- Moreover, from this use of braces, commutativity and associativity of conjunction follow directly, see Figure 18.
- The same holds for disjunction, see Figure 19.

Especially the use of the braces leading to implication, conjunction, and disjunction may be highlighted in a particular way, because these ideas follow directly from how the *cut* and JUXTAPOSITION operate, as described at the beginning of Chapter 4. This demonstrates that Peirce's ideas can still be applied today, even when we choose to work with LINEAR WRITING.
For a clearer presentation of Peirce's visual aspects of the *alpha graphs*, in Appendix C, we present a set for creating a flip-book of the deduction shown in Figure 16. By constructing this flip-book, one can simulate a setting in which these visual ideas are fully enacted, since in such a setting there is only one graph that changes at each step — something that could not be achieved in this paper due to the limitations of presenting only text.
In conclusion, we can state that the kinds of translations given by Pietarinen in Peirce (2021a, pp.18), Oostra (2010, pp.28), Roberts (1973, pp.139), and Zeman (1964, pp.41) do indeed hold, but they omit many intermediate steps and are not as inherent to the nature of the *alpha graphs* as they are to TRANSFORMING them into LINEAR NOTATION.

References

Amor, J. A. (2009). „Strong Soundness-Completeness Theorem: A Semantic Approach“. In: *teorema* 28.3, pp. 173–190.
Area9, Lyceum (2025). *Adaptives & personalisiertes Lernen*. https://area9lyceum.de/. Zuletzt abgerufen am 19. November 2025.
Church, Alonzo (1932). „A Set of Postulates for the Foundation of Logic“. In: *Annals of Mathematics* 33.2, pp. 346–366.

– (1940). „A Formulation of the Simple Theory of Types“. In: *The Journal of Symbolic Logic* 5.2, pp. 56–68.
Elkind, L. D. C. and Richard Zach (2023). „The Genealogy of ‘∨’“. In: *The Review of Symbolic Logic* 16.3, pp. 653–678.
Frege, Gottlob (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S.: Louis Nebert.
Gardner, Martin (1958). *Logic Machines and Diagrams*. New York: McGraw-Hill.
Gentzen, Gerhard (1935). „Untersuchungen über das logische Schließen“. In: *Mathematische Zeitschrift* 39.3, pp. 176–210.
Hilbert, David (1902). „Mathematical Problems“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 8, pp. 437–479.
Mendelsohn, Elliott (2015). *Introduction to Mathematical Logic*. 6th ed. Taylor & Francis.
Oostra, Alexander (2010). „Los gráficos alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista“. In: *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 2.
Peirce, Charles S. (1877). „The Fixation of Belief“. In: *Popular Science Monthly* 12, pp. 1–15.
– (1878). „How to Make Our Ideas Clear“. In: *Popular Science Monthly* 12, pp. 286–302.
– (2021a). *Peirceana, Volume 2.1*. Ed. by Ahti-Veikko Pietarinen. Berlin/ Boston: De Gruyter.
– (2021b). *Peirceana, Volume 2.2*. Ed. by Ahti-Veikko Pietarinen. Berlin/ Boston: De Gruyter.
Pietarinen, Ahti-Veikko (2024). „Peirce’s Deductive Logic“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta and Uri Nodelman. Summer 2024 Edition. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
Post, Emil L. (1921). „Introduction to a General Theory of Elementary Propositions“. In: *American Journal of Mathematics* 43.3, pp. 163–185.
Prawitz, Dag (1965). *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Almqvist & Wiksell.
Priest, Graham (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
Roberts, Don D. (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Den Haag: Mouton & Co. N.V.
Roegel, Denis (2002). *A Brief Survey of 20th Century Logical Notations*. Tech. rep. LORIA - Université de Lorraine.
Simons, Peter (2023). „Jan Łukasiewicz“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta and Uri Nodelman. Spring 2023 Edition.
Smullyan, Raymond M. (1968). *First-Order Logic*. Berlin/Heidelberg: Springer.
Zeman, John Jay (1964). *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Chicago: University of Chicago Press.

Appendix A

In the following, we see Roberts (1973, p. 136) comparing various notations to which he refers throughout his work in Roberts (1973). For our purposes, the columns labeled „English“, „Existential Graphs“, and „Principia Notation“ are of particular relevance; in the last of these, we clearly recognize a form of LINEAR NOTATION that this paper aims to achieve.

TABLE OF LOGIC NOTATIONS

English	Entitative Graphs	Existential Graphs	A Peirce Algebra	*Principia* Notation	Polish Notation
P	P	P	P	P	P
Not-P	(P)	(P)	$\bar{P}$	~P	Np
P and Q	(P)(Q)	P Q	PQ	P . Q	Kpq
P or Q	P Q	(P Q)	P Ψ Q	P ∨ Q	Apq
If P then Q	(P) Q	(P (Q))	P ⊰ Q	P ⊃ Q	Cpq

Hereafter, Pietarinen (2024, p. 38) illustrates how to translate the *alpha graphs*. Although he presents several possible ways of reading them, it is evident that he employs braces and other signs of the very kind of LINEAR NOTATION we aim to develop in our work.

Multiple Readings Algorithm

1. If D is an empty space, then it is translated into $\top$.
2. If D is a sentence letter, say A_i, then it is translated into A_i.
3. Suppose the translation of D is α. Then, $[D]$ is translated into $(\neg\alpha)$.
4. Suppose the translation of D_1 is α_1 and the translation of D_2 is α_2.
   a. the translation of D_1D_2 is $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$,
   b. the translation of $[D_1D_2]$ is $(\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2)$,
   c. the translation of $[D_1\,[D_2]]$ is $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$, and
   d. the translation of $[[D_1]\,[D_2]]$ is $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$.

Appendix B

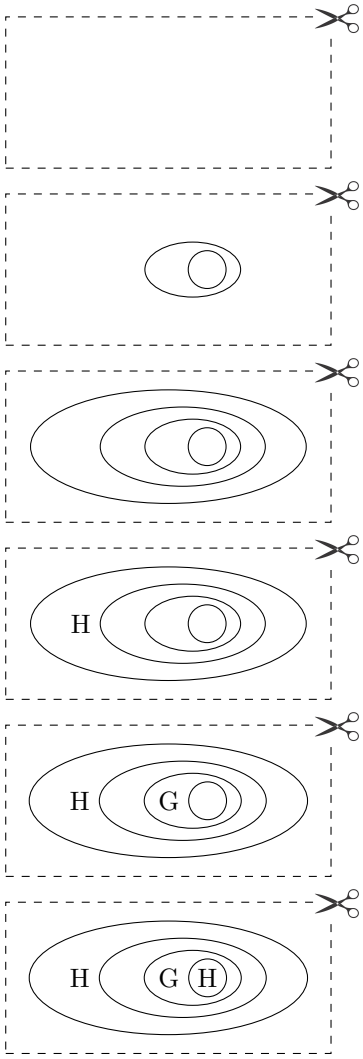
Let us provide a definition of well-formed formulas for our LINEAR NOTATIONS:

1. Lowercase letters denote variables for atoms.
2. Capital letters denote variables that range over formulas.
3. If A is a formula, then $\sim (A)$ is also a formula.
4. If A and B are formulas, then $A\&B$ is a formula.
5. If A and B are formulas, then $A \vee B$ is a formula.
6. If A and B are formulas, then $(A \supset B)$ is a formula.
7. Nothing else counts as a formula.

This definition applies to all $\mathcal{L}$ we introduce, except $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, since both are gained by hiding certain parts of the *alpha graphs* given, as you can see at the beginning of chapter 4. Let us furthermore clarify how braces are used in this context. First, since conjunction and disjunction are both commutative and associative, we do not employ braces for these operations. In contrast, implication possesses neither of these properties and therefore requires the use of braces. Negation likewise requires braces in our definition, as this allows us to preserve the recognizable structure of the *cuts* found in the *alpha graphs* when TRANSFORMED INTO LINEAR NOTATION, since each pair of braces still stands for one *cut*. Moreover, as shown in Figure 19, this use of braces in connection with negation enables us to construct both disjunction and implication in the semantic sense required for LINEAR NOTATION. In this way, we construct a new system of writing in LINEAR NOTATION that retains essential features of the *alpha graphs*, and, as you can see at the end of Chapter 5, this also yields a new system of deduction for LINEAR NOTATION.

Appendix C

Below is the same deduction as shown in Figure 16. Please cut out the graphs along the marked lines ----------✂ in each step. Then staple the sheets together in order, from the first on top to the last at the bottom and you can now use this as a flip-book. By flipping through it, you will see a graph change, which reflects Peirce's view of how thinking works. He believed that deduction should work in much the same way, which is why we demonstrate this idea in a tangible form through a self-constructed flip-book.



Dürer hat doch recht. Zu geometrischen Konstruktionen in den „Vier Büchern von menschlicher Proportion“

Hannes Schmidt

Zusammenfassung

Der Kunsthistoriker Berthold Hinz hat Albrecht Dürers „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ einer gründlichen wissenschaftlichen Bearbeitung unterzogen. Diese bedarf allerdings an einigen wenigen Stellen der Korrektur zugunsten Dürers. Drei geometrische Konstruktionen stehen hier im Fokus: Erstens die proportionale Übertragung der Teilung einer Strecke auf eine andere Strecke mit unterschiedlicher Länge, zweitens die Unterteilung einer gegebenen Strecke in drei Teile a, b, c mit $a/b = b/c$, und drittens die Stauchung oder Streckung eines Würfels in einen Quader mit gleichem Volumen, gegebener Höhe und quadratischer Grundfläche. Letztere Konstruktion wird erstmals entschlüsselt. Auch wenn uns manche Abschnitte 500 Jahre nach Erscheinen des Buches kryptisch vorkommen, erweist sich Dürer nicht nur als kompetenter Mathematiker, sondern auch als sorgfältiger Buchautor.

1 Einleitung

1.1 Dürers Proportionslehre und Berthold Hinz‘ Übertragung

Dürers letztes großes Buchprojekt, die „Vier Bücher von menschlicher Proportion“, erschien 1528 postum. Bis zu seinem Tod im April 1528 hatte der Künstler daran gearbeitet, seine Witwe Agnes gab das vierbändige Werk dann in den Druck bei Hieronymus Formschneider in Nürnberg.

Aus Dürers schriftlichem Nachlass geht hervor, dass er die Publikation seiner Proportionslehre zunächst für 1523 geplant hatte, um dann doch erst ein anderes Buch zu schreiben[1]: 1525 erschien die „Die Unterweisung der Messung“ als das erste Mathematiklehrbuch in deutscher Sprache. Laut Widmungstext der Proportionslehre sollte die Unterweisung deren allgemeines Verständnis erleichtern, indem sie mathematische Grundlagen für die darin vorgestellten Berechnungen enthält.[2] Die Unterweisung geht aber weit darüber hinaus, so dass sie wohl eher als allgemeine mathematische Propädeutik zur Kunst verstanden werden kann – gemäß dem Motto „Erst die Geometrie, dann die Kunst“. Dürer nutzte auch die Zeit bis 1528, um seine Proportionslehre zu überarbeiten und zu ergänzen.

Mit seiner wissenschaftlichen Bearbeitung, Kommentierung und sprachlichen Übertragung der „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ erfüllte der Kunsthistoriker Berthold Hinz 2011 ein Desiderat der Forschung und erleichterte für die Wissenschaft und für interessierte Laien den Zugang zu Dürers kunsttheoretischem Werk erheblich.

Hinz verwies auf den signifikanten Unterschied zu Dürers früheren Bemühungen um die menschliche Figur, die im „Adam und Eva“-Kupferstich von 1504 gipfelten.[3] Dieser beruht auf einem Ansatz, den Hinz „geometrische Methode“ nennt. Grundlage ist nämlich die Auffassung, dass Schönheit idealistisch und a priori aus einfachen geometrischen Grundformen abgeleitet werden könne. Wir möchten diesen Ansatz als den deduktiven bezeichnen, um das „top down“-Prinzip zu betonen.

Nach seiner zweiten Italienreise ging Dürer dann, vermutlich angeregt durch seinen Studienaufenthalt in Bologna, zur „arithmetischen Methode“ über und arbeitete seither mit einem induktiven Ansatz, das heißt, man geht aus von den vielfältigen empirischen Gegebenheiten und versucht sozusagen „bottom up“ zu allgemeinen Aussagen zu kommen. So werden in der Proportionslehre Normmaße des menschlichen Körpers aus großen Mengen empirischer Messungen oder pseudo-empirischen Materials gewonnen.[4]

In der Proportionslehre führt Dürer zwei verschiedene arithmetische Methoden vor – Vorbilder finden sich bei Leonardo da Vinci und Leon Battista Alberti. Um unterschiedliche Körpertypen zu entwickeln, verwendet er in Buch I Bruchteile der gesamten Körperhöhe wie 1/2, 1/3 usw., in Buch II Anzahlen feiner Unterteilungen mit einer Genauigkeit von bis zu 1/1800 der Körperhöhe. Entsprechend der Abkehr von einem Idealbild werden die Proportionsangaben „nicht in einfachen

[1] Vgl. Demele 2023, S. 20f. Christine Demele gilt mein herzlicher Dank für vielfältige Unterstützung. Auch von Christoph Pöppe und Andreas Räthe kamen wertvolle Hinweise.
[2] Hinz 2016, S. 167.
[3] Hinz 2011, S. 333.
[4] Die Einteilung in eine apriorische geometrische Methode und eine empirische arithmetische Methode soll nicht ausschließen, dass man prinzipiell auch apriorisch-arithmetisch bzw. empirisch-geometrisch arbeiten könnte. Die Unterscheidungen apriorisch/empirisch und arithmetisch/geometrisch sind also an sich unabhängig.

natürlichen Zahlen, sondern in differenzierten Bruchteilen dargestellt“[5]. In Buch III erklärt Dürer dann, wie die zuvor entwickelten Figuren variiert und verändert werden können. Damit kommt er der natürlichen Vielfalt nahe. In seinem viel zitierten sogenannten „Ästhetischen Exkurs“ am Ende des dritten Buches legt Dürer seine kunsttheoretischen Überlegungen dazu offen. In Buch IV animiert Dürer seine Figuren gewissermaßen, indem er sich möglichen Biegungen und Bewegungen widmet.

Ungeachtet der arithmetisch-empirischen Methoden enthält die Proportionslehre auch viel Geometrie, um die arithmetisch beschriebenen Figuren stauchen, dehnen, drehen, etc. zu können. Die zugehörigen Konstruktionen wurden von Hinz genau untersucht, allerdings nicht immer hundertprozentig richtig verstanden und wiedergegeben. Die notwendigen Präzisierungen und Berichtigungen sind das Thema dieses Artikels.

In Teil 2 werden drei von Dürers Konstruktionen detailliert behandelt, die Hinz teilweise oder gänzlich missverstanden hat: Erstens die proportionale Übertragung der Teilung einer Strecke auf eine andere Strecke mit unterschiedlicher Länge. Zweitens die Unterteilung einer gegebenen Strecke in drei Teile a, b, c mit $a/b = b/c$. Hinz nennt das wie auch schon Panofsky[6] „stetige Proportion“. Man spricht alternativ auch von b als der mittleren Proportionale oder dem geometrischen Mittel von a und c. Und drittens die Deformation eines Würfels in einen Quader mit quadratischer Grundfläche, unterschiedlicher Höhe, aber gleichem Volumen.

1.2 Geometrisches Konstruieren als Umgang mit kontinuierlichen Größen

Ein zweiter Zugang zum Thema ist nicht kunsthistorisch, sondern mathematisch. Was ist eigentlich der Sinn des Konstruierens mit Zirkel und Lineal? Auch Dürer unterwirft sich dem Prinzip, dass eine valide Herleitung einer geometrischen Größe nicht durch zahlenmäßiges Messen und Rechnen, sondern nur durch Ziehen von Geraden und Kreisen, Betrachtung von Schnittpunkten etc. zu erreichen ist.

Zum einen sind Messungen an tatsächlichen physischen Konstruktionen immer fehlerbehaftet. Sie sind wie alle empirischen Erhebungen Wahrnehmungen unserer schwankenden, unscharfen Alltagswelt und können nicht beliebig genau werden. Zum anderen gibt es aber auch ein innermathematisches Argument.

Hier kommt der grundsätzliche Unterschied zwischen diskreten und kontinuierlichen Größen ins Spiel. Zwischen den Elementen einer diskreten Zahlenmenge

[5] Hinz 2011, S. 276.
[6] Panofsky 1915, S. 117.

besteht immer eine „Lücke“, und sei sie noch so klein, eine kontinuierliche Zahlenmenge hat solche Lücken nicht. So sind die reellen Zahlen kontinuierlich, die natürlichen dagegen diskret.

Symbolisches Rechnen mit reellen Zahlen war zu Dürers Zeit kaum entwickelt. Als Beispiel kann die Diagonale eines Quadrates mit 1cm Seitenlänge dienen – sie ist natürlich $\sqrt{2}$cm lang. Wenn Dürer diese Länge arithmetisch weiterverarbeiten wollte, musste er Näherungen verwenden, zum Beispiel 1,41cm. Andererseits hätte er $\sqrt{2}$cm im Nu geometrisch konstruieren und dann auch weiterverwenden können, und zwar mit absoluter Genauigkeit. Zumindest in einem idealisierten Sinn – tatsächlich spielt natürlich auch die Dicke des Stiftes etc. eine Rolle.

2 Die Konstruktionen im Einzelnen

2.1 Proportionale Übertragung einer Streckenteilung

Die verschiedenen geometrischen Konstruktionen und konstruktiven Hilfsmittel, die Dürer in der Proportionslehre vorstellt und auch direkt praktisch einsetzt, versieht er mit griffigen Bezeichnungen, die oftmals eigene Wortschöpfungen waren - zu einer Zeit, als sich Deutsch als Schriftsprache für wissenschaftliche Literatur noch nicht etabliert hatte.[7]

Beispiele aus Buch III für Dürers innovative Begrifflichkeiten sind etwa der „Verkehrer“, der „Wähler“ und der „Übertrag“, allesamt Werkzeuge für folgendes Problem: Gegeben ist eine Strecke a mit Unterteilungen. Eine weiterhin gegebene Strecke b, die dann parallel zu a zu zeichnen ist, soll so unterteilt werden, dass alle Teile in denselben Verhältnissen zueinander stehen wie die entsprechenden Teile von a.

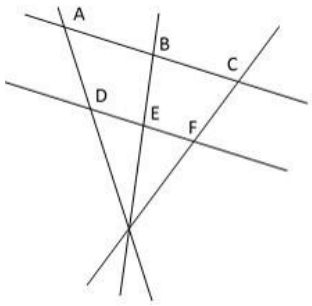


Abbildung 1: Der dritte Strahlensatz: $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{DE}/\overline{EF}$

[7] Dürer leistet damit einen wichtigen Beitrag für die deutsche Sprachbildung. Erwin Panofsky möchte ihn diesbezüglich sogar mit Martin Luther vergleichen (Panofsky 1977, S. 327).

Die dazu notwendige Geometrie beschränkt sich auf den Strahlensatz. Die simple Umsetzung des dritten Strahlensatzes (Abb. 1) ist der Verkehrer (SMS 277.74)[8]. Anwendungsbeispiel: „Durch disen verkerer mag man ein bild das for siben haubt lang ist / acht / neun pyß in zehen haubt lang machen“, also die Streckung oder Stauchung einer menschlichen Figur mit allen Unterteilungen.

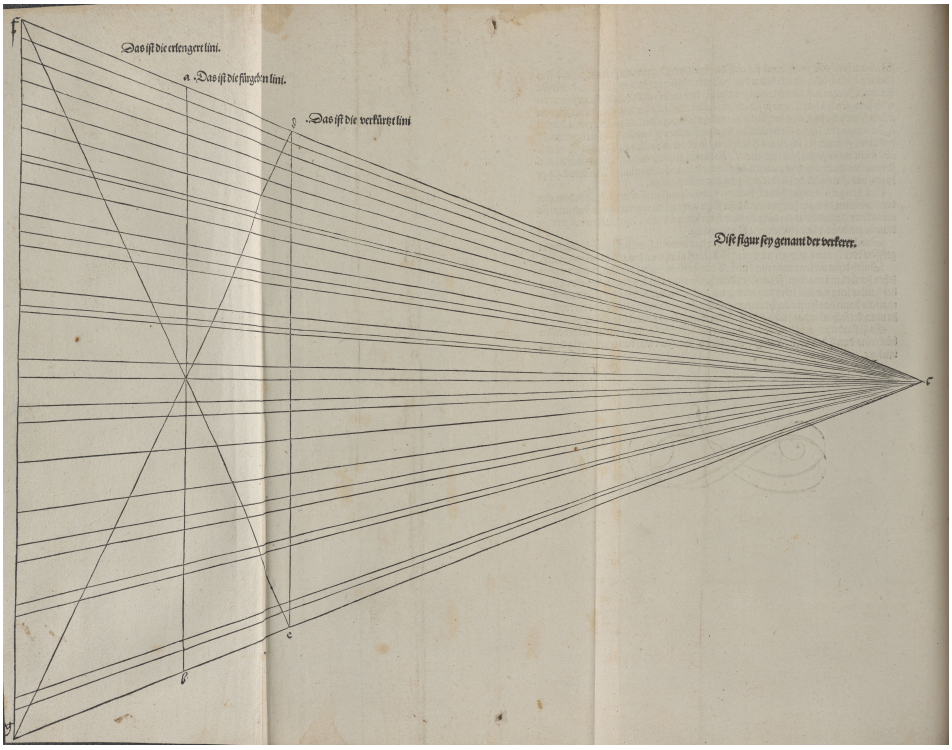


Abbildung 2: Der Verkehrer, SMS 277.74. Die Gerade AB beinhaltet hier die originalen Längen, die Gerade DE die verkürzten und die Gerade FG die verlängerten. Die Geraden EF und DG, die das X bilden, sorgen dafür, dass $\overline{AB}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\overline{DE}^{-1} + \overline{FG}^{-1}\right)$*. Die Notwendigkeit dafür erschließt sich uns aber nicht.*

Die Unterteilungen sind hierbei als rationale Anteile der gesamten Strecke gedacht. Der „Wähler“ dagegen (SMS 277.75) soll dasselbe auch für nichtrationale Anteile leisten: „So macht er vergleichliche teyl gegen einander [...] ob gleych die teyl unnenbarlich sind in der zal die man mesen will / als so man nit sprechen kann

[8] SMS 277.74 ist die Nummer im Werkverzeichnis der Druckgraphik Dürers (Schoch/Mende/Scherbaum 2004). Im Folgenden analog.

das ist ein 2. teyl ein 3. teyl / oder ein 5. teyl ein 6. teyl etc.“

Technisch besteht der Unterschied zum Verkehrer darin, dass nur ein Schenkel fixiert ist (für den anderen schlägt Dürer einen im Scheitelpunkt befestigten Faden vor), und der Winkel α somit frei wählbar. Dass Dürer gegenüber dem Verkehrer solchermaßen erweiterte Einsatzmöglichkeiten des Wählers sieht, ist Hinz entgangen.

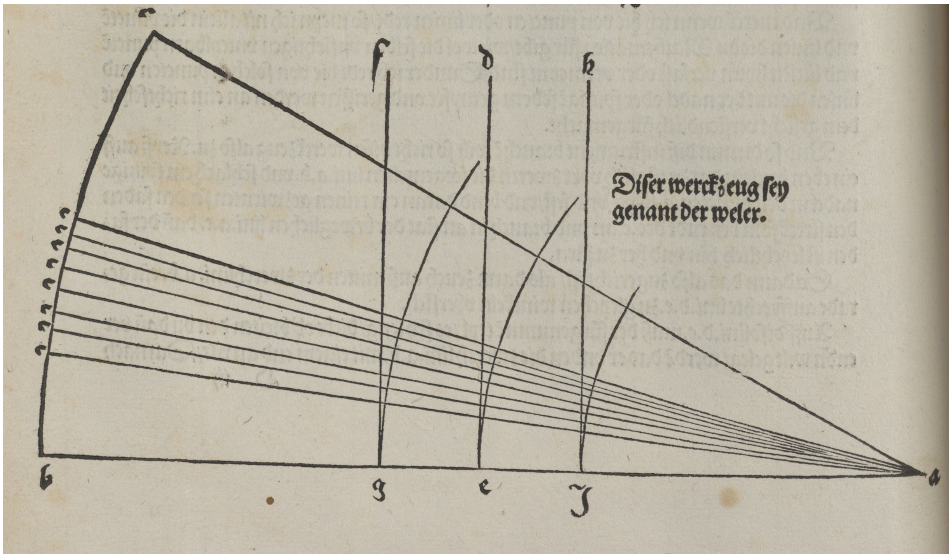


Abbildung 3: Der Wähler, SMS 277.75. Die horizontale Gerade AB ist der fixierte Schenkel, der Punkt C und damit der Winkel bei A ist frei wählbar. Die senkrechte Gerade DE beinhaltet die originalen Längen, die Gerade FG die verlängerten und die Gerade HI die verkürzten.

Der Übertrag (SMS 277.24) ist eine Realisierung des ersten Strahlensatzes. Die Unterteilung der Strecke [12] wird durch die parallelen Diagonalen proportional auf die Strecke [13] übertragen. Alternativ kann man von den Punkten 4/5/6 senkrecht nach unten gehen und dann vom jeweiligen Schnittpunkt mit [23] aus waagrecht nach links. Das kehrt einfach die Reihenfolge der Abschnitte auf [13] um. Hinz nennt das „Spiegelung“ an der Geraden 23, weil er meint, dass [12] und [13] eigentlich gleich lang sein sollten und damit sei Einfallswinkel=Ausfallswinkel=45°. Er ist der Ansicht, dass „die Graphik wegen der ungleichen Länge der Katheten den falschen Eindruck suggeriert, es ginge hier um eine proportionale Veränderung der Maße“, und dass es Dürer nur um die Drehung der unterteilten Strecke um 90 Grad gehe. Tatsächlich ist der Übertrag aber sehr wohl für Dehnungen und Stauchungen tauglich.

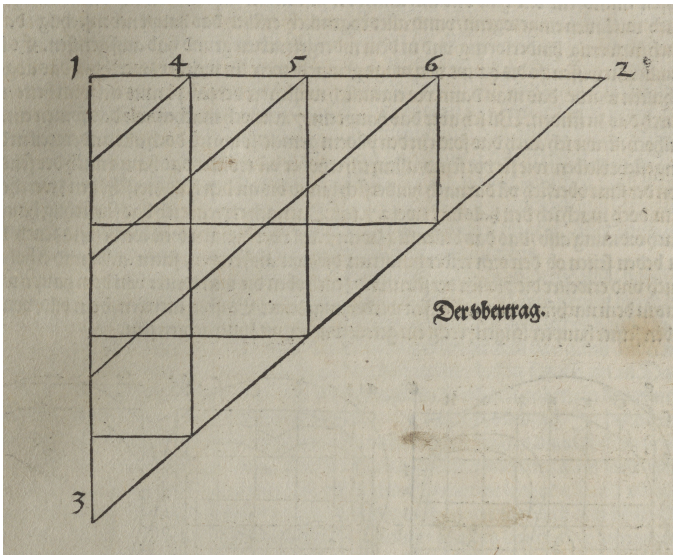


Abbildung 4: Der Übertrag, SMS 277.24

Erst in der Anwendung (SMS 277.25) wird gefordert, dass die Strecken [12] und [13] gleich lang sein sollen, wenn nämlich ein Profil und eine Frontalansicht eines Kopfes um einen Grundriss ergänzt werden sollen. Hier ist die Diagonale 2-3 wirklich um 45 Grad geneigt, und alle Teilstrecken haben dieselbe Länge wie ihr Abbild. Dabei werden die Unterteilungen über die die Reihenfolge umkehrende „Spiegelung“ übertragen.

2.2 Streckenteilung gemäß stetiger Proportion

Dieser Aufgabe stellt sich Dürer in Buch I. Die Konstruktion dreier Strecken a, b, c mit $a/b = b/c$ ist einfach, wenn a und b gegeben sind. Die zugehörige Produktgleichung $b^2 = ac$ taucht nämlich im Höhensatz auf (Abb. 5). Man muss also nur a und b im rechten Winkel zueinander zeichnen. Wenn y die Verbindungsstrecke der beiden freien Endpunkte A und B ist, und z die Orthogonale auf y in B, dann ist c gleich der Entfernung vom Schnittpunkt von a und b bis zum Schnittpunkt von z und der Verlängerung von a.

Dürers Anwendungsfall ist jedoch ein anderer. In einer menschlichen Figur soll a die Länge Halsgrube-Hüftgelenk sein, b die Länge Hüftgelenk-Knie und c vom Knie zum Knöchel (Abb. 6).

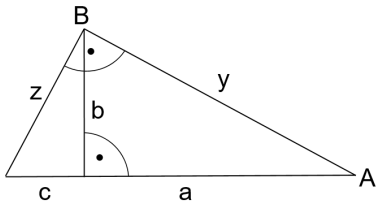


Abbildung 5: Konstruktion von $c = b^2/a$ mithilfe des Höhensatzes

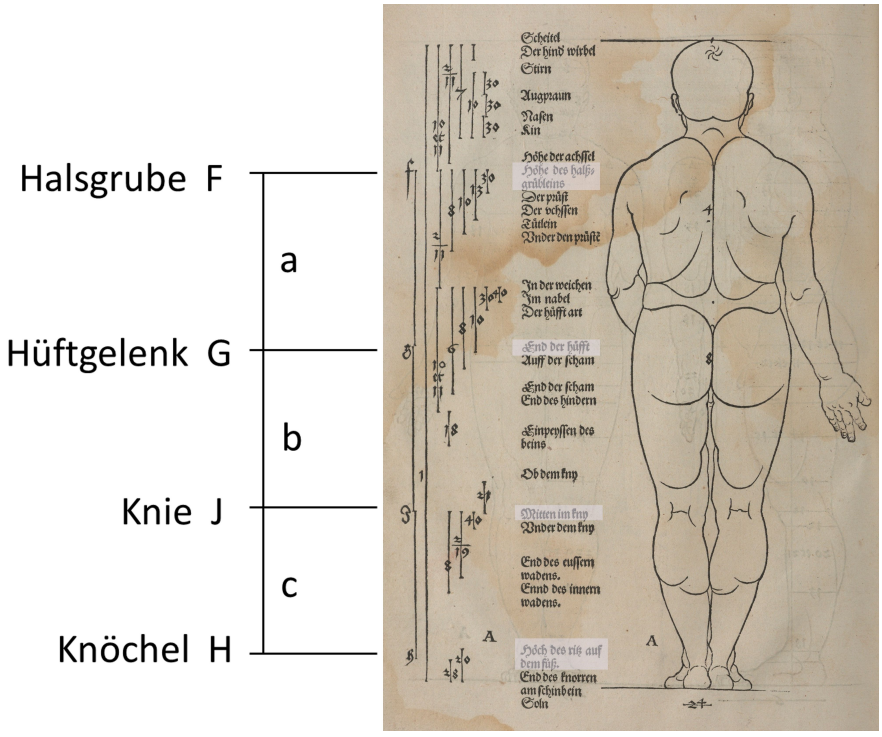


Abbildung 6: Anwendungsfall der stetigen Proportion bei Dürer. Hervorhebungen von mir.

Dabei werden a und die Gesamtlänge $d = a + b + c$ als bekannt angenommen; gesucht ist die Höhe des Knies, also b, bzw. c. Wollte man b mit dem Höhensatz

konstruieren, wären erst Umformungen nötig:

$$b^2 = ac = a(d - a - b)$$
$$b^2 + ab + \frac{a^2}{4} = ad - a^2 + \frac{a^2}{4}$$
$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a\left(d - \frac{3}{4}a\right)$$

Man müsste also a und $d - \frac{3}{4}a$ hintereinander auf einer Geraden auftragen und an der Schnittstelle eine Senkrechte ziehen. Mit dem Thaleskreis erhält man auf dieser Senkrechten die Länge $b + a/2$, und schließlich b (Abb. 7). Dürer beschreibt diese exakte Konstruktion nicht. Ob sie ihm zu kompliziert war oder nicht bekannt, wissen wir nicht.

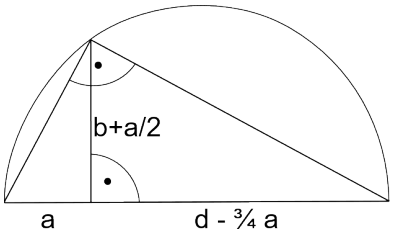


Abbildung 7: Konstruktion von $b + a/2$ mit Thaleskreis und Höhensatz

Als Näherungslösung bietet er stattdessen den „Vergleicher“ (Abb. 8 und Abb. 9) an. Bei einem Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei B wird $[BC]$ in drei gleiche Teile $[CD]$, $[DE]$, $[EB]$ geteilt. Ein Lineal, auf dem $a = \overline{FG}$ und $d = \overline{FH}$ aufgetragen sind, wird so auf die Zeichnung gelegt, dass F irgendwo auf der Strecke $[AC]$ zu liegen kommt, G auf $[AD]$ und H auf $[AB]$. Wenn J der Schnittpunkt des Lineals mit [AE] ist, ist $b = \overline{GJ}$ bzw. $c = \overline{JH}$, sodass $\overline{FG}/\overline{GJ}$ ungefähr gleich $\overline{GJ}/\overline{JH}$ ist.

Der (auch von Dürer wohl gesehene und in Kauf genommene) Fehler ist gering. Verwendet man die Bezeichnung $T = \tan\alpha/\tan\beta$, dann beträgt das Verhältnis V zwischen $\overline{FG}/\overline{GJ}$ und $\overline{GJ}/\overline{JH}$

$$V = \frac{(1-T)(1-2T)}{(1-3T)}$$

(detaillierte Berechnung im Anhang) und die Abweichung zum Sollwert 1 ist $V-1$. Man kann annehmen, dass der Vergleicher für die ungefähren Größenordnungen $\beta = 80°$, also $\tan\beta \approx 5,671$, und $\overline{AB} = \overline{BC}$, also $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ gedacht ist. Mit diesen Werten kommt man auf $T \approx 0,0588$ und damit $V \approx 1,0084$, also eine relative Abweichung von weniger als einem Prozent. Angesichts dieser Genauigkeit und der Komplexität der exakten Konstruktion halten wir Hinz‘ Kommentar „nachweislich falsch konstruiert“ (Hinz 2011, S. 277) für zu streng.

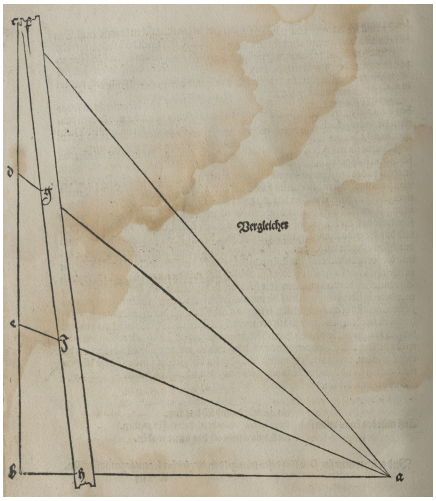


Abbildung 8: Der Vergleicher im Original

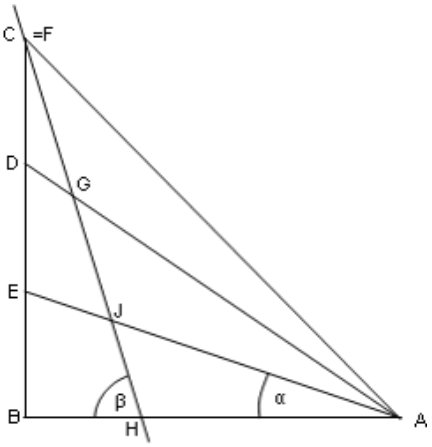


Abbildung 9: Der Vergleicher als Nachzeichnung, mit den Winkeln α und β. Im Allgemeinen wird F nicht auf C zu liegen kommen. Nur für die Übereinstimmung mit dem Dürer-Original und für die Berechnungen im Anhang ist hier $C = F$ gesetzt.

2.3 Streckung/Stauchung eines Würfels

Die Darstellungen SMS 277.80 und 277.81 stehen ziemlich weit vorne in Buch III der Proportionslehre. Sie sollen dazu dienen, die Darstellung eines menschlichen Kopfes entweder höher und schmäler oder niedriger und breiter zu gestalten, ohne das räumliche Volumen zu verändern. Hinz interpretiert sie nachweislich falsch. Er vermutet, dass es Dürer hier nicht um Würfel, sondern um beliebige Quader geht, weil die Köpfe, auf die Dürer verweist, in Buch I in Quader einbeschrieben sind.[9] Folglich verkennt er die Konstruktionsaufgabe, einen Würfel bei gleichem Volumen plattzudrücken oder langzuziehen. Darum geht es Dürer nämlich eigentlich: „Ich nym für dich einen rechten gefierten Würffel allenthalben gleich [...] wie vil er den cubum oder würffel erhöhen, strecken oder nider drucken wöl“.[10]

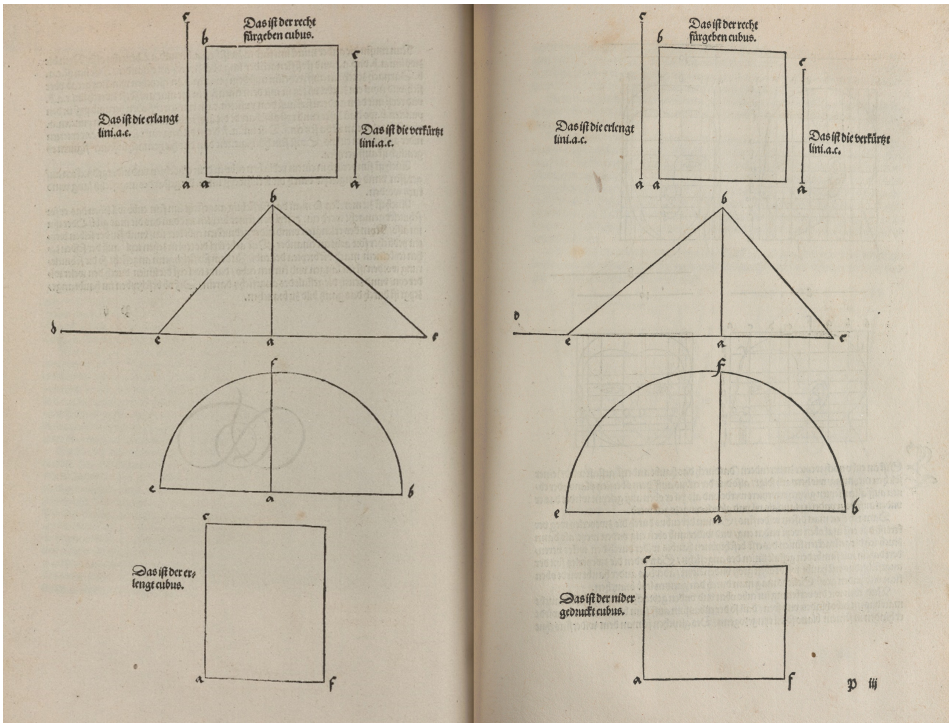


Abbildung 10: Umkonstruktion eines Würfels, SMS 277.80/81

Die angebotenen Konstruktionen erfüllen exakt diesen Zweck. Die gewünschte Höhe $[AC]$ wird als horizontale Strecke gezeichnet, und bei A senkrecht nach oben

[9] Hinz schreibt: „Im Folgenden wird Würfel und Cubus zwar ausdrücklich gleichgesetzt, ist jedoch mit Quader gleichbedeutend.“ (Hinz 2011, S. 179)

[10] Ebd., S. 179

die Seitenlänge $[AB]$ des gegebenen Würfels. Dann wird die Orthogonale auf BC durch Punkt B gezogen. Deren Schnittpunkt mit AC wird E genannt. Wegen des Höhensatzes ist dann $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE}$. Danach werden $[EA]$ und $[AB]$ horizontal hintereinander gezeichnet, mit A als Schnittstelle. Der Thaleskreis über $[EB]$ enthält alle Punkte X, für die der Winkel EXB 90° wird. Wähle X so, dass AX senkrecht auf EB steht, und nenne diesen neuen Punkt F. Nochmalige Anwendung des Höhensatzes liefert $\overline{AF}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AB}$. Wird diese Gleichung mit dem Höhensatz davor multipliziert, ergibt sich $\overline{AF}^2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AE} = \overline{AE} \cdot \overline{AB}^3$, oder $\overline{AF}^2 \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^3$. Damit ist $\overline{AF}$ die gesuchte Seitenlänge des Grundflächen-Quadrates eines gestauchten/gestreckten Würfels. Wir haben schließlich gezeigt, dass dessen Volumen gleich dem Volumen des gegebenen Würfels ist.

Bei Hinz werden diese beiden Konstruktionen als „Umkonstruktion eines Kopfquadrates in ein hochstehendes/liegendes Rechteck mit gleichem Flächeninhalt“ tituliert. Unter dieser Annahme bleibt der zweite Teil des Verfahrens natürlich unverständlich. Entsprechend hält Hinz diesen für „nicht nachvollziehbar“, „unnötig“ und „falsch“. Dieses Urteil wurde hiermit widerlegt.

3 Fazit

Die aufgezeigten Irrtümer können und sollen nicht die Leistung von Berthold Hinz‘ Schriften zu Dürers Proportionslehre schmälern, sondern ihn nur im Detail zugunsten Dürers korrigieren. Abgesehen hiervon gibt es aber auch eine zweite, tiefer liegende Schlussfolgerung: Der kritische Blick zeigt, dass Dürer sehr genau wusste, worüber er in der Proportionslehre schrieb. Auch wenn uns manche Abschnitte 500 Jahre nach Erscheinen kryptisch vorkommen, war Dürer nachweislich nicht nur ein kompetenter Mathematiker, sondern auch ein sorgfältiger Buchautor. Diese Erkenntnis sollte beachtet werden, wenn hoffentlich bald auch sein mathematisches Hauptwerk, „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt“ von 1525, nach Hinz‘ Vorbild wissenschaftlich bearbeitet wird.

Anhang: Berechnung der Abweichung beim „Vergleicher“

Wir beziehen uns auf Abb. 9. Man definiert ein Koordinatensystem mit B als Ursprung, x-Achse in Richtung A und y-Achse in Richtung C. Dann gilt

$$y = -x\tan\beta + \overline{BC} \quad \text{für die Gerade } CH,$$
$$y = -x\,2\tan\alpha + \frac{2}{3}\overline{BC} \quad \text{für die Gerade } AD \text{ und}$$
$$y = -x\tan\alpha + \frac{1}{3}\overline{BC} \quad \text{für die Gerade } AE.$$

Gleichsetzen liefert die x-Koordinaten der Schnittpunkte G, J und H:

$$-G_x\tan\beta + \overline{BC} = -G_x 2\tan\alpha + \frac{2}{3}\overline{BC} \Rightarrow G_x = \overline{BC}/3(\tan\beta - 2\tan\alpha)$$
$$-J_x\ \tan\beta\ +\ \overline{BC}\ =\ -J_x\ \tan\alpha\ +\frac{1}{3}\overline{BC} \Rightarrow J_x = 2\overline{BC}/3(\tan\beta - \tan\alpha)$$
$$-H_x\tan\beta + \overline{BC} = 0 \Rightarrow H_x = \overline{BC}/\tan\beta$$

Weiter ist

$$\frac{G_x}{J_x - G_x} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\beta - 3\tan\alpha}$$
$$\frac{J_x - G_x}{H_x - J_x} = \frac{\tan\beta}{\tan\beta - 2\tan\alpha}$$

Aufgrund des Strahlensatzes (Scheitelpunkt H) entsprechen diese beiden Größen $\overline{FG}/\overline{GJ}$ bzw. $\overline{GJ}/\overline{JH}$. V ist der Quotient aus beiden, und mit $T = \tan\alpha/\tan\beta$ ist

$$V = \frac{(\tan\beta - \tan\alpha)(\tan\beta - 2\tan\alpha)}{\tan\beta(\tan\beta - 3\tan\alpha)} = \frac{(1-T)(1-2T)}{(1-3T)}$$

Literatur

Demele, Christine (2023). *Dürer im Jahr 1523*, Dürer-Vorträge, Nürnberg 2023, Online-Publikation: https://museen.nuernberg.de/fileadmin/mdsn/pdf/Duerer-Haus/Downloads/Duerervortraege/2023/demele-duerer-im-jahr-1523.pdf, (letzter Zugriff: 30.4.2025).

Dürer, Albrecht (1528). *Vier Bücher von menschlicher Proportion (...)*, Nürnberg 1528.

Hinz, Berthold (2011). *Albrecht Dürer. Vier Bücher von menschlicher Proportion (1528). Mit einem Katalog der Holzschnitte herausgegeben, kommentiert und in heutiges Deutsch übertragen*, Altenburg 2011.

Hinz, Berthold (2016). *Albrecht Dürer. Supplement zur "Menschlichen Proportion". Die Dresdner Handschrift (1523). Mit einem Katalog der Handzeichnungen, herausgegeben, kommentiert und in heutiges Deutsch übertragen*, Altenburg 2016.

Panofsky, Erwin (1915). *Dürers Kunsttheorie. Vornehmlich in ihrem Verhältnis zur Kunsttheorie der Italiener*, Berlin 1915.

Panofsky, Erwin (1977). *Das Leben und die Kunst Albrecht Dürers*, München 1977.

Schoch, Rainer, Mende, Matthias und Scherbaum, Anna (2004). *Dürer. Das druckgraphische Werk. Band III., Buchillustrationen*, München 2004.

Mathematikästhetische Urteile von Studierenden – Ergebnisse einer qualitativen Studie

Julia Tschen & Susanne Spies

1 Einleitung

Ausgehend von der Rolle der Schönheit für die mathematische Wissenschaftspraxis, wird immer wieder auch auf die Relevanz für das Lehren und Lernen von Mathematik in Schule und Universität hingewiesen. Neben einem authentischen Zugang zur Mathematik wird mit dem Rückbezug auf Schönheit u.a. Sinnstiftung (vgl Müller-Hill und Spies, 2015), ein sozial-integrativer Zugang (vgl. Sinclair, 2009) und vertiefte Allgemeinbildung (vgl. Spies, 2015) in Verbindung gebracht. Mit besonderem Blick auf die universitäre Mathematiklehre werden darüber hinaus beschrieben, dass mathematikästhetische Erfahrungen einerseits zu vertieftem Verstehen von Mathematik (vgl. Karamehmedović, 2015) und andererseits zu einem authetnischen Bild von Mathematik und einem positiveren Selbstkonzept (vgl. Liljedahl, 2005) führen können. In der mathematischen Wissenschaftspraxis sind dabei Kriterien wie Tragweite, Ökonomie, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit als Dimensionen mathematischer Schönheit bereits etabliert. Doch wie erleben Studierende, die sich noch im Prozess der fachlichen Enkulturation befinden, Schönheit in der Mathematik? Welche Aspekte sprechen sie an, welche Kriterien legen sie an, und inwiefern unterscheiden sich ihre Urteile von denen der mathematischen Fachwelt?

Die vorliegende Studie untersucht diese Fragen anhand einer qualitativen Befragung von 46 Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik im fortgeschrittenen Bachelor- oder Masterstudium. Durch offene Reflexionsfragen werden die Studierenden zunächst allgemein zum Begriff der Schönheit befragt, bevor der Fokus schrittweise auf ästhetische Erfahrungen im schulischen und schließlich im mathematischen Kontext gelenkt wird. Die Analyse der Antworten erfolgt sowohl theoriegeleitet anhand etablierter Kriterien mathematischer Schönheit als auch

materialgeleitet durch induktive Kategorienbildung. Die Ergebnisse zeigen ein differenziertes Bild: Während einige klassische Kriterien auch von Studierenden benannt werden, treten gleichzeitig zusätzliche Dimensionen wie visuelle Ästhetik, Struktur und Ordnung sowie Verständniserfolg und Selbstwirksamkeit deutlich hervor. Dies wirft interessante Fragen über die Entwicklung mathematikästhetischer Urteilsfähigkeit und deren Bedeutung für Lehr-Lern-Prozesse auf.

2 Schönheit – innerhalb und außerhalb der Mathematik

Die Frage nach dem Schönen beschäftigt Menschen seit der Antike und wurde in unterschiedlichen Disziplinen wie der Philosophie, der Psychologie und der Kunstwissenschaft behandelt. In diesem Kapitel wird der Begriff der Schönheit aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet, bevor im Anschluss die Frage gestellt wird, was Schönheit in der Mathematik bedeuten kann.

2.1 Allgemeinästhetische Perspektiven auf Schönheit

Der Begriff der Schönheit ist vielfältig und vielschichtig. Er wird in unterschiedlichen Disziplinen verwendet, wobei sich die Bedeutung je nach Kontext unterscheidet. Während Schönheit in der Alltagssprache häufig mit Harmonie, Ausgewogenheit oder Attraktivität verbunden wird, versteht die Philosophie darunter das Ergebnis eines spezifisch ästhetischen Urteils, das nicht auf Nützlichkeit, sondern auf Wahrnehmung und Empfindung beruht. Die philosophische Ästhetik beschäftigt sich seit der Antike mit der Frage, was das Schöne ausmacht und wie es erkannt oder bewertet werden kann. Platon verstand Schönheit als eine überzeitliche, ideale Qualität, die unabhängig von sinnlich wahrnehmbaren Dingen existiert. Im „Symposion“ beschreibt er einen geistigen Erkenntnisweg, der vom sinnlichen Erleben einzelner schöner Objekte zur Einsicht in die reine Idee des Schönen führt (vgl. Pietzcker, 2024, S. 17).

Eine moderne systematische Darstellung bietet Maria E. Reicher (2005) in ihrer Einführung in die philosophische Ästhetik.Sie vertritt einen sehr weite Definition von „Ästhetik [...] [als] Theorie der ästhetischen Erfahrung, der ästhetischen Gegenstände und der ästhetischen Eigenschaften.“(Reicher, 2005, S. 16) und sieht demnach die Hauptaufgabe der philosophischen Ästhetik in der Aufschlüsselung der ästhetischen Erfahrung, der ästhetischen Gegenstände und der ästhetischen Eigenschaften. Sie betont, dass ästhetische Erfahrungen nicht nur durch Kunstwerke, sondern auch durch alltägliche Gegenstände oder Naturphänomene hervorgerufen werden können (vgl. Reicher, 2005). Dies erweitert den traditionellen Kunstbegriff und richtet die Aufmerksamkeit auf die Vielfalt ästhetischer Erlebnisse.

In der zeitgenössischen Ästhetik hat sich zunehmend die Auffassung durchgesetzt, dass Schönheit nicht allein im Objekt liegt, sondern auch in der Reaktion und Auseinandersetzung des Subjekts. Kunst wird als Erfahrungsraum verstanden, der Deutungsangebote macht, aber keine festen Lesearten vorgibt. Kunst ermöglicht es, bestehende gesellschaftliche und individuelle Praktiken zu hinterfragen und eröffnet ein Feld, in dem Selbstbestimmung, Reflexion und Abweichung von Konvention möglich sind.(Vgl. Bertram, 2014, S. 151f)

Auch die Psychologie liefert zentrale Beiträge zum Verständnis ästhetischer Erfahrung. Sie untersucht, wie Menschen auf Reize reagieren, die als schön wahrgenommen werden und welche kognitiven und emotionalen Prozesse daran beteiligt sind. Die Verarbeitungsflüssigkeitstheorie (Processing Fluency Theory) spielt dabei eine wichtige Rolle. Menschen empfinden Reize dann als schön, wenn sie leicht und mühelos verarbeitet werden können. Diese kognitive Leichtigkeit erzeugt ein positives Gefühl, das auf das Objekt zurück geführt und als ästhetisches Gefallen interpretiert wird. Ein klassisches Beispiel hierfür ist die Symmetrie: Symmetrische Strukturen gelten als leicht erkennbar und stabil; Somit fördern sie ein positives ästhetisches Urteil. In empirischen Studien zeigte sich sogar, dass symmetrische Punktmuster beispielsweise bei der Darstellung einer arithmetischen Gleichung nicht nur als schöner, sondern auch richtiger eingeschätzt wurden, selbst dann, wenn die dargestellten Anzahlen nicht übereinstimmten, die Gleichung also mathematisch falsch war. Das zeigt: Ästhetische Urteile sind nicht nur emotional; sie beeinflussen auch kognitive Bewertungen wie Korrektheit oder Plausibilität. (Vgl. Reber und Topolinski, 2009, S. 22)

Neben der Verarbeitungsflüssigkeitstheorie spielt auch das kognitiv-affektive Modell der ästhetischen Erfahrung von Belke und Leder (2006) eine zentrale Rolle. Es beschreibt ästhetisches Erleben als mehrstufigen Prozess, der mit der Analyse beginnt und sich über Bedeutungskonstruktion bis hin zur Bewertung und ästhetischen Urteilsbildung entwickelt. Entscheidend ist dabei, dass ästhetische Erfahrung nicht nur durch äußere Reize bestimmt wird, sondern stark davon abhängt, ob ein Objekt verstanden, interpretiert oder sinnvoll eingeordnet werden kann. Der damit verbundene Verstehensgewinn wird positiv erlebt und beeinflusst ästhetische Bewertung. Ebenso beeinflussen individuelle Faktoren wie Vorwissen, Interesse oder Expertise die Tiefe und Qualität des ästhetischen Erlebens. (Vgl. Belke und Leder, 2006, S. 7f)

In der kunstwissenschaftlichen Auseinandersetzung wird Schönheit nicht als feststehender Begriff verstanden, sondern als ein historisch und kulturell wandelbares Phänomen, das vielfältige Ausdrucksformen annehmen kann. Die Vorstellung, dass es so etwas wie das Schöne schlechthin gäbe, hat sich einstweilen nicht durchgesetzt. Stattdessen tritt eine Perspektive in den Vordergrund, die Schönheit als eine Kategorie versteht, die im Kontext von Wahrnehmung, Zeitgeist und kulturellem Rahmen entsteht. Die Geschichte der Kunst zeigt, dass sich Vorstellungen von Schönheit immer wieder verschieben: Was in einem Jahrhundert als erhaben

oder harmonisch galt, kann später als überladen oder gar kitschig empfunden werden. So unterscheidet sich etwa das Schönheitsideal des Frühhellenismus deutlich von dem eines heutigen Betrachters. Die Kunstbetrachtung erlaubt dadurch ein „Zeitraffermodell“ der ästhetischen Erfahrung. Sie konfrontiert die Betrachtenden mit fremden Maßstäben und neuen Sichtweisen, was zu einer Erweiterung des ästhetischen Horizonts führen kann. (Vgl. Pietzcker, 2024, S. 30f)

Die philosophischen und psychologischen Perspektiven zeigen somit zwei unterschiedliche, sich ergänzende Zugänge zum Thema Schönheit: Die Philosophie fragt nach dem Wesen des Schönen und seinen normativen Grundlagen, während die Psychologie empirisch untersucht, wie Schönheit subjektiv erlebt und verarbeitet wird. Dabei beruhen ästhetische Urteile nicht nur auf bewussten Überlegungen, sie bestehen aus einem Zusammenspiel kognitiver Leichtigkeit und individuellem Vorverständnis. Schönheit ist laut der Psychologie kein objektives Merkmal, sondern ein erlebter Zustand, der sich im Wechselspiel zwischen Reiz und Rezipient ergibt. Beide Ansätze liefern damit eine wichtige Grundlage für die Betrachtung von Schönheit in der Mathematik.

2.2 Schönheit der Mathematik

Obwohl Mathematik traditionell als exakte und nüchterne Wissenschaft gilt, berichten viele Mathematikerinnen und Mathematiker ebenfalls von tiefgehenden ästhetischen Erfahrungen bei der Lösung von Problemen, beim Verstehen komplexer Zusammenhänge oder bei der Entdeckung eleganter Strukturen.

Aus der Analyse mathematikästhetischen Verhaltens, also den Begründungen, die für ästhetische Werturteile über Mathematisches abgegeben werden, lassen sich vier zentrale Kriterien für mathematische Schönheit herausarbeiten: Tragweite, Ökonomie, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit (vgl. Spies, 2013, Kap. 2) Diese Kriterien treten selten isoliert auf, sondern wirken meist in Kombination und machen damit die Vielschichtigkeit mathematischer Schönheit deutlich.

Das Kriterium der Tragweite bezieht sich auf die innermathematische Relevanz und auf die Anschlussfähigkeit über das Fach hinaus. Als besonders schön werden jene Argumentationen empfunden, die weitreichende Erkenntnisse ermöglichen oder verschiedene Teilbereiche der Mathematik auf unerwartete Weise miteinander verbinden. Die Tragweite umfasst dabei sowohl die Rückbindung an klassische Probleme als auch das Potential zur Lösung zukünftiger Fragestellungen. Auch weitreichende Heuristiken, also Beweisideen, die sich in vielen Kontexten anwenden lassen, tragen zur Schönheit bei. Diese Weite der Anwendbarkeit kann dazu führen, dass ein Beweis im Nachhinein als schöner empfunden wird, selbst wenn sich der Beweis selbst nicht verändert hat.
Die Tragweite ist damit eng mit der mathematischen Praxis verknüpft und wird

häufig als Indiz für die Bedeutsamkeit eines Ergebnisses wahrgenommen; nicht immer aber als ästhetisches Kriterium (vgl. Spies, 2013, S. 33).

Als zweites Kriterium wird die Ökonomie oder auch die relative Einfachheit der Mathematik genannt. Schönheit entsteht demnach durch das Verhältnis von minimalem Aufwand zu maximalem Ergebnis, etwa dann, wenn ein komplexes Problem mit einer unerwartet einfachen Idee gelöst wird. Die Schönheit liegt hier in der Reduktion auf das Wesentliche: Ein komplexes Problem wird durch eine elegante Argumentation auf leicht fassliche Grundgedanken zurückgeführt. Diese Minimalität ist eine häufig genannte Eigenschaft mathematischer Schönheit.

Dabei ist die absolute Kürze nicht entscheidend, sondern die relative Einfachheit im Verhältnis zur Komplexität des Problems. Dieses Spannungsverhältnis zwischen Einfachheit und Tiefe erzeugt ein ästhetisches Empfinden. Die Ökonomie steht oft in Beziehung zur Tragweite: Ein leicht zugänglicher Beweis mit großer Reichweite gilt als besonders gelungen.

Ein weiterer Aspekt mathematischer Schönheit ist die epistemische Transparenz. Sie bezeichnet die Nachvollziehbarkeit und Klarheit der zugrundeliegenden Idee: Ein Beweis erscheint dann schön, wenn seine Idee leicht nachvollziehbar ist und sich das Warum einer Aussage erschließt. Sie erlaubt es, die gedankliche Struktur eines Beweises als Ganzes zu erfassen, idealerweise auf einen Blick. Dieses Verständnis geht über die formale Korrektheit hinaus. Es ermöglicht ein tiefes, sinnstiftendes Verstehen. Dies wird häufig auch als plötzlich eintretend als Aha!-Erlebnis oder Erleuchtung beschrieben.

Ästhetische Urteile in der Mathematik sind nicht nur rational, sondern auch emotional geprägt. Überraschung, Freude, Bewunderung oder Ergriffenheit begleiten oft die Begegnung mit einem als schön empfundenen Beweis. Besonders eindrucksvolle Beweise können in der Rezeption ein Gefühl der Bewegtheit oder Bewunderung auslösen, ähnlich wie beim Erleben eines Kunstwerks oder eines Musikstücks. Die emotionale Wirksamkeit eines Beweises hängt dabei oft eng mit den anderen Kriterien zusammen: Ein Beweis, der ökonomisch ist, weitreichend wirkt und sich leicht erschließen lässt, hat meist auch eine starke emotionale Wirkung. Dieses Erleben macht deutlich, dass Mathematik nicht nur ein kognitives, sondern auch ein ästhetisch-emotionales Feld sein kann.

Die genannten Kriterien verdeutlichen, dass mathematische Schönheit ein vielschichtiges Phänomen ist, das sowohl kognitive als auch emotionale Dimensionen umfasst. Kriterien wie Tragweite oder Ökonomie sind dabei eher objektimmanent und rational erfassbar, während epistemische Transparenz und insbesondere die emotionale Wirksamkeit das subjektive Erleben charakterisieren. Sie treten selten alleine auf, sondern entfalten ihre Wirkung meist im Zusammenspiel. Damit wird eine Trennung in objektive und subjektive bzw. projektive Zugänge zu mathematischer Schönheit, wie Marmur und Koichu (2016) sie darstellen, nicht

gerechtfertigt. Auch eine ausschließliche Betrachtung der in epistemischer Transparenz zusammengefassten Aspekte, was dazu führen kann, dass mathematische Schönheit mehr als epistemisches denn als ästhetisches Kriterium beschrieben wird (vgl. Rota, 1997), greift zu kurz. Die hier beschriebenen Kriterienkomplexe in ihrem Zusammenspiel greifen somit eher die oben beschriebenen Charakteristika allgemeiner ästhetischer Erfahrungen auf. Im Rahmen dieser Arbeit dienen sie somit als Orientierungsrahmen, um die Äußerungen der befragten Studierenden zur Schönheit in der Mathematik differenziert analysieren zu können.

3 Methodik und Forschungsdesign

Um der Frage nachzugehen, inwiefern sich mathematikästhetische Urteile von Studierenden von denen der mathematischen Wissenschaftspraxis unterscheiden, wurde die im folgenden beschriebene Studie unter fortgeschrittenen Studierenden durchgeführt.

3.1 Datenerhebung

Die empirische Grundlage bildet eine schriftliche Befragung von 46 Mathematikstudierenden, die anhand eines Fragebogens mit drei offenen Fragen zu ihrem Verständnis von Schönheit sowie zu eigenen ästhetischen Erfahrungen im Bildungs- und Mathematikkontext Stellung genommen haben. Die Teilnehmenden befanden sich entweder im fortgeschrittenen Bachelorstudium oder waren bereits im Masterstudium.

Die Teilnehmenden stammen aus drei verschiedenen universitären Mathematikveranstaltungen für das gymnasiale Lehramt. Informationen zu Alter, Geschlecht oder Studienstand wurden nicht erhoben. Aufgrund der unterschiedlichen Gruppengröße werden die Kurse nicht getrennt analysiert, sondern als eine Gesamtstichprobe betrachtet. Jeder Fragebogen enthält die Antworten einer einzelnen Person, die mit einem numerischen Kürzel („Stud. 1“ bis „Stud. 46“)[1] versehen wurde. Der Fragebogen gliedert sich in drei offene Fragen, die in ihrer Reihenfolge vom Allgemeinen zum Spezifischen führen:

1. Was ist Schönheit? Versuchen Sie eine persönliche „Definition“ zu finden.
2. Begegnet Ihnen Schönheit auch im Schulkontext, in einem Fach / Unterricht? Inwiefern und warum fanden Sie die „Sache“ schön?

[1] Da keine weiteren Angaben zu den befragten Personen vorliegen, wird die geschlechtsneutrale Abkürzung Stud. für Student*innen verwendet.

3. Hat auch Mathematik für Sie schöne Seiten? Wenn ja: Wann / Bei welchem Thema haben Sie Mathematik als „schön“ erlebt? Versuchen Sie für sich zu klären, warum Sie damals das Empfinden von Schönheit hatten.

Damit wurden die von Goy (2013) ursprünglich als Einstieg in eine Unterrichtssequenz zur mathematischen Ästhetik vorgeschlagenen offenen Reflexionsfragen zur Grundlage eines schriftlichen Interviews. Die schriftliche Form der Befragung fördert eine introspektive Reflexion und ermöglicht es den Teilnehmenden, ihre Gedanken frei und ohne Beeinflussung durch einen Interviewer zu formulieren. Diese Offenheit des Formats ist besonders geeignet, um subjektive ästhetische Erfahrungen im Rahmen der qualitativen Analyse zu erfassen. Erste positive Erfahrungen mit der Verwendung der Fragen in Form eines schriftlichen Kurzinterviews konnten im Vorfeld bereits im schulischen Mathematikunterricht gesammelt werden (vgl. Allmendinger und Spies, 2015).

Durch die Engführung von ästhetischen Erfahrungen im Allgemeinen hin zur Schönheit der Mathematik wird dabei schrittweise auf ästhetische Erfahrungen mit der Mathematik hingelenkt und gleichzeitig vermieden, dass durch zu konkrete Beispiele die Antworten durch fehlende mathematische Kenntnisse beeinflusst werden. Damit unterscheidet sich dieses Vorgehen von Ansätzen, bei denen die Gegenstände vorgegeben und dann ästhetisch bewertet werden sollen (vgl. z.B. Sa et al., 2024a). Der Fokus kann dann natürlich auch nicht auf konkreten Beispielen schöner Mathematik, sondern allenfalls auf Klassen von Gegenständen und den angeführten Kriterien liegen.

Da die mathematikästhetischen Urteile hier von besonderem Interesse sind, liegt der Fokus der Auswertung auf den Antworten zu Frage 3.

3.2 Datenanalyse

Als methodisches Verfahren wurde die qualitative Inhaltsanalyse nach Philipp Mayring (2010) gewählt. Diese erlaubt eine systematische und theoriegeleitete Auswertung offener Textmaterialien, wie sie durch die eingesetzten Fragebögen mit offenen Fragen entstanden sind. Charakteristisch für die qualitative Inhaltsanalyse ist, dass die Analyse nicht frei interpretativ, sondern regelgeleitet und nachvollziehbar erfolgt. Ziel ist es, aus dem Material relevante Kategorien zu entwickeln, beziehungsweise vorhandene theoretische Kategorien deduktiv anzuwenden. Ergänzend wird offen mit der induktiven Kategorienbildung vorgegangen, um neue, aus dem Material selbst hervorgehende Aspekte berücksichtigen zu können. (Vgl Mayring, 2010, S. 602ff)

Die Analyse erfolgt in zwei Schritten:

1. Ein deduktiver Durchgang, bei dem alle Aussagen auf Anzeichen für die vier Kriterien mathematischer Schönheit hin überprüft werden.

2. Eine induktive Kategorienbildung, bei der über das Theorieraster hinausgehende Aspekte aus dem Material entwickelt werden.

Erster Durchgang (theoriegeleitet anhand der Kriterien aus 2.2)

Im ersten Analyseschritt werden alle Antworten auf die dritte Frage des Fragebogens daraufhin untersucht, ob sie sich inhaltlich einem oder mehreren der vier oben beschriebenen Kriterien Tragweite, Ökonomie, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit zuordnen lassen.

Dazu kommt ein Kodierleitfanden zum Einsatz, in dem typische Formulierungen, inhaltliche Merkmale und Beispiele für jede Kategorie definiert sind.[2] Dabei werden die Antworten nicht nur auf die exakte Verwendung der Begriffe hin untersucht, sondern auf inhaltliche Anzeichen, die den Kriterien zugeordnet werden können.

Erweiterte Kodierung (induktiv, materialgeleitet)

Im zweiten Analyseschritt wird das Kategoriensystem offen und induktiv erweitert, um zusätzliche Aspekte der Schönheitserfahrungen zu erfassen, die nicht durch das ursprüngliche Raster abgedeckt werden. Dabei werden alle Aussagen erneut gelesen und bedeutungstragende Textstellen mit inhaltlich passenden Codes versehen. Im Zuge dieses offenen Kodierens entstehen neue Kategorien, die auf konkrete Aussagen der Befragten zurückgehen.

Die Kategorisierung erfolgt entlang der Regeln für induktive Kategorienbildung nach Mayring: Die Kategorien müssen inhaltlich klar definiert, trennscharf voneinander abgegrenzt und im Material belegbar sein (vgl. Mayring, 2010, S. 603ff). Nach einem ersten Kodierungsdurchgang wird das Kategoriensystem überprüft, überarbeitet und bei Bedarf ergänzt oder zusammengefasst.

4 Ergebnisse der Analyse zur dritten Frage

Die dritte Frage nach den schönen Seiten der Mathematik, möglichen Themen und Gründen für das Schönheitsurteil stellt den zentralen Untersuchungsgegenstand der Arbeit dar und bildet den Schwerpunkt der Auswertung. Dabei konnte auf Antworten aller 46 Teilnehmenden zurückgegriffen werden.

[2] Im Folgenden wird die Kodierung aus Platzgründen nur an Einzelbeispielen verdeutlicht. Ein vollständiger Kodierleitfaden findet sich in (Tschen, 2025, Anhang).

4.1 Übereinstimmung mit der Wissenschaftspraxis

Tragweite

In der qualitativen Inhaltsanalyse der dritten Frage zeigt sich, dass lediglich eine Nennung eindeutig dem Kriterium der Tragweite zugeordnet werden konnte. In der entsprechenden Aussage von Stud. 42 heißt es:

> „[...], weil sie mir das Gefühl geben, etwas mehr vom „Großen und Ganzen“ zu verstehen...“

Diese Formulierung verweist auf ein ästhetisches Erleben, das über das konkrete mathematische Problem hinausgeht. Das Schöne liegt hier nicht im Detail, sondern in der Verbindung von Einzelaspekten zu einem sinnstiftenden Ganzen – ein klassisches Merkmal ästhetischer Tragweite.

Einzelne weitere Aussagen berühren diese Dimension zwar ansatzweise, allerdings erfolgt in diesen Fällen keine eindeutige Benennung der Bedeutsamkeit als Quelle ästhetischen Erlebens. Um eine trennscharfe Kategorisierung zu gewährleisten, wurden derartige Aussagen stattdessen Kategorien wie epistemischer Transparenz zugeordnet. Die Kategorie Tragweite bleibt somit konzeptionell klar umrissen, kommt in den vorliegenden Antworten jedoch nur selten vor.

Ökonomie

Insgesamt werden sieben Aussagen der Kategorie Ökonomie zugeordnet. Diese Aussagen beschreiben mathematische Schönheit meist in Abgrenzung zu unnötiger Länge oder Komplexität. Besonders deutlich wird dies in der Aussage von Stud. 8:

> „Ein eleganter Beweis ist schön während 3-Seiten Rechnungen, bzw. unnötig lange Formeln, die nerven und zu Fehlern verleiten, echt hässlich sind.“

Diese Äußerung bringt die ästhetische Wertschätzung von Kürze zum Ausdruck ebenso wie eine emotionale Ablehnung unnötig komplizierter oder überlanger Verfahren. Die Schönheit liegt hier explizit in der Reduktion auf das Wesentliche, ganz im Sinne der ökonomischen Eleganz. Auch andere Aussagen betonen die Schönheit mathematischer Strukturen, wenn sie klar, einfach oder auf das Wesentliche reduziert sind. Stud. 19 formuliert etwa:

> „Wenn man einen sehr langen Term so weit zusammenfassen kann, dass nur noch ein kurzer, einfacher Ausdruck übrig bleibt [...] ist für mich schön.“

Neben der inhaltlichen Reduktion spielt hier auch der ästhetische Eindruck der Vereinfachung eine Rolle.

Einzelne weitere Aussagen berühren die Kategorie Ökonomie, ohne ihr jedoch eindeutig zugeordnet werden zu können. So beschreibt Stud. 41 schöne Formeln oder Beweise „[. . .], wenn sie gut lösbar sind“. Auch wenn darin ein Hinweis auf Ökonomie liegen könnte, bleibt unklar, ob die Schönheit aus der Kürze oder aus der Lösbarkeit resultiert.

Insgesamt zeigt sich die Kategorie Ökonomie als eine klar erkennbare ästhetische Dimension, die von den Befragten vergleichsweise häufig benannt wird. Die Vorstellung von Schönheit durch Einfachheit, Eleganz oder Reduktion scheint vielen Personen intuitiv zugänglich zu sein. Besonders auffällig ist dabei die Abgrenzung zur Überfrachtung mathematischer Darstellungen – das Schöne liegt in der Klarheit, nicht in der Komplexität.

Epistemische Transparenz

Diese Form von Schönheit ist in der Analyse der offenen Frage deutlich vertreten. Insgesamt lassen sich acht Aussagen eindeutig dieser Kategorie zuordnen. So beschreibt etwa Stud. 22:

> „Zudem wenn mir ‚ein Licht aufgegangen ist‘. Dann habe auch [ich] eine einfache Rechnung ohne weitere Darstellung als schön empfunden.“

Hier wird deutlich, dass das Objekt des Schönheitsurteils nicht im mathematischen Inhalt selbst, sondern im Moment des Erkennens und Verstehens liegt.

Besonders stark verdichtet sich diese Form von Schönheit in der Aussage von Stud. 19:

> „Wenn am Ende einer Rechnung / eines Beweis auf einmal alles Sinn macht → ist für mich irgendwie harmonisch und in diesem Sinne schön“

Diese Aussage bringt die Verknüpfung von logischer Kohärenz und ästhetischem Empfinden deutlich zum Ausdruck. Die Schönheit entsteht in dem Moment, in dem ein zuvor vielleicht undurchsichtiges oder fragmentiertes mathematisches Problem sich schlussendlich als konsistentes Ganzes offenbart.

In einigen Fällen lassen sich die Aussagen nur mit gewisser Zurückhaltung dieser Kategorie zuordnen, da sie auch Elemente von Selbstwirksamkeit oder emotionale Reaktionen enthalten. Um die Differenzierung aufrechtzuerhalten, wurden solche Aussagen in erster Linie der Kategorie epistemische Transparenz zugeordnet, wenn das Verstehen an sich im Mittelpunkt stand – nicht das individuelle Können.

Aus den Ergebnissen ergibt sich, dass die Kategorie der epistemischen Transparenz offenbar für Studierende eng mit ästhetischen Erlebnissen mit Mathematik

zusammenhängt. Die Befragten beschreiben sie häufig mit großer Klarheit und Emotionalität, wobei deutlich wird, dass Schönheit nicht allein im Objekt liegt, sondern im Moment des Durchdringens eines mathematischen Zusammenhangs.

Emotionale Wirksamkeit

Insgesamt können sieben Aussagen dieser Kategorie eindeutig zugeordnet werden. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass das Erleben mathematischer Schönheit explizit mit einem emotionalen Zustand verbunden wird. Ein typisches Beispiel liefert Stud. 29:

> „Kantenmodelle und Origamis fand ich während der Schulzeit sehr schön. Da habe ich gemerkt, Mathematik ist schön und macht Spaß."

Hier steht nicht die mathematische Struktur oder das Verständnis im Vordergrund, sondern das emotionale Erleben im Umgang mit einem ästhetischen Objekt. Die Schönheit zeigt sich im Gefallen am Tun, unabhängig von der Schwierigkeit oder kognitiven Durchdringung der Inhalte.

Auch Stud. 40 betont die persönliche Gefühlslage:

> „Manche Themen wie geometrische Formen oder das Falten von Papier im Mathematikunterricht habe ich als schön empfunden. Warum: weil es mir gefällt / ich es gerne mache / gemacht habe"

Die Schönheitserfahrung wird hier vollständig aus dem subjektiven Wohlgefallen heraus beschrieben, ein klassischer Fall emotionaler Wirksamkeit, der unabhängig von der formalen Struktur oder epistemischen Tiefe existiert.

Einige Aussagen beschreiben die emotionale Reaktion auf Erkenntnis- oder Vereinfachungsmomente. In solchen Fällen ergibt sich ein Grenzbereich zu anderen Kategorien, insbesondere zu Verständniserfolg oder epistemischer Transparenz. Da das Zitat jedoch explizit die Zufriedenheit betont und das Gefühl als zentrales Element benennt, wird es auch der emotionalen Wirksamkeit zugeordnet.

Die Analyse macht deutlich, dass die Kategorie emotionale Wirksamkeit eine bedeutende Rolle im Schönheitserleben der Befragten spielt. Besonders im schulischen Kontext werden ästhetische Erfahrungen oft über das Gefallen am mathematischen Tun, die Freude an bestimmten Inhalten oder das positive Gefühl bei bestimmten Aktivitäten (z.B. Origami, Zeichnungen, Modelle) beschrieben.

4.2 Weitere Kategorien ästhetischer Erfahrung

Neben den vier theoretisch fundierten Kategorien zeigt die inhaltsanalytische Auswertung, dass von den Studierenden weitere Aspekte mathematischer Schönheit genannt werden, die keiner der vorhandenen Kategorien zugeordnet werden können. Im Rahmen des zweiten Analyseschritts wurden daher drei zusätzliche Kategorien induktiv aus dem Antwortmaterial entwickelt: *Visuelle Ästhetik*, *Struktur und Ordnung* sowie *Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit*. Im Folgenden werden diese weiteren Kategorien einzeln vorgestellt und anhand typischer Aussagen erläutert.

Visuelle Ästhetik

Die Kategorie Visuelle Ästhetik beschreibt mathematische Schönheit, die sich aus sichtbaren, geometrischen oder grafischen Eigenschaften ergibt. Sie umfasst insbesondere Aussagen in denen Symmetrien, Figuren, Formen, Zeichnungen, Modelle oder andere visuell erfahrbare Elemente als schön beschrieben werden. Schönheit liegt hier nicht im intellektuellen Durchdringen oder der Bedeutsamkeit des Inhalts, sondern im unmittelbaren ästhetischen Eindruck der Form.

Mit 23 eindeutig zugeordneten Aussagen stellt diese Kategorie die am häufigsten vertretene unter den induktiv entwickelten Kategorien dar. Viele Befragte verweisen auf die Geometrie, Graphen, Diagramme oder auch Origami als Quellen mathematischer Schönheit. So heißt es beispielsweise bei Stud. 36:

> „Im mathematischen Kontext begegne ich Schönheit im Bereich der Geometrie. Eine Zeichnung mit ordentlichen und evtl. bunten Beschriftungen, sowie Beweise die durch eine Zeichnung verdeutlicht werden können."

Auch Stud. 25 nennt explizit die Schönheit von Symmetrien:

> „Vor allem in Symmetrien ist Schönheit wiederzufinden, sei es in der Geometrie oder bei Funktionen wie Sinus/Cosinus oder einer Parabel."

In diesen und zahlreichen ähnlichen Aussagen liegt die Schönheitserfahrung klar in der optischen oder grafischen Struktur mathematischer Objekte begründet. Sie ist nicht notwendig an Erkenntnis oder Anwendung gebunden, sondern folgt einem ästhetischen Empfinden für Ordnung, Form und Visualität.

Grenzfälle treten in Aussagen auf, in denen visuelle Elemente nicht für sich genommen, sondern als Verständnishilfe oder emotionale Auslöser beschrieben werden. In solchen Fällen erfolgt die Zuordnung zu Visuelle Ästhetik nur dann, wenn die Schönheit aus der äußeren Form an sich abgeleitet wird und nicht ausschließlich aus dem kognitiven oder affektiven Effekt, den sie erzeugt.

Die Befunde zeigen, dass visuelle Zugänge zur Mathematik für viele Personen eine wichtige Rolle spielen, wenn es darum geht, Schönheit im Fach zu erleben. Die Kategorie Visuelle Ästhetik bildet somit eine bedeutsame Erweiterung der vier klassischen Kriterien, insbesondere im Hinblick auf anschlussfähige didaktische Perspektiven (z.B. im Geometrieunterricht oder beim Einsatz von Darstellungen).

Struktur und Ordnung

Unter die Kategorie Struktur und Ordnung fallen Aussagen, in denen mathematische Schönheit über logische, systematische oder nachvollziehbare Strukturen beschrieben wird. Schön erscheint hier nicht als ein einzelnes Ergebnis oder eine visuelle Eigenschaft, stattdessen geht es um die Art und Weise, wie mathematische Inhalte aufgebaut, verknüpft oder schrittweise entwickelt werden. Das Erleben von Ordnung, Regelhaftigkeit oder Stringenz steht im Zentrum dieser ästhetischen Wahrnehmung.

Insgesamt lassen sich 14 Aussagen dieser Kategorie zuordnen. Besonders häufig zeigen sich Verweise auf klar gegliederte Rechenwege, logische Abfolgen und das systematische Zusammenspiel mathematischer Regeln. So beschreibt Stud. 33:

> „Aufgaben nach einem bestimmten, vorgegeben Muster zu lösen“

Die Schönheit liegt hier nicht im Ergebnis, sie liegt im geordneten Verfahren, das als zuverlässig, nachvollziehbar und damit ästhetisch empfunden wird. Ähnliche Aussagen finden sich bei mehreren Teilnehmenden, etwa bei Stud. 14, welcher schreibt, dass die Struktur von Zahlen und Regeln den eigenen Ordnungssinn anspreche. Bei Stud. 46 wird Mathematik metaphorisch mit einem Gebäude verglichen:

> „Mathematik ist ein Konstrukt, das aufeinander aufbaut – quasi ein Gebäude. Entfernt man eine „Säule“ bricht es zusammen.“

Diese Aussage zeigt besonders deutlich das ästhetische Empfinden für systematische Abhängigkeiten und logische Kohärenz, die in ihrer Stabilität und inneren Logik als schön erlebt werden.

Abzugrenzen ist diese Kategorie von Ökonomie und epistemischer Transparenz: Während es bei der Ökonomie um Reduktion und relative Einfachheit geht und bei der Transparenz um den Moment des Verstehens, liegt der Fokus hier auf der statischen Struktur, dem geordneten Aufbau unabhängig vom individuelle Erkenntnismoment.

In einigen Fällen überschneiden sich die Dimensionen. So beschreibt Stud. 11 das Lösen einer Aufgabe, nachdem die Person sich zunächst verrannt hatte. Der ästhetische Moment liegt jedoch nicht nur im Erfolg, sondern auch darin, dass sich

die Mathematik als kohärentes System offenbart. In solchen Fällen wurde die Aussage, sofern die Systematik im Vordergrund stand, der Kategorie Struktur und Ordnung zugeordnet, auch wenn zusätzlich eine emotionale oder kognitive Komponente mitschwingt.

In der Analyse zeigt sich, dass Struktur und Ordnung eine weit verbreitete Form mathematischer Ästhetik darstellt. Viele Befragte empfinden mathematische Klarheit, Logik und nachvollziehbare Regelmäßigkeit als beruhigend, überzeugend oder ästhetisch ansprechend. Die Kategorie verdeutlicht damit, wie stark das Erleben von Schönheit in der Mathematik mit der Wertschätzung von Ordnung, Konsistenz und logischem Aufbau verbunden wird.

Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit

Die Kategorie Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit beschreibt Schönheitserfahrungen, die aus dem eigenen Tun, dem Lösen von Aufgaben oder dem Verstehen mathematischer Zusammenhänge hervorgehen. Im Zentrum steht das Erleben von Kompetenz und Kontrolle über mathematische Inhalte, also das Gefühl: Ich habe das geschafft.

Diese Form der ästhetischen Wahrnehmung wird vergleichsweise häufig genannt, insgesamt 16-mal. Zahlreiche Studierende berichten davon, dass sie Mathematik dann als schön empfanden, wenn sie selbst etwas bewältigt, verstanden oder richtig gerechnet hatten. Typisch ist die Aussage von Stud. 31:

> „Je schwieriger ich die Aufgabe empfunden habe, umso schöner war es, wenn ich richtig gerechnet hatte."

Das Schönheitserlebnis ist hier unmittelbar mit dem eigenen Lernerfolg verknüpft, eine klassische Form der Selbstwirksamkeit. Stud. 1 beschreibt ebenso:

> „Das Bearbeiten einer Aufgabe und nach einiger Anstrengung eine Lösung zu finden, empfand ich als schön."

Hier wird deutlich: Schönheit entsteht nicht nur im Moment der Lösung, sondern auch durch die überwundene Anstrengung auf dem Weg dorthin.

In mehreren Fällen wird das Schönheitserleben durch eine Verbindung von Verstehen und Anwendbarkeit bestimmt.

Diese Aussagen verbinden den Lernerfolg mit Handlungsfähigkeit, ein zentrales Element von Selbstwirksamkeit und macht deutlich, wie stark ästhetisches Empfinden an das Gefühl von Kompetenz gekoppelt ist.

Abzugrenzen ist diese Kategorie von epistemischer Transparenz, bei der der Moment des Verstehens selbst im Vordergrund steht, dabei ist es unerheblich, ob er aktiv erarbeitet oder rezeptiv erfolgt. Auch zur emotionalen Wirksamkeit bestehen

Überschneidungen: Zwar berichten viele Studierende auch von positiven Gefühlen, doch in der vorliegenden Kategorie steht das Erfolgserlebnis als Auslöser und Gegenstand, auf den die Emotion gerichtet ist im Zentrum, nicht der mathematische Gegenstand als Refernzobjekt.

Die Auswertung macht deutlich, dass für viele Studierende mathematische Schönheit dann erlebbar wird, wenn sie selbst aktiv an der Lösung beteiligt sind. Die Kategorie Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit unterstreicht damit die pädagogische Bedeutung handlungsorientierter Zugänge zur Mathematik, bei denen Lernende aktiv Gestaltende des Erkenntnisprozesses sind.

4.3 Zusammenhänge und Muster in den Antworten

Die Auswertung der Aussagen zeigt, dass mathematische Schönheit von den befragten Personen auf vielfältige und teils eher persönliche Weise erlebt wird. Dabei lassen sich wohl klare Tendenzen innerhalb einzelner Kategorien als auch Überschneidungen zwischen verschieden ästhetischen Dimensionen erkennen.

Besonders auffällig ist, dass in vielen Aussagen mehrere ästhetische Aspekte gleichzeitig mitschwingen. So werden zum Beispiel visuelle Elemente als schön wahrgenommen und dienen gleichzeitig dem besseren Verständnis, was zu einer Überlagerung von Visueller Ästhetik und Epistemischer Transparenz führt. Ebenso werden erfolgreiche Problemlösungen nicht nur als kognitiv befriedigend, sondern auch als emotional bedeutsam beschrieben. Hier zeigt sich eine Verbindung zwischen Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit und Emotionaler Wirksamkeit.

In Einzelfällen ergeben sich auch Hinweise auf weitere mögliche Kategorien, die in der vorliegenden Analyse jedoch nicht systematisch genug vertreten waren, um als eigenständige Dimensionen ausgearbeitet zu werden. Dazu zählen zum Beispiel Aussagen, die Mathematik im Bezug zu anderen Fächern setzten oder das spielerische, kreative Arbeiten betonen. Diese Aspekte wurden, soweit möglich, bestehenden Kategorien zugeordnet, könnten aber bei breiterer Datenlage Anlass zu weiterführenden Differenzierungen bieten.

Auch die Frage nach ästhetischer Erfahrung im sozialen oder kommunikativen Kontext (z.B. beim Diskutieren mathematischer Lösungen) bleibt in den erhobenen Daten nur angedeutet. Für weiterführende Forschung könnte dies eine interessante Perspektive sein, um mathematische Schönheit nicht nur als individuelle, sondern auch als interaktive oder gemeinschaftlich geteilte Erfahrung zu untersuchen. Die Analyse zeigt somit nicht nur, welche ästhetischen Dimensionen in den Aussagen dominieren, sie zeigt auch, wie eng diese Kategorien miteinander verflochten sein können. Dies spricht für ein differenziertes, aber zugleich flexibles Kategoriensystem, das sowohl klar definierte Kategorien bereitstellt als auch Raum für inhaltliche Übergänge und Grenzbereiche lässt.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Analyse zeigen, dass mathematische Schönheit von Studierenden auf vielfältige Weise erlebt wird, von struktureller Klarheit über visuelle Eindrücke bis hin zu persönlichen Erfolgserlebnissen. Auf Basis dieser Befunde soll im folgenden Kapitel eine vertiefende Interpretation der Ergebnisse erfolgen. Dabei wird die Forschungsfrage in den theoretischen Kontext zurückgeführt und hinsichtlich ihrer Bedeutung für das Fach Mathematik und mögliche praktische Implikationen reflektiert.

5.1 Interpretation des Studentischen Schönheitsbegriffs

Die Ergebnisse der Inhaltsanalyse zeigen einerseits, dass die in der mathematischen Wissenschaftspraxis bekannten Kriterienkomplexe auch von Studierenden benannt werden. Offenbar sind ihnen diese Form von Erfahrungen mit Mathematik bekannt und sie beschreiben diese auch als ästhetisches Moment. Damit belegt die vorliegende Studie, was bereits Erfahrungen im schulischen Kontext (vgl. etwa Heitzer und Spies (2015) und Allmendinger und Spies (2015)) nahelegen. Die Tatsache, dass Verweise auf die Tragweite als Kriterium unter den Studierenden sehr selten sind, könnte jedoch auch damit zusammenhängen, dass mathematikästhetische Erlebnisse dieser Art vom Kenntnis- und Erfahrungsstand abhängen. Damit Lernende die besondere innermathematische Tragweite etwa einer Beweisidee überhaupt erst wahrnehmen können, müssen sie über ein breites meist über den Gehalt einer einzelnen fachmathematischen Veranstaltung hinausgehendes Wissen verfügen. Tragweiteerlebnisse bedürfen also einer längeren oder wiederholten Beschäftigung. An dieser Stelle bestätigt die Untersuchung Ergebnisse von beispielbezogenen Vergleichsstudien wie (Hayn-Leichsenring et al., 2022) oder (Johnson und Steinerberger, 2019), widerspricht aber gleichzeitig der mere-exposure-These (vgl. Zajonc, 2001) vertreten etwa in Sa et al. (2024b), der zu Folge die große Übereinstimmung bei der Beurteilung von Beispielen gerade an einer häufigen Präsentation und Gewöhnung liegt.

Besonders deutlich wird, dass Schönheit in der Mathematik für viele Studierende nicht primär im mathematischen Objekt selbst, sondern im Erleben des eigenen Denkens und Handelns liegt. Die induktiv entwickelte Kategorie Verständniserfolg / Selbstwirksamkeit belegt dies. Mathematik wird dann als schön empfunden, wenn man etwas nachvollziehen, lösen, strukturieren oder in eine klare Form bringen kann. In diesem Punkt bestätigt die Untersuchung die Ergebnisse unter Schülerinnen und Schülern wie auch Lehramtsstudierenden von Brinkmann (2009) und unterstreicht gleichzeitig, dass mathematische Schönheitsurteile Studierender der Verarbeitungsflüssigkeitstheorie bzw. dem kognitiv-affektiven Modell ästhetischer Urteile (s.o.) zu folgen scheinen.

Auch visuelle Aspekte, etwa geometrische Figuren, Zeichnungen oder Modelle, spielen eine wichtige Rolle, nicht nur als Hilfsmittel, sondern auch als ästhetisch wirksames Element an sich. Diese Ergebnisse legen nahe, dass das Schönheitserleben in der Mathematik nicht ausschließlich kognitiv, sondern ebenso handlungsbezogen und sinnlich geprägt ist. Inwiefern es sich hier tatsächlich um eine mathematische Aisthesis handelt, also das sinnlich Wahrnehmbare dirket zum Objekt des ästhetischen Urteils wird, oder die visuell-geometrische Darstellung lediglich eine besonders leichte Zugänglichkeit zu den hinterliegenden Strukturen ermöglicht, bedarf weiterer Untersuchungen. Ersteres legen etwa die angegebenen Beispiele zur optischen Symmetrie nahe, während für letztere Interpretation diejenigen Antworten sprechen, die auf die verdeutlichende Rolle von Zeichnungen hinweisen.

Auch die induktiv gewonnene Kategorie Struktur und Ordnung scheint eine ähnliche Mittlerrolle zu spiele. Während die Ordnung, wenn sie in der Wissenschaftspraxis als Begründung für ein mathematisches Schönheitsurteil angeführt wird, häufig einem zuvor erlebten Chaos entgegengesetzt wird (vgl. z.B. Davis und Hersh, 1994, S. 176) und damit eher dem Eigenschaftskomplex der Ökonomie zugeordnet werden kann, verweisen die Antworten bei den Studierenden auf zwei weitere Aspekte: Zum Einen wird die besonders gut überschaubare Stuktur von Lösungswegen ästhetisch wirksam, was auf eine Beziehung zu epistemischer Transparenz einerseits und Verständniserfolg/Selbstwirksamkeit andererseits hinweist. Zum Anderen wird die ästhetische Wirksamkeit struktureller Zusammenhänge und Abhängigkeiten hervorgehoben, was wiederum Parallelen zum Aspekt der visuellen Ästhetik aufweist.

5.2 Folgerungen

Die vorliegende Untersuchung zeigt, dass Studierende mathematische Schönheit auf vielfältige und persönlich bedeutsame Weise erleben. Dabei bestätigt sich einerseits, dass die aus der mathematischen Wissenschaftspraxis bekannten Kriterien – Ökonomie, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit – auch in den Äußerungen der Studierenden erkennbar sind. Dies deutet darauf hin, dass diese Formen ästhetischer Erfahrung prinzipiell zugänglich sind und nicht erst mit vollständiger fachlicher Expertise auftreten. Andererseits offenbart die Analyse drei bedeutsame zusätzliche Dimensionen: Die visuelle Ästhetik geometrischer Formen und grafischer Darstellungen, das Erleben von Struktur und Ordnung als ästhetischem Prinzip sowie insbesondere der Verständniserfolg und die Selbstwirksamkeit beim aktiven mathematischen Tun. Letztere Kategorie war mit 23 Nennungen besonders prominent vertreten und unterstreicht, dass Schönheit für Studierende eng mit dem eigenen Handeln, Verstehen und Bewältigen verbunden ist.

Diese Befunde legen nahe, dass mathematikästhetische Bildung nicht allein auf die Vermittlung objektiver Schönheitskriterien abzielen sollte, sondern auch die subjektiven, handlungsbezogenen und visuell-sinnlichen Zugänge ernst nehmen muss.

Gerade für die Lehramtsausbildung ergeben sich daraus wichtige Impulse: Wenn angehende Lehrkräfte selbst vielfältige ästhetische Erfahrungen mit Mathematik machen, können sie diese auch authentisch im eigenen Unterricht ermöglichen.

Die auffallend seltene Nennung des Kriteriums der Tragweite wirft zudem Fragen nach der Entwicklung mathematikästhetischer Urteilsfähigkeit auf. Möglicherweise benötigt die Wahrnehmung weitreichender innermathematischer Zusammenhänge ein breiteres Fundament an Erfahrung und Wissen, das über einzelne Lehrveranstaltungen hinausgeht. Dies würde entweder für die Gestaltung von Lehrveranstaltungen sprechen, die sich eher an mathematischen Ideen denn an Fachsystematiken orientieren oder für eine spiralcurriculare Anlage mathematikästhetischer Bildungsangebote, bei der ästhetische Reflexionen wiederholt und vertiefend aufgegriffen werden.

Methodisch zeigt die Studie, dass offene, schriftliche Befragungen gut geeignet sind, um subjektive ästhetische Erfahrungen zu erfassen, ohne durch Vorgaben oder Beispiele die Antworten zu stark zu lenken. Die Kombination aus deduktiver und induktiver Kategorienbildung erwies sich als fruchtbar, um sowohl theoretisch fundierte als auch empirisch neue Aspekte sichtbar zu machen. Zukünftige Forschung könnte untersuchen, wie sich mathematikästhetische Urteile im Verlauf des Studiums entwickeln, welche Rolle soziale und kommunikative Kontexte spielen und inwiefern gezielte didaktische Interventionen das ästhetische Erleben beeinflussen können. Auch die Frage, ob und wie sich die hier identifizierten Kategorien in anderen Bildungskontexten – etwa bei Schülerinnen und Schülern oder bei Studierenden anderer Fachrichtungen – wiederfinden, wäre von Interesse.

Insgesamt unterstreicht die Studie, dass mathematische Schönheit kein Randphänomen ist, sondern ein bedeutsamer Aspekt mathematischer Bildung. Sie zu fördern bedeutet nicht nur, die fachliche Tiefe zu bereichern, sondern auch die emotionale und motivationale Beziehung zur Mathematik positiv zu gestalten. In diesem Sinne ist ästhetische Bildung im Fach Mathematik nicht Zusatz, sondern integraler Bestandteil einer umfassenden mathematischen Enkulturation.

Literatur

Allmendinger, Henrike und Susanne Spies (2015). „Alte Bekannte aus persönlicher Sicht. Quadratische Gleichungen ästhetisch reflektiert.“ In: *mathematik lehren* 193, S. 26–31.

Belke, Benno und Helmut Leder (2006). „Annahmen eines Modells der ästhetischen Erfahrung aus kognitionspsychologischer Perspektive“. In: *Ästhetische Erfahrung. Gegenstände, Konzepte, Geschichtlichkeit*. Hrsg. von Sonderforschungsbereich 626. Berlin. URL: https://www.geschkult.fu-berlin.de/e/sfb626/veroeffentlichungen/online/aesth_erfahrung/aufsaetze/belke_leder.pdf.

Bertram, Georg W. (2014). *Kunst als menschliche Praxis. Eine Ästhetik*. Berlin.

Brinkmann, Astrid (2009). „Mathematical Beauty and its Characteristics - A Study on the Student's Point of View." In: *The Mathematics Enthusiast* 6.3, S. 365–380.

Davis, Philip J. und Reuben Hersh (1994). *Erfahrung Mathematik.* Basel.

Goy, Andreas (2013). „Schöne Beweise: Die eulersche Polyederformel". In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 54, S. 19–22.

Hayn-Leichsenring, Gregor U, Oshin Vartanian und Anjan Chatterjee (2022). „The role of expertise in the aesthetic evaluation of mathematical equations". In: *Psychological Research* 86.5, S. 1655–1664.

Heitzer, Johanna und Susanne Spies (2015). „An Mathematik finde ich schön, ..." In: *mathematik lehren* 193, S. 9–10.

Johnson, Samuel GB und Stefan Steinerberger (2019). „Intuitions about mathematical beauty: A case study in the aesthetic experience of ideas". In: *Cognition* 189, S. 242–259.

Karamehmedović, Mirza (2015). „Mathematical beauty in service of deep approach to learning". In: *43rd Annual Conference of the European Society for Engineering Education (SEFI 2015)*, S. 55856.

Liljedahl, Peter G (2005). „Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students". In: *International journal of mathematical education in science and technology* 36.2-3, S. 219–234.

Marmur, Ofer und Boris Koichu (2016). „Surprise and the aesthetic experience of university students: A design experiment". In: *Journal of humanistic mathematics* 6.1, S. 127–151.

Mayring, Philipp (2010). „Qualitative Inhaltsanalyse". In: *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie.* Hrsg. von Günter Mey und Katja Mruck. Wiesbaden, S. 601–613.

Müller-Hill, Eva und Susanne Spies (2015). „On the role of affect for sense making in learning mathematics–aesthetic experiences in problem solving processes". In: *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, S. 1245–1251.

Pietzcker, Dominik (2024). *Was ist Schönheit? Kurze Geschichte der Ästhetik von der Antike bis zur Globalisierung.* Herder.

Reber, Rolf und Sascha Topolinski (2009). „Einfach + schön = wahr". In: *Gehirn&Geist* 1, S. 20–23.

Reicher, Maria E. (2005). *Einführung in die philosophische Ästhetik.* Darmstadt.

Rota, Gian-Carlo (1997). „The Phenomenology of Mathematical Beauty". In: *Synthese* 111, S. 171–182.

Sa, Rentuya et al. (2024a). „Do mathematicians agree about mathematical beauty?" In: *Review of Philosophy and Psychology* 15.1, S. 299–325.

– (2024b). „Do mathematicians agree about mathematical beauty?" In: *Review of Philosophy and Psychology* 15.1, S. 299–325.

Sinclair, Nathalie (2009). „Aesthetics as a liberating force in mathematics education?" In: *ZDM –The international Journal on Mathematics Education* 41.1,2, S. 45–60.

Spies, Susanne (2013). „Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler“. In: *SieB 2*. Siegen.
– (2015). „Bildsame Schönheit: Zur Integration des Ästhetischen im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs“. In: *mathematica didactica* 38.1 a, S. 173–195.
Tschen, Julia (2025). „Hat auch Mathematik schöne Seiten? Ästhetische Urteile unter Studierenden.“ unveröffentlichte Bachelorarbeit.
Zajonc, Robert B (2001). „Mere exposure: A gateway to the subliminal“. In: *Current directions in psychological science* 10.6, S. 224–228.

Adressen der Autoren

András Bátkai
Institut für Sekundarbildung und Fachdidaktik
Pädagogische Hochschule Vorarlberg
Liechtensteiner Str. 33-37,
A-6800 Feldkirch
andras.batkai@ph-vorarlberg.ac.at

Henning Heller
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
D-53115 Bonn
hheller@uni-bonn.de

Alfred Olszok
Institut für Philosophie
Universität Leipzig
Beethovenstraße 15
D-04107 Leipzig
Alfred-Olszok@gmx.de

Walter Purkert
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
D-53115 Bonn
edition@math.uni-bonn.de

Hannes Schmidt
Albrecht-Dürer-Haus-Stiftung Nürnberg
Elbinger Straße 20
D-90491 Nürnberg
hannes.schmidt@duerer-haus-stiftung.de

Julia Tschen / Susanne Spies
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Straße 3
D-57068 Siegen
spies@mathematik.uni-siegen.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.
2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.
3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro
Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro
Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro
Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro
Martin Rathgeb: George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro
Tanja Hamann: Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro
Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.

Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro
Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

Band 14 (2021), 216 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Henning Heske, Hannes Junker, Andreas Kirchartz, Oliver Passon und Tassilo von der Twer, Toni Reimers, Susanne Spies und Claus-Peter Wirth

Band 15 (2022), 252 S., kart., 22,– Euro
Alessa Waldvogel: Dualität in der Funktionalanalysis. Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

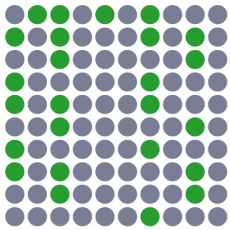
Band 16 (2022), 270 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Stephan Berendonk, Harald Boehme, Christian Hugo Hoffmann, Daniel Koenig, Jens Lemanski, Jasmin Özel, Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke, Štefan Porubský, Dolf Rami, Renate Tobies

Band 17 (2023), 192 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Michael Herrmann, Henning Heske, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Renate Tobies, Matthias Wille

Band 18 (2024), 206 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Romain Büchi, Oliver Ebbers, Julia Franke-Reddig Karin Richter & Toni Reimers, Susanne Spies, Niko Strobach

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 19,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)



SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 19 (2025)

Mit Beiträgen von

András Bátkai
Über Nichts

Henning Heller & Walter Purkert
Zum 200. Geburtstag des Mathematiklehrers Julius Toeplitz

Alfred Olszok
The Untraveled Journey from Alpha Graphs to Linear Notation

Hannes Schmidt
Dürer hat doch recht.
Zu geometrischen Konstruktionen in den „Vier Büchern von menschlicher Proportion“

Julia Tschen & Susanne Spies
Mathematikästhetische Urteile von Studierenden – Ergebnisse einer qualitativen Studie

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN