Marius Ruby

Widerstandsreduktion kompressibler turbulenter Strömungen durch wandbasierte Beeinflussung

Herausgeber: Holger Foysi und Thomas Seeger

Schriftenreihe des Lehrstuhls für Strömungsmechanik

Band 12

Widerstandsreduktion kompressibler turbulenter Strömungen durch wandbasierte Beeinflussung

dem Fachbereich Maschinenbau
der Universität Siegen
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegte Dissertation
von

M.Sc. Marius Ruby

Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. H. Foysi
Koreferent:	Priv.-Doz. Dr.-Ing. C. Wenzel
Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. T. Seeger
Dekan:	Prof. Dr. H. Schönherr

Tag der Einreichung:	17.09.2025
Tag der mündl. Prüfung:	18.12.2025

Siegen, September 2025

Impressum
Insitut für Fluid- und Thermodynamik
Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi, Lehrstuhl für Strömungsmechanik
Prof. Dr.-Ing. Thomas Seeger, Lehrstuhl für technische Thermodynamik
Universität Siegen
57068 Siegen
Nummer 2025-1
Zugl.: Siegen, Univ., Diss. 2025

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Strömungsmechanik an der Universität Siegen. Vorweg möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die mir in den letzten Jahren nahestanden und zur Realisierung dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi für das entgegengebrachte Vertrauen. Seine hervorragende Leistung in der Lehre, die im Jahr 2016 mit dem Lehrpreis der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät gewürdigt wurde, hat mich für das Fachgebiet begeistert. In der Zeit am Lehrstuhl war er mir fachlich und menschlich Inspiration und Vorbild. Danke für die belebenden Diskussionen, die geteilten schönen und motivierenden Momente, aber auch die Schwierigen, die man im Rahmen der Promotion für gewöhnlich durchläuft.

Danken möchte ich auch Dr.-Ing. Christoph Wenzel für die Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen, sowie Prof. Dr.-Ing. Thomas Seeger und Prof. Dr. rer. nat. Anna Katharina Beine für ihre Bereitschaft zur Mitarbeit in der Promotionskommission.

Meinen Kollegen Alexander Bald, Kathrin Stahl, George Khujadze, Fettah Aldudak, Mario Bedrunka und Philipp Spelten danke ich für das harmonische Miteinander und die anregenden Flurgespräche.

Zum Schluss danke ich ganz besonders meinen Eltern, die durch ihre Unterstützung und Geduld während meiner Promotion maßgeblich zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben.

Siegen, September 2025

Marius Ruby

Abstract

An active flow control method is used with the aim of friction drag reduction. The method utilizes streamwise oscillation of spanwise velocity at the wall. Owing to reduced turbulence intensity, less energy is required to drive the flow against viscous resistance. The key question is how compressibility affects the drag reduction results.

A huge dataset of different flow cases with carefully selected parameter combinations has been created to reliably extract the influence of important flow parameters on the flow behavior. Direct numerical simulations and large eddy simulations of subsonic and supersonic channel flow were run with Mach numbers based on the mean velocity of $Ma_b = 0.3$, 1.5 and 3.0 and Reynolds numbers Re_τ based on the friction velocity in the range of 190 up to 2540. Mean property effects are predominant in supersonic channel flow through large variations of the mean density and temperature and wall cooling. Consequences are a higher Reynolds stress anisotropy, increased length scales in the viscous sublayer flow and enhanced streak stability. The pressure-strain correlation and spanwise dissipation terms undergo a strong attenuation compared to the incompressible counterparts, especially in the controlled flows. Higher drag reduction and a larger optimum control wavelength are observed compared to the corresponding incompressible flows. Increasing the Mach number enhances these effects due to stronger mean property variations. A mitigation of near-wall compressibility effects occurs with an increase of the bulk Reynolds number, though, which attenuates the drag reduction benefits in the controlled flow as well.

In the second part of this work, cooling terms were introduced in the Navier-Stokes equations to mimic the wall-normal temperature profile of an external boundary layer flow and to minimize variable property effects within the complete channel, respectively. This approach allows for a better isolation of intrinsic compressibility effects and wall cooling effects. The cooling strategies highlight the importance of intrinsic compressibility effects, which contribute to an increased control efficiency, too.

As a potential case of application for the flow control method, a jet flow emanating from a round pipe is considered in the third part of this work. The turbulent subsonic pipe flow is manipulated by the transverse wall velocity and the focus is on the impact on the jet development. No direct interference of the streanwise oscillation pattern of transverse velocity within the pipe and the jet region is detected. However, the lowered turbulence intensity at the pipe exit noticeably affects the jet flow development, independent of how the reduction is achieved. The shear layer of the controlled jet flow develops with higher turbulence intensities associated with intensified Kelvin-Helmholtz instabilities. The effects can be relativized if the maximum transverse velocity is located directly at the pipe exit. Consequently, a jet with similar characteristics to the uncontrolled one can be generated with the advantage of a substantially lowered energy expenditure.

Zusammenfassung

Eine aktive Strömungsbeeinflussung wird angewandt um den turbulenten Reibungswiderstand zu reduzieren. Die Methode basiert auf einer stehenden räumlichen Welle transversaler Geschwindigkeit an der Wand. Aufgrund der verringerten Turbulenzintensität wird weniger Energie benötigt um den viskosen Reibungswiderstand zu überwinden. Der Fokus der Arbeit ist auf den Einfluss kompressibler Strömungsbedingungen auf die Effizienz der Widerstandsreduktion gerichtet.
Eine Vielzahl an direkten numerischen Simulationen und Large-Eddy Simulationen von sub- und supersonischen Kanalströmungen mit globalen Machzahlen von $Ma_b = 0.3$, 1.5 und 3.0 und Reynoldszahlen, basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit, im Bereich von $Re_\tau = 190$ bis 2540 wurde durchgeführt. Kompressibilitätseffekte ergeben sich in supersonischer Kanalströmung vorwiegend durch die starke Variation der mittleren Dichte und Temperatur und den hohen Wärmeübergang der gekühlten Wände. Es zeigt sich dadurch eine erhöhte Anistropie der turbulenten Spannungen, vergrößerte Längenskalen in der viskosen Unterschicht und eine stärkere Kohärenz der wandnahen Wirbelstrukturen. Die Terme der Druckscherkorrelation und der Dissipation in Spannweitenrichtung erfahren gegenüber vergleichbaren inkompressiblen Strömungen eine starke Reduktion, welche in besonderem Maße auch bei den beeinflussten Strömungen beobachtet wird. Gegenüber inkompressibler Strömung ist eine höhere Widerstandsreduktion möglich bei einer vergrößerten optimalen Wellenlänge der Beeinflussung. Eine höhere Machzahl fördert diese Effekte durch noch größere Gradienten der mittleren thermischen Größen. Eine steigende Reynoldszahl, basierend auf der mittleren Geschwindigkeit, mildert dagegen die Effekte durch die Abnahme des Wandwärmeübergangs und den damit verbundenen Wandkühlungseffekten.
Im zweiten Teil dieser Arbeit werden Kühlterme eingeführt, um die äußeren Strömungsbedingungen einer Grenzschicht zu imitieren, bzw. um die Variation der mittleren thermischen Größen komplett zu eliminieren. Wandkühlungs- und intrinsische Kompressibilitätseffekte können so besser isoliert werden. Die Ergebnisse weisen auf eine große Bedeutung intrinsischer Kompressibilitätseffekte hin, die sich ebenfalls in einer erhöhten Effizienz der Beeinflussung in supersonischer Strömung äußern.
Als Anwendungsbeispiel für die Methode wird im dritten Teil eine Rohr-Freistrahl-Kombination betrachtet, bei der die turbulente, subsonischen Rohrströmung beeinflusst wird. Hier liegt der Fokus auf der Entwicklung des Freistrahls und dessen Manipulation durch die veränderten Rohrströmungsbedingungen. Die Ergebnisse zeigen keine direkte Einflussnahme des im Rohr generierten transversalen Geschwindigkeitsprofils auf den Freistrahl. Vielmehr führt die verringerte Turbulenzintensität am Rohrauslass zu einer veränderten Entwicklung des Freistrahls gegenüber dem unbeeinflussten Fall. Die Scherschicht des Freistrahls entwickelt sich mit höheren turbulenten Intensitäten durch verstärkte Instabilitäten. Wird die maximale transversale Geschwindigkeit der Beeinflussung direkt am Auslass positioniert, relativieren sich die Effekte. Folglich kann ein Freistrahl mit ähnlichen Eigenschaften wie im unbeeinflussten Fall generiert werden, jedoch mit erheblich geringerem Energieaufwand.

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis **IX**

Abbildungsverzeichnis **XI**

Symbolverzeichnis **XXIII**

1 Einleitung **1**

2 Numerische Methoden und Algorithmen **11**

2.1 Programmcode PyFR 11

2.2 Grundgleichungen 12

2.3 Flux Reconstruction Methode 14

2.3.1 1D Kurzdarstellung 14

2.3.2 3D Navier-Stokes Gleichungen 16

2.3.3 Anti Aliasing 20

2.3.4 ILES Eignung 20

2.4 Verwendete Rechner 23

2.4.1 Skalierung 24

2.5 SPOD Algorithmus 26

3 Kompressible Kanalströmungen **31**

3.1 Numerische Spezifikationen der kompressiblen Kanalströmungen . . . 31

3.1.1 Dimensionslose Kennzahlen 34

3.1.2 Simulationsparameter 35

3.2 Funktionsprinzip der Beeinflussungsmethode 38
3.3 Gemittelte Größen 41
3.3.1 Unbeeinflusste Fälle 41
3.3.2 Beeinflusste Fälle 50
3.4 Effizienz der Strömungsbeeinflussung 55
3.4.1 Widerstandsreduktion 55
3.4.2 Leistungsbilanzierung 57
3.5 Reibungskoeffizient 60
3.5.1 Zerlegungen 62
3.6 Turbulente Spannungen 67
3.7 Streaks 73
3.7.1 Unbeeinflusste Fälle 76
3.7.2 Beeinflusste Fälle 79
3.7.3 SPOD 82
3.8 Bilanzen der turbulenten Spannungen 85
3.8.1 Beeinflusste Fälle 93
3.9 Energiespektren in den wandnahen Schichten 103
3.9.1 Unbeeinflusste Fälle 103
3.9.2 Beeinflusste Fälle 110
3.10 Very large anisotropic scales 112
3.11 Zusammenfassung 122

4 Kanalströmungen mit Kühlterm 125
4.1 Strömungskonfigurationen 130
4.2 Unbeeinflusste Fälle 135
4.2.1 Mittlere Größen 135
4.2.2 Turbulente Spannungen 139
4.3 Beeinflusste Fälle 145
4.3.1 Turbulente Spannungen 148
4.3.2 Wärmebilanz 155
4.4 Zusammenfassung 159

5 Runder Freistrahl **161**

5.1 Numerische Spezifikationen 163

5.2 Rohrbereich 170

5.3 Freistrahlbereich 172

5.4 SPOD 180

5.5 Akustik 186

5.6 Zusammenfassung 191

6 Zusammenfassung und Ausblick **193**

A Validierung Kanal **201**

B Validierung Freistrahl **207**

B.1 Rohströmung 207

B.2 Synthetische Turbulenzgenerierung 210

B.3 Fernfeldrandbedingungen Freistrahl 216

Tabellenverzeichnis

3.1 Simulationsparameter (1/2): Strömungskennzahlen 36
3.2 Simulationsparameter (2/2): Gebietsgröße und Gitterauflösung 36

4.1 Simulationsparameter (1/2): Strömungskennzahlen 131
4.2 Simulationsparameter (2/2): Gebietsgröße und Gitterauflösung 132
4.3 Grenzschichtströmung von Zhang et al. [159] zum Vergleich 135
4.4 Simulationsparameter der beeinflussten und unbeeinflussten Strömungen. 145
4.5 Reibungskoeffizient $C_f = 2\tau_w/(\rho_c u_c^2)$, Wandwärmeübergangskoeffizient B_q und räumlich gemittelter Kühlterm $\overline{\Psi}$ für die Konfigurationen *dc* und *bc*. 157

5.1 Parameter der Freistrahlströmungen 170
5.2 Parameter des strukturierten zylindrischen Gitters der interpolierten Daten und SPOD Parameter 181

B.1 Parameter der periodischen Rohrströmungen 207

Abbildungsverzeichnis

2.1 Schema der Flux Reconstruction Methode anhand des 1D Falls . . . 15

2.2 Lösungspunkte und Flusspunkte der Flux Reconstruction Methode am Beispiel von einem Dreiecks- und Viereckselement im physikalischen Raum . . . 18

2.3 Normierte Dissipation (a) und Dispersion (b) der Flux Reconstruction Methode für verschiedene Polynomordnungen P1 bis P5 . . . 22

2.4 Speedup der Kanalströmung auf dem OMNI Cluster . . . 25

2.5 Speedup der Kanalströmung auf den Modulen des Jülich Supercomputing Centre . . . 25

2.6 Schaubild des SPOD Algorithmus . . . 29

3.1 Skizze des Rechengebiets der Kanalströmung mit Abmessungen und schematischen Geschwindigkeitsprofilen der Strömung und der angewandten Beeinflussung. . . . 32

3.2 Spannweiten- und Stromabkomponente der Geschwindigkeit in wandparallelen Schnitten der Konfiguration M15R800, beeinflusst mit Wellenlänge $\Lambda_x = \pi h/4$, bei $x_2^+ = 5$. . . . 39

3.3 Linear verteilte Konturlinien der gemittelten spannweitigen Geschwindigkeit in einem x_1-x_2-Schnitt der Strömung M15R400 mit $\Lambda_x^* = 1280$ 40

3.4 Profile der mittleren spannweitigen Geschwindigkeit des Falls M03R400, normiert mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_{\tau 0}$ der unbeeinflussten Strömung, an verschiedenen Positionen $x_1 = 0\Lambda_x$, $x_1 = 1/8\Lambda_x$, $x_1 = 2/8\Lambda_x$ und $x_1 = 3/8\Lambda_x$. . . . 40

3.5 Variation der mittleren Temperatur (a) und Dichte (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der äußeren Koordinate x_2/h. . . . 42

3.6 Variation der mittleren Temperatur (a) und Dichte (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der semilokalen Koordinate x_2^*. . . . 42

3.7 Variation der semilokalen Reynoldszahl $Re_\tau^* = \overline{\rho} u_\tau^* h/\overline{\mu}$ (a) und der lokalen Machzahl $\tilde{u}_1/\overline{c}$ (b) über x_2^*. 43

3.8 Variation der semilokalen Reynoldszahl $Re_\tau^* = \overline{\rho} u_\tau^* h/\overline{\mu}$, normiert mit dem Wandwert Re_τ. 43

3.9 Variation der turbulenten Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$ (a) und der semilokalen Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$ (b). 44

3.10 RMS-Werte des Drucks (a) und der Dichte (b) über x_2^*, normiert mit mittleren Werten. 45

3.11 RMS-Werte des Drucks (a) und der Dichte (b) über x_2^* und Normierung nach Laguarda et al. [92]. 45

3.12 Mittlere Geschwindigkeitsprofile; (a) untransformiert, (b) Transformation nach van Driest, (c) Transformation nach Trettel und Larsson . . 46

3.13 Einfluss der Reynoldszahl auf die Trettel & Larsson transformierten Geschwindigkeitsprofile; (a) $Ma_b = 0.3$, (b) $Ma_b = 1.5$, (c) $Ma_b = 3.0$. 48

3.14 Beeinflusste Variation der mittleren Temperatur und Dichte für die Fälle M15R800, M3R400 und verschiedene Beeinflussungswellenlängen 51

3.15 Beeinflusste Variation der semilokalen Reynoldszahl und des Drucks für den Fall M15R800 und verschiedene Beeinflussungswellenlängen . 51

3.16 Beeinflusste Machzahlprofile; (a) lokale Machzahl $\overline{u}_1/\overline{c}$, (b) turbulente Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$, (c) semilokale Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$. 52

3.17 RMS-Werte des Drucks und der Dichte bei $Ma_b = 1.5$, $Re_{\tau c}^* = 350$ im unbeeinflussten Zustand und mit verschiedenen Beeinflussungswellenlängen 53

3.18 Trettel & Larsson transformierte Geschwindigkeitsprofile für die beeinflussten Fälle und den unbeeinflussten Fall bei $Ma_b = 1.5$ und $Re_{\tau c}^* = 800$ 53

3.19 Reibungskoeffizient C_f der beeinflussten Strömung bezogen auf die jeweilige unbeeinflusste Strömung mit Reibungskoeffizient C_{f0} in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ_x^* 56

3.20 Leistungsbilanzierung in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ_x^* 59

3.21 Mittlerer Reibungs- und Wandwärmeübergangskoeffizient aller unbeeinflussten Strömungen 61

3.22 Zerlegung der viskosen und turbulenten Spannungen nach Huang et al. [74] für den Fall M3R400. 63

3.23 FIK Zerlegung des Reibungskoeffizienten jeweils für die unbeeinflusste Strömung und verschiedene Beeinflussungswellenlängen. 64

3.24 RD Zerlegung des Reibungskoeffizienten jeweils für die unbeeinflusste Strömung und verschiedene Beeinflussungswellenlängen. 66

3.25 Gewichtete Integranden der Terme C_{f1}/C_f und C_{f2}/C_f der Renard & Deck Zerlegung für die unbeeinflussten Strömungen bei $Ma_b = 3$ . . . 67

3.26 Gewichtete Integranden der Terme C_{f1}/C_f und C_{f2}/C_f der Renard & Deck Zerlegung für die beeinflussten Strömungen bei $Ma_b = 1.5$ und $Re^*_{\tau c} = 800$ 67

3.27 Äußere Skalierung der turbulenten Spannungen $\overline{\rho}\widetilde{u_1''u_1''}$ und $\overline{\rho}\widetilde{u_1''u_2''}$ . . 68

3.28 Äußere Skalierung der turbulenten Spannungen $\overline{\rho}\widetilde{u_2''u_2''}$ und $\overline{\rho}\widetilde{u_3''u_3''}$ . . 69

3.29 Innere Skalierung der turbulenten Spannungen $\overline{\rho}\widetilde{u_1''u_1''}$ und $\overline{\rho}\widetilde{u_1''u_2''}$ . . . 70

3.30 Innere Skalierung der turbulenten Spannungen $\overline{\rho}\widetilde{u_2''u_2''}$ und $\overline{\rho}\widetilde{u_3''u_3''}$ . . . 70

3.31 Komponente b_{11} des Anisotropietensors 72

3.32 Komponente b_{12} des Anisotropietensors 72

3.33 Komponente b_{22} des Anisotropietensors 72

3.34 Komponente b_{33} des Anisotropietensors 73

3.35 Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ, bei $x_2^* = 5$ für die unbeeinflussten Fälle M03R400, M15R400 und M3R400 74

3.36 Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ, bei $x_2^* = 5$ für die unbeeinflussten Fälle M03R800, M15R800 und M3R800 75

3.37 Parameter der Scherrate $S^* = Sq^2/\epsilon = \overline{\rho}\overline{u_i'u_i'}/(\overline{\mu}\overline{\omega_i'\omega_i'}) \cdot 1/(d\overline{u}_1/dx_2)$. . 76

3.38 Eindimensionale Spektren der Stromab-Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_1'u_1'}$ und $k_3 E_{u_1'u_1'}$ in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ 77

3.39 Eindimensionale Spektren der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_2'u_2'}$ und $k_3 E_{u_2'u_2'}$ in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ 78

3.40 Eindimensionale Spektren der spannweitigen Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_3'u_3'}$ und $k_3 E_{u_3'u_3'}$ in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ . . 78

3.41 Konturplots der Fluktuationen von u_1 für die unbeeinflusste Strömung M15R800 und den entsprechenden beeinflussten Fall mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$ 80

3.42 Konturplots der Fluktuationen von u_1 für die unbeeinflusste Strömung M03R800 und den entsprechenden beeinflussten Fall mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 620$ 81

3.43 SPOD Eigenwertspektrum der beeinflussten Konfiguration M15R400 82

3.44 Dominante SPOD-Moden der Geschwindigkeitsfluktuationen u''/u_τ^* für die beeinflussten Fälle M03R400 $\Lambda_x^* = 1220$ und M15R400 $\Lambda_x^* = 1280$ 83

3.45 SPOD des unbeeinflussten Falls M03R400 85

3.46 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b\tau_w/h$. 87

3.47 Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b\tau_w/h$. 87

3.48 Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b\tau_w/h$. 88

3.49 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b\tau_w/h$. 88

3.50 Unterschiedliche Skalierungen am Beispiel der Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Bilanz und $Re_{\tau c}^* = 800$ 89

3.51 Vergleich der Produktion P_{11} 90

3.52 Vergleich der Produktion P_{12} 90

3.53 Vergleich des turbulenten Transports T_{11} 90

3.54 Vergleich des turbulenten Transports T_{22} 90

3.55 Vergleich des turbulenten Transports T_{33} 91

3.56 Vergleich des viskosen Transports D_{11} 91

3.57 Vergleich des viskosen Transports D_{22} 91

3.58 Vergleich des viskosen Transports D_{33} 91

3.59 Vergleich des viskosen Transports D_{12} 92

3.60 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{11} 92

3.61 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{22} 92

3.62 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{33} 92

3.63 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{11}^u 93

3.64 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{22}^u 93

3.65 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{33}^u 93

3.66 Vergleich der Dissipation ϵ_{11} 93

3.67 Vergleich der Dissipation ϵ_{22} 94

3.68 Vergleich der Dissipation ϵ_{33} 94

3.69 Produktion der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b\tau_w/h$. . 96

3.70 Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 96

3.71 Vergleich der zusätzlichen Komponenten T_{ij1}, D_{ij1} und M_{ij1} mit den jeweiligen Hauptkomponenten T_{ij2}, D_{ij2} und M_{ij2} für die 11- und 33-Bilanz des beeinflussten Falls M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 97

3.72 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 97

3.73 Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 98

3.74 Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 98

3.75 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$ 99

3.76 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall 100

3.77 Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall 100

3.78 Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall 101

3.79 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall 101

3.80 Ausgewählte Bilanzterme der turbulenten Spannungen für die Konfigurationen M03R400, M15R400 und M3R400 102

3.81 Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 104

3.82 Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 104

3.83 Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 105

3.84 Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren bei Wandabstand $x_2^* = 5$. Variation der Machzahl . . 106

3.85 Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren bei Wandabstand $x_2^* = 20$. Variation der Machzahl . 107

3.86 Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren bei Wandabstand $x_2^* = 5$ und $x_2^* = 20$. Variation der Reynoldszahl 108

3.87 Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten eindimensionalen Energiespektren. Variation der Machzahl 109

3.88 Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten eindimensionalen Energiespektren. Variation der Reynoldszahl 110

3.89 Abstandsgleiche Konturlinien der beeinflussten und unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren im Wandabstand $x_2^* = 20$ 112

3.90 Volumendarstellung der Stromabgeschwindigkeit u_1 für das gesamte Strömungsgebiet der Konfiguration M03R800L 114

3.91 Instantane Fluktuationen von u_1 für die unbeeinflusste Strömung M15R800L im vergrößertem Rechengebiet 116

3.92 (a) Visualisierung der Wirbelstrukturen in der wandparallelen Ebene bei $x_2^* = 5$; (b) Instantane Fluktuationen von u_1 für den beeinflussten Fall M15R800L mit $\Lambda_x^* = 1265$ 117

3.93 Parameter der Scherrate S^* über der wandnormalen Koordinate. (a) Vergleich der unbeeinflussten Strömungen M03R800L und M15R800L; (b) Vergleich der beeinflussten und unbeeinflussten Strömungen der Konfiguration M15R800L. 118

3.94 Linear verteilte Konturlinien der eindimensionalen Energiespektren der Konfigurationen M03R800L und M15R800L jeweils für die beeinflusste und unbeeinflusste Strömung 119

3.95 Eindimensionalen Energiespektren bei drei verschiedenen Wandabständen $x_2^* = 5$, $x_2^* = 20$ und $x_2^* = 90$ 121

4.1 Energieterme Ψ der unterschiedlichen Strömungskonfigurationen *dc* (dissipation cooling), *bc* (bulk cooling) und *zc* (zero cooling) 132

4.2 Instantane Fluktuationen der Geschwindigkeit und Temperatur in einem wandparallelen Schnitt bei $x_2^+ = 5$ 134

4.3 Mittlere Profile des Drucks, der Temperatur und der Dichte 135

4.4 Mittlere Profile der lokalen Machzahl, der semilokalen Schubspannungsmachzahl und der turbulenten Machzahl 136

4.5 RMS-Werte des Drucks, der Dichte und der Temperatur 137

4.6 Wandnormaler turbulenter Wärmefluss $\overline{\rho}\widetilde{u_2''T''}$; (b) Temperaturgradient $\partial\widetilde{T}/\partial x_2$; (c) Produktion der Temperaturvarianz $\mathcal{P}_T = -\overline{\rho}\widetilde{u_2''T''}\partial\widetilde{T}/\partial x_2$ 138

4.7 (a) Verlauf der semilokalen Reynoldszahl; (b) RMS-Werte der kompletten und isentropen Dichtefluktuationen 138
4.8 Mittlere Geschwindigkeitsprofile; (a) Transformation nach Trettel & Larsson, (b) Transformation nach van Driest 139
4.9 Profile der turbulenten Normalspannungen und Scherspannung normiert mit u_τ^{*2} über x_2^+ 140
4.10 Profile der turbulenten Normalspannungen und Scherspannung normiert mit u_τ^{*2} über x_2^* 141
4.11 Vergleich der Produktion P_{11} 142
4.12 Vergleich der Produktion P_{12} 142
4.13 Vergleich des turbulenten Transports T_{11} 143
4.14 Vergleich des viskosen Transports D_{11} 143
4.15 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{11} 143
4.16 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{11}^u 143
4.17 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{33}^u 143
4.18 Vergleich der Dissipation ϵ_{11}^u 143
4.19 Vergleich der Dissipation ϵ_{22} 144
4.20 Vergleich der Dissipation ϵ_{33}^u 144
4.21 Reibungskoeffizient C_f der beeinflussten Strömung bezogen auf die jeweilige unbeeinflusste Strömung mit Reibungskoeffizient C_{f0} in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ_x^+ bzw. Λ_x^* 147
4.22 RMS-Werte des Drucks, der Dichte (b) und der Temperatur jeweils für die beeinflusste und unbeeinflusste Strömung 149
4.23 Profile der turbulenten Normalspannungen und Scherspannung normiert mit u_τ^{*2} über x_2^+ für die beeinflussten Strömungen mit $\Lambda_x^+ \approx 1600$ 150
4.24 Profile der turbulenten Normalspannungen und Scherspannung normiert mit u_τ^{*2} über x_2^* für die beeinflussten Strömungen mit $\Lambda_x^+ \approx 1600$ 151
4.25 Vergleich der Produktion P_{11} 151
4.26 Vergleich der Produktion P_{12} 151
4.27 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{11}^u 152
4.28 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{22}^u 152
4.29 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{33}^u 152
4.30 Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{12}^u 152
4.31 Vergleich der Dissipation ϵ_{11} 152

4.32 Vergleich der Dissipation ϵ_{22} 152
4.33 Vergleich der Dissipation ϵ_{33} 153
4.34 Vergleich der Dissipation ϵ_{12} 153
4.35 Vergleich des turbulenten Transports T_{11} 153
4.36 Vergleich des turbulenten Transports T_{33} 153
4.37 Vergleich des viskosen Transports D_{11} 153
4.38 Vergleich des viskosen Transports D_{12} 153
4.39 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{12} zusammen mit den unbeeinflussten Fällen 154
4.40 Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{33} zusammen mit den unbeeinflussten Fällen 154
4.41 Mittlere Profile der Dichte, der Temperatur und der Viskosität für die unbeeinflusste Strömung und die beeinflussten Strömungen mit räumlich konstantem Kühlterm 155
4.42 Temperatur-RMS, wandnormaler turbulenter Wärmefluss und Temperaturgradient der Strömungskonfigurationen *bc* 156
4.43 Wärmestrombilanz für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle mit *bulk cooling* Strategie. (b) Änderung der Widerstandsreduktion des Falls bcΛ1610 nach Eliminierung der von der Strömungsbeeinflussung hervorgerufenen Wärme 158

5.1 3D Visualisierung der Rohr/Freistrahl-Kombination zur Illustration mithilfe des Wirbelstärkebetrags 162
5.2 Schematische Darstellung des numerischen Setups der achsensymmetrischen Rohr/Freistrahl-Kombination. 164
5.3 Ausschnitt des numerischen Gitters in der $r - \varphi$ Ebene im Freistrahlgebiet. 167
5.4 Dimensionslose Gitterweite im Freistrahlbereich in axialer (a), radialer (b) und azimutaler Richtung (c). 167
5.5 (a) Radiale Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit über der selbstähnlichen Koordinate; (b) Axiale Profile der RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit bei $r = 0$ 168
5.6 Radiale Profile der turbulenten Spannungen über der selbstähnlichen Koordinate 169
5.7 Darstellung der Wandumfangsgeschwindigkeit im Rohrbereich. (a) Fall $u_{\varphi e} = 0$; (b) Fall $u_{\varphi e} = \max$ 170

5.8 In der Zeit und in azimutaler Richtung gemittelte Felder $\sqrt{u_i' u_i'}/U_j$ innerhalb des Rohrbereichs für die unbeeinflusste (a,b,c) und beeinflusste Konfiguration mit $u_{\varphi e} = 0$ (d,e,f). 171

5.9 RMS-Werte der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten in (a) axialer, (b) radialer und (c) azimutaler Richtung bei $x/d = -0.04$ . . 171

5.10 Auswirkung von turbulenten und laminaren Rohraustrittsbedingungen auf den Freistrahlbereich 173

5.11 Mittlere Umfangsgeschwindigkeit im Bereich des Rohraustritts 173

5.12 Mittlere axiale Geschwindigkeit 174

5.13 (a) Visualisierung des Potentialkerns und der Freistrahlweite; (b) Impulsverlustdicke δ_θ 174

5.14 Instantane Schnitte der axialen Geschwindigkeit u_x/U_j an verschiedenen axialen Positionen für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle $u_{\varphi e} = 0$ und $u_{\varphi e} = \max$ 176

5.15 Azimutale Kreuzkorrelationsfunktion $R_\varphi^{u_x' u_x'}$ in der ringförmigen Scherschicht bei $r/d = 0.5$ 177

5.16 RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit 177

5.17 RMS-Werte der radialen Geschwindigkeit 178

5.18 RMS-Werte der azimutalen Geschwindigkeit 178

5.19 RMS-Werte des Drucks 179

5.20 Bereich der interpolierten Daten für die SPOD 181

5.21 SPOD Eigenwertespektrum für die ersten vier azimutalen Wellenzahlen m. Vergleich von unbeeinflusster (a) und beeinflusster Konfiguration mit $u_{\varphi e} = 0$ (b) 182

5.22 SPOD Eigenwertespektrum für die ersten vier azimutalen Wellenzahlen m. Vergleich von unbeeinflusster (a) und beeinflusster Konfiguration mit $u_{\varphi e} = \max$ (b) 183

5.23 Erste SPOD-Mode des unbeeinflussten Freistrahls bei azimutaler Wellenzahl $m = 0$ und verschiedenen Strouhalzahlen 183

5.24 Vergleich der SPOD-Moden 1 und 2 der verschiedenen unbeeinflussten und beeinflussten Konfigurationen bei ausgewählten Frequenzen . . . 184

5.25 Visualisierung der Schallwellen mithilfe der dominanten SPOD-Moden bei zwei Strouhalzahlen $St \approx 2.1$ und $St = 4.23$ für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle $u_{\varphi e} = 0$ und $u_{\varphi e} = \max$ 187

5.26 Normierter Druck p/p_j der unbeeinflussten Konfiguration und Beobachterpositionen B1 - B3 in der $x - r$-Ebene des Freistrahls 188

5.27 Ausschnitte des Zeitsignals der Druckfluktuationen an den Positionen B1 (a), B2 (b) und B3 (c) 189

5.28 Totaler Schalldruckpegel bei den 60 zylindrisch angeordneten Beobachterpunkten an den Positionen B1, B2 und B3 190

5.29 Totaler Schalldruckpegel entlang einer Linie parallel zur Freistrahlachse bei $r = 10R$ 190

A.1 Mittlere Geschwindigkeit (a) und turbulente Spannungen (b) für den Fall M03R150 mit Strömungsparametern $Ma_b = 0.3$ und $Re_\tau = 192$ im Vergleich zu den DNS-Daten von Modesti und Pirozzoli [104] . . . 202

A.2 Verläufe der van-Driest transformierten Geschwindigkeit (a), der normierten mittleren Viskosität und Dichte (b) und turbulenten Spannungen (c) für den Fall M15R150 mit Strömungsparametern $Ma_b = 1.5$ und $Re_\tau = 218$ im Vergleich zu den DNS-Daten von Foysi [51] 202

A.3 Zweipunktkorrelationen $R_{x_1}^{u_1' u_1'}$ (a,b) und $R_{x_3}^{u_1' u_1'}$ (c,d) bei $x_2^* = 20$ (a,c) und $x_2 = h/2$ (b,d). 203

A.4 Zweipunktkorrelationen $R_{x_1}^{u_1' u_1'}$ bei $x_2 = h/2$. (a) Unbeeinflusste und beeinflusste Konfigurationen M15R800; (b) Unbeeinflusste und beeinflusste Konfigurationen M03R800L und M15R800L 204

A.5 Vergleich der Rechengebietsgrößen der Fälle M15R800 und M15R800L. (a) Zeitlicher Verlauf der Wandschubspannung der unbeeinflussten und beeinflussten Strömung mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$; (b) Gewichtete Integranden des Anteils C_{f2}/C_f für die unbeeinflusste Strömung 205

A.6 Zeitlicher Verlauf der Wandschubspannung für den Fall M15R800 (unbeeinflusst und mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$). Vergleich der Originalauflösung jeweils mit erhöhter Gitterauflösung 205

B.1 Zweipunktkorrelationen der Rohr-DNS bei den Wandabständen $(R - r)^+ = 5$ (a), $(R - r)^+ = 20$ (b) und $(r - R) = R/2$ (c) 208

B.2 (a) Ein Viertel des numerischen Gitters der Rohr-DNS in der $r - \varphi$-Ebene; (b) Vergleich des mittleren Geschwindigkeitsprofils von DNS, ILES und der DNS von El Khoury et al. [50] 208

B.3 RMS-Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer (a), radialer (b), azimutaler Richtung (c) und Reynoldsscherspannung (d) als Funktion des Wandabstands $(R - r)^+$. 209

B.4 Verlauf der Wandschubspannung über t^+ für die unbeeinflussten Strömungen ($t^+ \leq 0$) und unter Anwendung der Wandoszillationen mit Wellenlänge $\Lambda_x^+ = 1145$ ($t^+ > 0$). 210

B.5 Entwicklung der Wandschubspannung τ_w der Rohrströmung mit synthetischer Turbulenzgenerierung in axialer Richtung bezogen auf den mittleren Wert der periodischen Rohrströmung $\overline{\tau}_w^{\text{per}}$. 212

B.6 Unbeeinflusste Profile der axialen Geschwindigkeit u_x über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 213

B.7 Unbeeinflusste Profile $u_{x,rms}^+ = \overline{u_x' u_x'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass . . 213

B.8 Unbeeinflusste Profile $u_{r,rms}^+ = \overline{u_r' u_r'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass . . 213

B.9 Unbeeinflusste Profile $u_{\varphi,rms}^+ = \overline{u_\varphi' u_\varphi'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass . . 214

B.10 Unbeeinflusste Profile $= \overline{u_x' u_r'}/u_\tau^2$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 214

B.11 Beeinflusste Profile der axialen Geschwindigkeit u_x über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 214

B.12 Beeinflusste Profile $u_{x,rms}^+ = \overline{u_x' u_x'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 215

B.13 Beeinflusste Profile $u_{r,rms}^+ = \overline{u_r' u_r'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 215

B.14 Beeinflusste Profile $= \overline{u_x' u_r'}/u_\tau^2$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass 215

B.15 Dreidimensionaler akustischer Impuls. (a) Gitter in der x_1-x_2 Ebene. (b) Zeitliche Entwicklung von $L_p/L_p(0)$ im Vergleich mit der analytischen Lösung. 217

B.16 Dreidimensionaler akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ in der x_1-x_2 Ebene bei $x_3 = 0$ zur Zeit $t = 40$ (a), $t = 80$ (b) und $t = 120$ (c) 217

B.17 Dreidimensionaler akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ in der x_2-x_3 Ebene bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t = 40$ (a) und $t = 80$ (b) 218

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

A	Amplitude der Beeinflussung
b_{ij}	Anisotropietensor $b_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$
B	Additive Konstante im logarithmischen Wandgesetz $u_1^+ = 1/\kappa \ln(x_2^+) + B$
B_q	Wandwärmeübergangskoeffizient
c	Schallgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_v	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
C_f	Reibungskoeffizient
D_{ij}	Turbulenter und viskoser Transport der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$\mathcal{DR}$	Widerstandsreduktionsrate [%]
e	innere Energie
E	totale Energie
$E_{u_i' u_j'}$	Energiespektrum der Geschwindigkeitsfluktuationen
Ec	Eckertzahl
f	Frequenz
	Quellterme in den Navier-Stokes Gleichungen
$\mathbf{f}_\alpha$	Flussvektor der Flux Reconstruction Methode
h	halbe Kanalhöhe
k	thermische Leitfähigkeit
	turbulente kinetische Energie $\overline{\rho u_i'' u_i''}/2$
k_i	Wellenzahl in i-Richtung
l_{sp}	Länge der Dämpfungszone
m	azimutale Wellenzahlen der Freistrahl-SPOD
Ma	Machzahl
Ma_b	Globale Machzahl U_b/c_w
Ma_c	Machzahl $u_c/\sqrt{\gamma R T_c}$ in der Kanalmitte

Ma_t	turbulente Machzahl $\sqrt{2k}/\overline{c}$
Ma_τ	Schubspannungsmachzahl u_τ/c_w
M_{ij}	Turbulenter Massenfluss der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
p	Druck
P_{ij}	Produktionsrate der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
Pr	Prandtlzahl
q	Wärmestrom
	$\overline{u_i' u_i'}^{1/2}$
$\mathbf{q}$	Zustandsvektor der SPOD
Q	Massenstrom, gemittelt in der 2-3-Ebene
	zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors
Re	Reynoldszahl
Re_b	Globale Reynoldszahl $Re_b = \frac{\rho_b u_b h}{\mu_w}$
Re_τ	Reynoldszahl $Re_\tau = \frac{\rho_w u_\tau h}{\mu_w}$ gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit
Re_τ^*	semilokale Definition von Re_τ: $Re_\tau^* = Re_\tau \frac{\sqrt{<\rho>/\rho_w}}{<\mu>/\mu_w}$
$Re_{\tau c}^*$	semilokale Reynoldszahl in der Kanalmitte
Re_d	Reynoldszahl $Re_d = \frac{\rho_j U_j d}{\mu_w}$ gebildet mit Größen am Freistrahlaustritt und dem Rohrdurchmesser
R_{x_i}	Zweipunktkorrelation in i-Richtung
r	radiale Richtung
R	universelle Gaskonstante $R = 8.314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
	Radius des Rohrs
s	Reynoldsanalogiefaktor
S^*	Parameter der Scherrate $S^* = Sq^2/\epsilon$
S	mittlere Scherrate $S = \mathrm{d}\overline{u}_1/dx_2$
St	Strouhalzahl
	Stantonzahl
t	Zeit
T	Temperatur
T_r	Recovery-Temperatur
$\mathbf{u}$, u_i	Geschwindigkeitsvektor
u	Geschwindigkeit in x_1-Richtung
U_b	*bulk* (volumengemittelte) Geschwindigkeit
U_j	Mittlere Achsengeschwindigkeit am Rohrauslass
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$
u_τ^*	semilokale Definition von u_τ: $u_\tau^* = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\overline{\rho}}}$
$\mathcal{U}_w$	Konvektionsgeschwindigkeit nahe der Wand

$u_{1\,vD}^+$	van-Driest transformierte Geschwindigkeit $\int_0^{u_1^+} \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} du_1^+$
$u_{1\,TL}^+$	Trettel & Larsson transformierte Geschwindigkeit $\int_0^{u_1^+} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}x_2}x_2 - \frac{1}{\bar{\mu}}\frac{\mathrm{d}\bar{\mu}}{\mathrm{d}x_2}x_2\right] \mathrm{d}u_1^+$
$\mathbf{v}$, v_i	Lösungsvektor der Flux Reconstruction Methode
$\mathbf{x}$	Ortsvektor (x_1, x_2, x_3)
(x_1, x_2, x_3)	Koordinaten im physikalischen Raum
(x, r, φ)	Zylinderkoordinaten
w	Geschwindigkeit in x_3-Richtung

Griechische Symbole

γ	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (c_p/c_v)
δ_{ij}	Kronecker-Delta
δ_θ	Impulsverlustdicke
$\delta_\nu = \nu_w/u_\tau$	viskoses Längenmaß
δ_ν^*	semilokale Definition von δ_ν: $\delta_\nu^* = \frac{\langle\nu\rangle}{u_\tau^*}$
Δ	Differenz
ϵ	Dissipationsrate
ϵ_{ij}	Dissipation der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
Θ	diabatischer Parameter (dimensionslose Temperatur)
κ	Kármán Konstante im logarithmischen Wandgesetz $u_1^+ = 1/\kappa \ln(x_2^+) + B$
λ	Wellenlänge
Λ_x	Wellenlänge der Beeinflussung
Λ_x^*	transformierte Wellenlänge der Beeinflussung $\Lambda_x^* = \Lambda_x/\delta_\nu^*(h) = \Lambda_x \frac{Re_\tau}{h}\frac{\sqrt{\rho_c/\rho_w}}{\mu_c/\mu_w}$ basierend auf Werten in der Kanalmitte
μ	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
$\phi^{(i)}$	SPOD-Moden
Π_{ij}^u	Druckscherkorrelation der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
ρ	Dichte
σ	Dämpfungskoeffizient
$\boldsymbol{\tau}$, τ_{ij}	viskoser Spannungstensor
τ_w	Wandschubspannung
Ψ	Kühlterm in der Energiegleichung
$\boldsymbol{\omega}$	Wirbelstärkevektor

Allgemeine Symbole

$\mathbf{a}$	Vektor, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\mathbf{A}$	Tensor
$\lvert a \rvert$	Betrag von a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	ℓ^2-Norm des Vektors $\mathbf{a}$
$\lVert \mathbf{a} \rVert_\infty$	Maximumsnorm des Vektors $\mathbf{a}$

Indizes

$< \circ >$	Mittelung in der Zeit und über homogene Richtungen
$\circ_1$, $\circ_2$, $\circ_3$	Koordinatenrichtungen
$\circ_x$, $\circ_r$, $\circ_\varphi$	Zylinderkoordinatenrichtungen
$\hat{\circ}$	Fourier-Transformierte
$\circ_b$	*bulk* (volumengemittelte) Größen
$\circ_c$	Größen in der Kanalmitte
$\circ_j$	Freistrahlaustrittsbedingungen
$\circ_{\mathrm{opt}}$	optimaler Beeinflussungsparameter hinsichtlich der maximalen Widerstandsreduktion
$\circ_s$	sampling
$\circ_w$	Wert an der Wand
$\circ_0$	Wert der unbeeinflussten Konfiguration Wert auf der Achse im Freistrahlgebiet
$\circ^+$	Wert, ausgedrückt in Wandkoordinaten
$\circ^*$	Wert, ausgedrückt in semilokalen Koordinaten
$\overline{\circ}$	Ensemble- (Reynolds-) Mittelwert
$\widetilde{\circ}$	Massengewichteter (Favre-) Mittelwert
$\circ'$	Fluktuation gegenüber Ensemble-Mittelwert
$\circ''$	Fluktuation gegenüber massengewichtetem Mittelwert

Abkürzungen

DNS	Direkte Numerische Simulation
LES	Large Eddy Simulation
ILES	Implizite Large Eddy Simulation
OASPL	Overall Sound Pressure Level
POD	Proper Orthogonal Decomposition
SPOD	Spectral Proper Orthogonal Decomposition
RMS	Root Mean Square
VLAS	Very Large Anisotropic Scales

1. Einleitung

Die Arbeit ist motiviert durch die steigende Notwendigkeit den Reibungswiderstand in turbulenten Strömungen zu senken. Die hohen Gradienten der Geschwindigkeit rufen dort grundsätzlich hohe viskose Kräfte hervor, die es in technischen Anwendungen zu überwinden gilt. Bei der typischen Reisegeschwindigkeit von Passagierflugzeugen macht der Wandreibungswiderstand beispielsweise rund 50 % des Gesamtwiderstands aus [121]. Aktive Methoden, die auf eine Energiezufuhr von außen angewiesen sind, versuchen die natürliche Strömung so zu verändern, dass sich eine Netto-Energieeinsparung einstellt. Da ein Großteil der Widerstandsgenerierung mit den turbulenten Vorgängen in der dünnen Fluidschicht nahe der Oberfläche verbunden ist, konzentrieren sich die meisten Methoden darauf, die turbulente Aktivität nahe der Wand zu unterdrücken.
Die Manipulation turbulenter Strömungen im Rahmen dieser Arbeit lässt sich in gewisser Hinsicht mit dem Eingriff des Menschen in die Natur assoziieren. Ähnlich wie bei den empfindlichen Ökosystemen gibt es in der Turbulenz Zusammenhänge, die noch nicht vollständig begriffen wurden. Dennoch beginnen wir schon damit, einige bereits gewonnene Erkenntnisse für unsere Zwecke zu nutzen. Der entfernte Vergleich soll die enorme Komplexität der Turbulenz verdeutlichen, vor unbekannten, langfristigen negativen Auswirkungen muss man sich bei Anwendung einer Turbulenzbeeinflussung jedoch zum Glück nicht fürchten. Auch muss man sich fragen, wie "natürlich" die hier betrachtete Strömung über eine perfekt ebene Oberfläche überhaupt ist. Die Natur selbst hat hierfür bessere Lösungen hervorgebracht, wie zum Beispiel die Hautschuppen eines Hais, die dessen Bewegungseigenschaften im Fluid im Vergleich zu einer glatten Haut verbessern. Solche Beobachtungen aus der Natur dienen als Inspiration bei der Entwicklung von Methoden zur Strömungsmanipulation. Ein grundlegendes Verständnis der Vorgänge und Wechselwirkungen der Turbulenz ist ebenso entscheidend, um diese im positiven Sinne zu beeinflussen. Weiterhin müssen Aufwand und Nutzen geeigneter Methoden gegeneinander abgeschätzt und technische Hindernisse auf dem Weg zu praktischen Anwendungen ausgeräumt werden.
Der Großteil der Untersuchungen auf dem Gebiet der Strömungsbeeinflussung beschäftigt sich mit inkompressiblen Strömungsbedingungen. Als Besonderheit werden

hier darüber hinaus kompressible Strömungsbedingungen berücksichtigt. Dadurch ergeben sich eine Vielzahl neuer Einflüsse und Abhängigkeiten untereinander von Impuls- und Wärmetransportvorgängen, der Variation der Fluideigenschaften aufgrund von Viskositätsänderungen aufgrund der Temperatur, bis hin zu Änderungen in der Beeinflussung. Alleine die Fragestellung, wie diese Strömungen adäquat untereinander verglichen werden können, stellt Wissenschaftler bis heute vor Herausforderungen. Folglich gestaltet sich die Bewertung der Beeinflussungsresultate unter den verschiedenen Strömungsbedingungen komplexer. Daneben ist eine exakte Separation zwischen den auftretenden Effekten aufgrund der Wärmeleitung, der variablen Fluideigenschaften und intrinsischer Kompressibilitätseffekte noch nicht vollständig gelungen. Relevante Arbeiten bezüglich der verwendeten Beeinflussungsmethode und Fortschritte in der Beschreibung kompressibler Strömungen werden im Folgenden vorgestellt.

Relevante Arbeiten

Beeinflussungsmethode
Die verwendete Methode zur Reduzierung des turbulenten Reibungswiderstandes lässt sich zunächst als aktive Methode einordnen. Im Gegensatz zu passiven Methoden, die etwa durch eine veränderte Gestaltung der Oberfläche mit der wandnahen Turbulenz interagieren, ist bei aktiven Verfahren eine permanente Zufuhr äußerer Energie zu deren Aufrechterhaltung nötig. Im engeren Sinne handelt es sich um eine oszillierende Beeinflussung durch Aufprägung einer Welle transversaler Geschwindigkeit mit definierter Frequenz direkt an der Wand. Im Gegensatz zu Methoden, die durch lokales Einblasen und Absaugen in wandnormaler Richtung in Echtzeit versuchen Extremereignisse verbunden mit hoher Widerstandsgenerierung zu unterbinden, kommt die oszillierende transversale Beeinflussung ohne Rückkopplung und aufwendige Messtechnik aus. Unter idealen Bedingungen lässt sich eine Widerstandsreduktion in der Größenordnung von 50 % erzielen [121]. Eine einfache und effektive Möglichkeit um die wandnahe Turbulenzaktivität durch eine Querströmungskomponente zu stören, ist eine transversale Oszillation der Wand mit sinusförmiger Zeitabhängigkeit nach der Vorschrift

$$w_w(t) = A \sin(\omega t)\,. \tag{1.1}$$

Die Idee geht zurück auf Jung et al. [83]. Durch direkte numerische Simulation ebener Kanalströmungen fanden sie heraus, dass im Bereich der zeitlichen Periode $T_{\mathrm{osc}}^{+} = T_{\mathrm{osc}} u_\tau^2/\nu$ von 25 bis 200 turbulente Extremereignisse gedämpft wurden. Es ergab sich eine anhaltende Reduzierung des turbulenten Widerstands und vergleichbare Schwächungen aller drei Komponenten der turbulenten Intensitäten sowie der Reynoldsscherspannung. Für eine Amplitude der Wandoszillationen von 80 % der Flussrate erzielten sie eine Widerstandsreduktion von 10 % bis 40 %, wobei eine op-

timale Periode von $T^+_{\mathrm{osc}} = 100$ existiert, bei der die Oszillationen die effektivste Unterdrückung der Turbulenz hervorruft [83]. Einige Arbeiten folgten mit dem Ziel, ein besseres Verständnis für die Mechanismen der Widerstandsreduktion zu erlangen, durch sorgfältige Untersuchungen numerischer und experimenteller Daten der wandnahen Struktur, modifiziert durch die Wandbewegung (z.B. Choi [30], Touber und Leschziner [139]). Baron und Quadrio [11] zeigten, dass eine Netto-Energieeinsparung mit der Oszillationstechnik möglich ist, wenn die Wandgeschwindigkeit weniger als die Hälfte der äußeren Hauptströmungsgeschwindigkeit beträgt. Im niedrigen Reynoldszahlbereich ergaben sich 10 % Netto-Energieeinsparung bei einem Viertel der Geschwindigkeit der Außenströmung. Die hier verwendete Methode kann direkt aus den Wandoszillationen abgeleitet werden und wurde erstmals von Berger et al. [14] experimentell durch eine Lorentzkraft und später von Viotti et al. [146] in direkter numerischer Simulation angewandt. Die Methode beinhaltet eine stationäre Verteilung transversaler Geschwindigkeit an der Wand mit sinusförmiger Variation in Stromrichtung. Ein Nachteil der Wandoszillationen ist deren instationäre Natur. Viotti et al. [146] überführten daher die zeitabhängige Wandgeschwindigkeit 1.1 in eine Geschwindigkeitsverteilung abhängig von der Strömungsrichtung mit räumlicher Wellenlänge Λ_x:

$$w_w(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_x} x\right) . \tag{1.2}$$

Die Methode macht sich die konvektive Natur der Strömung zunutze, indem die Zeitabhängigkeit in Gleichung 1.1 in eine unstetige Interaktion zwischen der stationären Wandbewegung und der Konvektion der wandnahen Turbulenz umgeformt wird. Ähnlich zu Taylor's *frozen turbulence* Hypothese, bei der zeitliche Fluktuationen auf räumliche Fluktuationen in Strömungen zurückgeführt werden, ergibt die Interaktion der Geschwindigkeitsverteilung in Gleichung 1.2 mit der Konvektionsgeschwindigkeit der turbulenten Fluktuationen ein ähnliches zeitabhängiges Verhalten wie durch Gleichung 1.1 beschrieben. Kim und Hussain [87] zeigten, dass für Wandabstände $y^+ \lesssim 15$ die Konvektionsgeschwindigkeit unabhängig von der Wanddistanz einen konstanten Wert von $\mathcal{U}^+_w = 10$ annimmt [146]. Genau diese Geschwindigkeit wird für die Transformation genutzt. Die alternative ortsabhängige Formulierung 1.2 verhält sich ähnlich zu der oszillierenden Wand mit allen charakteristischen Eigenschaften, wie der Existenz einer optimalen Wellenlänge, die sich ebenfalls über die Konvektionsgeschwindigkeit als $\Lambda_{x,\mathrm{opt}} = \mathcal{U}^+_w T^+_{\mathrm{opt}}$ ergibt. Bei gleicher Amplitude liefert das ortsabhängige Verfahren eine 20 bis 30 % höhere Widerstandsreduktion gegenüber den zeitlichen Wandoszillationen[146]. Eine maximale Widerstandsreduktion von 52 % wurde bei der Reynoldszahl $Re_\tau = 200$, der Wellenlänge $\Lambda^+_x = 1250$ und Amplitude $A^+ = 20$ beobachtet. Zudem profitiert die Energiebilanz deutlich von der hinfälligen wechselnden Beschleunigung der Wand gegen den viskosen Widerstand. Bei einer niedrigeren Anregungsintensität ($A^+ = 6$) ergab sich eine Netto-Energieeinsparung von 23 % und insgesamt eine positive Netto-Energieeinsparung über einen großen Bereich an Wellenlängen [146]. Ein ausführlicher Vergleich zwischen den zeitlichen und räumlichen

Wandoszillationen in turbulenter Grenzschichtströmung liefert Skote [135]. Der direkte Vergleich ergab, dass bei Anwendung der ortsabhängigen Wandgeschwindigkeit einzig die Spannweitenkomponente der Reynoldsspannungen erheblich niedriger ist und die höhere Widerstandsreduktion in dem Fall verantwortet. Eine kompliziertere Form der Wandgeschwindigkeit verwendeten Du und Karniadakis [47], die mithilfe einer Volumenkraft

$$f_z(z,t) = Fe^{-y/\Delta}\sin(\kappa_z z - \omega t) \tag{1.3}$$

in der wandnahen Strömung aufgeprägt wurde. Die fortlaufende Welle in Spannweitenrichtung mit Wellenzahl κ_z zerstört die wandnahen Wirbelstrukturen effektiv bei niedriger Reynoldszahl, verbunden mit einer hohen Widerstandsreduktion. Eine Erweiterung der zeitlichen und räumlichen Wandoszillationen auf den raumzeitlichen Fall liefert auch Quadrio et al. [118] mit einer Wandgeschwindigkeit

$$w_w(x,t) = A\sin(\kappa_x x - \omega t)\,, \tag{1.4}$$

bei der sowohl die Wellenzahl κ_x als auch die Kreisfrequenz ω gleichzeitig ungleich Null sein können. Die Gleichung 1.4 beschreibt Wanderwellen transversaler Wandgeschwindigkeit, die sich mit der Phasengeschwindigkeit $c = \omega/\kappa_x$ entweder stromaufwärts oder stromabwärts ausbreiten. Als Spezialfall verschwindender Phasengeschwindigkeit ist die stehende Welle nach Gleichung 1.2 enthalten. Eine Welle mit unendlicher Phasengeschwindigkeit ($\kappa_x = 0$) entspricht den zeitlichen Wandoszillationen nach Gleichung 1.1. Quadrio et al. [118] fanden eine hohe Widerstandsreduktion für langsame vorwärts wandernde Wellen, während schnellere Wellen mit einer Geschwindigkeit vergleichbar mit der Konvektionsgeschwindigkeit der wandnahen turbulenten Strukturen eine Widerstandserhöhung auslösten. Rückwärtslaufende Wellen führten dagegen zu Widerstandsreduktion bei beliebigen Geschwindigkeiten. Da eine ortsabhängige Geschwindigkeitsverteilung durch eine starre Wand nicht unmittelbar zu erzielen ist, existieren einige Versuche, die Effekte auf andere Weise zu reproduzieren. Wanderwellen transversaler Geschwindigkeit in Spannweitenrichtung und in Strömungsrichtung wurden beispielsweise von Roggenkamp et al. [122] bzw. Kendall [86] durch eine zeitlich veränderliche wandnormale Deformation einer flexiblen Wand erreicht. In einer Rohrströmung lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung 1.4 wie in Auteri et al. [8] durch unabhängige Rotationen einzelner Wandsegmente annähern. Die transversale Geschwindigkeit kann darüber hinaus durch elektroaktive Polymeroberflächen [61], Kagome-Gitter [17], durch wandmontierte Plasmageneratoren [29] oder drehende Scheiben [120] und passiv über Riblets generiert werden, die sich sinusförmig in Strömungsrichtung schlängeln [113]. Einen ausführlichen Überblick über oszillierende transversale Anregung nahe der Wand und verschiedene Möglichkeiten der Implementierung liefert Ricco et al. [121].

Kompressibilitätseffekte, Skalierungen und Transformationen
Auftretende Effekte unter kompressiblen Strömungsbedingungen können grundsätz-

lich unterteilt werden in Effekte der variierenden mittleren Größen Temperatur, Dichte und Viskosität, sowie Wärmeleitungseffekte und intrinsische/echte Kompressibilitätseffekte durch Änderungen des Fluidvolumens als Reaktion auf Änderungen des Drucks. Hasan et al. [72] fassen unter Wärmeleitungseffekten die Variation der mittleren Temperatur, Dichte und Viskosität und auftretende Fluktuationen der Dichte resultierend aus Entropieänderungen zusammen. Der Übergang ist abhängig von der Strömungskonfiguration teilweise fließend und eine genaue Abgrenzung mitunter schwierig. Bei kompressiblen Kanalströmungen im Bereich niedriger supersonischer Machzahlen werden intrinsische Effekte üblicherweise als unbedeutend eingestuft durch die direkte (starke) Abhängigkeit dieser Effekte von der Machzahl. Eine erhöhte Wandkühlung führt dort unmittelbar zu stärkeren Wärmeleitungseffekten, die sich insbesondere in unmittelbarer Wandnähe durch große Variationen der mittleren Fluideigenschaften bemerkbar machen. In kompressiblen Grenzschichtströmungen ist das Verhältnis von Wandtemperatur zur Temperatur der äußeren Strömung im Gegensatz zum Kanal positiv. Das grundlegend abweichende Temperaturprofil sorgt dafür, dass Fluktuationen der Dichte, Temperatur und des Drucks überwiegend erst in der Übergangsschicht bedeutend werden. Es besteht kein direkter Zusammenhang zwischen der Stärke der Wandkühlung und der wandnahen mittleren Temperaturvariation wie im Kanal und die Wandkühlung sorgt verstärkt im hypersonischen Bereich für eine erhöhte Anisotropie der Reynoldsspannungen und höhere Temperatur- und Druckfluktuationen in der viskosen Unterschicht [35].
Foysi et al. [52] führten direkte numerische Simulationen von Kanalströmungen bis zu einer Machzahl von 3.5 durch. Die supersonischen Fälle zeigten gegenüber dem inkompressiblen Fall eine erhöhte Anisotropie der Turbulenz, was mit den starken Dichtevariationen in Wandnähe und der Nichtlokalität des Drucks erklärt wurde. Patel et al. [112] führten die beobachteten Änderungen in der Reynoldsspannungsgenerierung und im Energieaustausch zwischen den Raumkomponenten ebenfalls auf die hohen Gradienten der mittleren thermischen Größen an der Wand zurück. Untersuchungen der wandnahen Wirbel durch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zeigten veränderte Neigungswinkel. Die kohärenten Strukturen, die für die Aufrechterhaltung des wandnahen Turbulenzkreislaufs eine entscheidende Rolle spielen, waren weniger instabil und wurden weniger stark von der Wand weg abgelenkt, verglichen mit der inkompressiblen Strömung [111]. Pei et al. [114] stellten zudem eine exponentielle Zunahme der charakteristischen Längenskalen nahe der Wand mit der Machzahl in viskosen Wandeinheiten fest. Intrinsische Kompressibilitätseffekte wurden in Yu et al. [157] und Hasan et al. [72] thematisiert, die in den entsprechenden Kanalströmungen durch teilweise bzw. vollständige Eliminierung der Wärmeleitungseffekte isoliert wurden. Dynamische wandnahe Effekte aufgrund der Dilatation wurden identifiziert und in den Statistiken zeigt sich weiterhin eine Anisotropiezunahme der turbulenten Spannungen mit der Machzahl, ein ansteigender Trend des mittleren transformierten Geschwindigkeitsprofils in der logarithmischen Schicht und eine Abschwächung der wandnahen Wirbelstärkefluktuationen.

Geeignete Skalierungen und Transformationen sind notwendig um ein universelles Verhalten der Strömungsstatistiken unter kompressiblen Bedingungen zu erhalten. In diesem Zusammenhang entwickelte Van Driest [143] eine Transformation, welche eine gute Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeit für Strömungen über adiabate Wände mit variablen und konstanten Fluideigenschaften liefert, wenn diese über der viskosen Wandkoordinate y^+ aufgetragen werden. Der Erfolg der zugrundeliegenden Gewichtung mit der lokalen Dichte kann auf die Morkovin-Hypothese zurückgeführt werden, die davon ausgeht, dass sich die charakteristischen Zeit- und Längenskalen des turbulenten Transports aufgrund der variablen mittleren thermischen Größen nicht ändern [112]. Weniger gut eignet sich die Transformation für Kanalströmungen mit isothermen Wänden und starken Temperaturgradienten nahe der Wand. Ein großer Fortschritt bezüglich des Vergleiches solcher Strömung mit inkompressiblen Fällen gelang mit der semilokalen Skalierung durch Huang et al. [74], welche die Wandschubspannungsgeschwindigkeit und das viskose Längenmaß auf Basis des lokalen Dichte- und Viskositätsverlaufs definiert. Auf diese Weise kann beispielsweise die veränderte Länge der Streaks in der Übergangsschicht berücksichtigt werden [111, 106]. Entsprechend kann eine semilokale Reynoldszahl gebildet werden, die analog zu den Temperatur- und Dichteprofilen über den Kanal stark variiert [111]. Patel et al. [112] fanden heraus, dass die turbulenten Statistiken und auch die wandnahen turbulenten Strukturen stark durch die Profile dieser semilokalen Reynoldszahl beeinflusst sind und deren Abhängigkeit von den individuellen Dichte- und Viskositätsprofilen vernachlässigbar ist. Trettel und Larsson [142] berücksichtigten in ihrer Transformation für die mittlere Geschwindigkeit zusätzlich wandnormale Gradienten der Dichte und Viskosität. Aufgetragen über der semilokalen Wandkoordinate liefert die Transformation hervorragende Überlappung mit dem inkompressiblen Fall auch für isotherme Wände mit starkem Wandwärmeübergang. Verschiedene Kompressibilitätstransformationen von van Driest [143], Huang [74], Brun [25] und Trettel & Larsson [142] wurden in Modesti und Pirozzoli [104] verglichen, auch unter dem Gesichtspunkt einer geeigneten Reibungs-Reynoldszahl, bei der die Strömungen über verschiedenen Machzahlen hinweg und mit den inkompressiblen Daten verglichen werden sollten. Die Wahl ist aufgrund der variierenden Dichte und Viskosität in den kompressiblen Strömungen nicht eindeutig. Modesti und Pirozzoli [104] definierten deshalb analog zur inkompressiblen Reynoldszahl $Re_\tau = h/\delta_\nu$ basierend auf der halben Kanalhöhe h und dem viskosen Längenmaß δ_ν eine Reynoldszahl $Re_{\tau I} = y_I(h)/\delta_\nu$ mithilfe der jeweiligen transformierten wandnormalen Koordinate y_I in der Kanalmitte, um a-posteriori die "relevanteste" Reynoldszahl anhand der erfolgreichsten Transformation zu ermitteln. Für den verwendeten Datensatz kompressibler Kanalströmungen mit isothermen Wänden wurde eine sehr gute Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeit transformiert nach Trettel & Larsson bestätigt. Die Reynoldsspannungen fielen für verschiedene Mach- und Reynoldszahlen am besten aufeinander, wenn diese gemäß Huang und Trettel mit der lokalen Dichte gewichtet und über der semilokalen Wandkoordinate aufgetragen wurden. Somit ist die semilokale Reynoldszahl

in der Kanalmitte der entscheidende Vergleichsparameter. Einzig ein erhöhter Peak der Stromabkomponente gegenüber dem inkompressiblen Fall blieb auffällig [104]. Während die beschriebenen Transformationen für Kanalströmungen sehr präzise sind, ergeben sich Ungenauigkeiten in der mittleren Geschwindigkeit speziell bei hypersonischen Grenzschichten [34]. Andere und zusätzliche physikalische Argumentationen zur Beschreibung intrinsischer Kompressibilitätseffekte wurden daher in neueren Transformationen von Griffin et al. [68] und Hasan et al. [73] verwendet um für ein weiteres Spektrum an Strömungskonfigurationen ein universelles Verhalten zu erzielen.

Beeinflussung kompressibler Strömungen
Nur wenige Arbeiten untersuchen transversale Oszillationsmethoden unter kompressiblen Strömungsbedingungen. Ni et al. [108] führten direkte numerische Simulationen von supersonischen Grenzschichtströmungen über eine oszillierende Wand durch, bei der Machzahl 2.9 und Reynoldszahl 16000 basierend auf Werten der ankommenden freien Strömung und der Dicke der turbulenten Grenzschicht an der vorderen Kante der ebenen Platte. Der Fokus richtete sich weniger auf die Effizienz der Widerstandsreduktion, sondern auf die Beziehung zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld. Sie folgerten, dass der Wärmetransportmechanismus der Turbulenz konsistent mit dem turbulenten Impulstransport im unbeeinflussten und beeinflussten Fall ist und die Reynoldsanalogien gültig sind. Die Widerstandsreduktion war in gleicher Größenordnung wie bei Kanalströmungen aus der Literatur mit denselben Beeinflussungsparametern. Eine grobe Schlussfolgerung war deshalb, dass die widerstandsreduzierende Eigenschaft der Wandoszillationen in supersonischer Grenzschichtströmung konsistent mit der in inkompressibler Kanalströmung ist und Kompressibilität keinen bedeutenden Einfluss auf die Methode hinsichtlich der Widerstandsreduktion haben dürfte. Das gleiche Verfahren wurde in Yao und Hussain [154] in turbulenter Kanalströmung mit Machzahlen bis 1.5 und Reynoldszahlen basierend auf der volumengemittelten Dichte und Geschwindigkeit bis 7667 angewandt. Durch die enthaltenen inkompressiblen Fälle war ein direkter Vergleich der Widerstandsreduktion möglich. Speziell für Oszillationsperioden $T^+ < 100$ wurde eine starke Zunahme der Widerstandsreduktionsrate bezüglich der inkompressiblen Ergebnisse festgestellt, mit teilweiser Relaminarisierung der Strömungen. Die Analyse erfolgte größtenteils auf Basis viskoser Wandeinheiten. Erst gegen Ende des Manuskripts wurde die semilokale Skalierung verwendet, was die optimale Oszillationsperiode eines inkompressiblen und supersonischen Falls mit gleicher semilokaler Reynoldszahl in der Kanalmitte wesentlich besser aufeinander abbildete. Wandernde Transversalwellen in Strömungsrichtung wurden in Gattere et al. [58] in kompressibler Kanalströmung mit Reynoldszahl $Re_\tau = 400$ und Machzahlen 0.3, 0.8 und 1.5 angewandt. In Abhängigkeit davon, wie die Strömungen verschiedener Machzahlen untereinander verglichen wurden, ergab sich für die transsonische und supersonische Machzahl im einen Fall eine ausgeprägte Steigerung der Widerstandsreduktion für kleine zeitliche Frequenzen und räumliche Wellenzahlen und im anderen Fall nur eine marginal höhere Widerstandsreduktion gegenüber der nahezu inkompressiblen Strömung. Ahmad et al. [4] untersuchten eben-

falls Wanderwellen in kompressibler Kanalströmung mit Machzahl 1.5 anhand von 12 verschiedenen Kombinationen der Beeinflussungsparameter. Geeignete Skalierungen fehlen jedoch, um den Einfluss der Reynolds- und Machzahl korrekt zu erfassen. Deren Variation wurde für einzelne Fälle unter fixen Beeinflussungsparametern untersucht, sodass sich mit einer weiteren Steigerung der Machzahl auf 2.5 eine Verschlechterung der Widerstandsreduktion ergab. Rouhi et al. [125] untersuchten transversale Anregung an der Wand eines offenen Kanals mit erzwungener Konvektion, entweder als ebene Oszillation oder als Wanderwelle in Stromrichtung, mithilfe direkter numerischer Simulation unter dem Aspekt einer veränderlichen Prandtl-Zahl und des Wärmetransports. Es zeigte sich, dass die Beeinflussung den turbulenten Wärmetransport stärker reduzieren kann als den Reibungswiderstand für Prandtl-Zahlen $Pr \gtrsim 4$.

Ziele und Aufbau der Arbeit

Die kurze Diskussion der bisher erschienenen, für die Beeinflussung kompressibler Strömungen relevanten Literatur zeigt, dass weitere Simulationen notwendig sind um den Einfluss der Kompressibilität auf die Widerstandsreduktion transversaler Wandoszillationen allgemeingültig beschreiben zu können. Für die konkrete Methode der stehenden Welle transversaler Wandgeschwindigkeit soll überprüft werden, inwiefern sich kompressible Strömungsbedingungen auf die Ergebnisse der Widerstandsreduktion in Kanalströmungen mit isothermen Wänden auswirken. Zu Beginn stellen sich drei wesentliche Fragen, welche in der Dissertation beantwortet werden:

1. Welchen Einfluss hat die Kompressibilität, beziehungsweise Effekte der variablen Fluideigenschaften und intrinsische Effekte auf die Methodik der Widerstandsreduktion?

2. Müssen die Beeinflussungsparameter angepasst werden oder kann die Strategie aus inkompressiblen Strömungen übernommen werden?

3. Eignet sich das Verfahren auch für andere Anwendungen, deren Zielsetzung über die reine Widerstandsreduktion der Strömung hinausgeht?

Nach Vorstellung der verwendeten numerischen Methoden in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 der Einfluss der Mach- und Reynoldszahl unter Berücksichtigung gängiger Kompressibilitätstransformationen und Skalierungen untersucht. Durch eingehende Analyse der unbeeinflussten und beeinflussten Fälle wird eine Erklärung für das geänderte Verhalten gesucht. Um den starken Einfluss von Wärmeleitungseffekten zu minimieren, werden in Kapitel 4 verschiedene externe Kühlterme berücksichtigt, in Anlehnung an die Arbeiten von Yu et al. [157], Gattere et al. [58] und Hasan et al. [72]. Es stellen sich auf diese Weise andere Temperaturprofile ein und die Bedingungen nahe der Wand entsprechen eher denen von Grenzschichtströmungen mit nur

schwachem bis moderatem Wärmeübergang. Durch einen Vergleich der verschiedenen resultierenden Strömungsbedingungen soll der Einfluss der Kompressibilität auf die Ergebnisse der Widerstandsreduktion neu eingeordnet und genauer zwischen intrinsischen Kompressibilitätseffekten und Wärmeleitungseffekten differenziert werden. Unabhängig von Kompressibilität beschäftigt sich Kapitel 5 mit einem exemplarischen Anwendungsfall. Die Beeinflussungsmethode wird bei einer niedrigen Machzahl von 0.3 erstmalig angewandt um einen Freistrahl austretend aus einem runden Rohr zu beeinflussen. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, wie sich die Wellenbewegungen der Rohrwand und der reduzierte Wandwiderstand grundsätzlich auf die Entwicklung des Freistrahls auswirken. Das Kapitel 6 liefert eine Zusammenfassung der Arbeit, sowie einen kritischen Rück- und Ausblick.

2. Numerische Methoden und Algorithmen

2.1. Programmcode PyFR

Zur Lösung der zugrunde liegenden Gleichungen für kompressible Strömungen idealer Gase wurde das Open-Source Paket PyFR [149] verwendet, entwickelt von zwei Teams am Imperial College London unter Peter Vincent und an der Texas A&M University unter Freddie Witherden. Der Name leitet sich ab von der verwendeten Programmiersprache **Py**thon für die übergeordnete Umgebung, sowie von dem implementierten Schema zur numerischen Lösung, der **F**lux **R**econstruction Methode. Der Code löst Advektions-Diffusions-Probleme wie die Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen, sowohl zwei- als auch dreidimensional. Grundsätzlich können (gemischte) unstrukturierte Gitter verwendet werden, bestehend aus den Elementtypen Dreieck, Viereck, Hexaeder, Prisma, Tetraeder und Pyramide, wobei für die Anwendungsfälle dieser Arbeit nur strukturierte hexaedrische Gitter benutzt wurden.

PyFR konnte als einer der ersten kompressiblen Strömungslöser neben CPU Clustern auch moderne GPU Cluster für die Berechnung nutzen. Die Weiterentwicklung hochparalleler Graphical Processing Units (GPUs) war der Schlüssel auf dem Weg zu Exascale Computing, sodass mittlerweile sieben der Top Ten Supercomputer GPUs nutzen [129]. NVIDIAs Architekturen und das entsprechende CUDA Programmiergerüst ist am weitesten verbreitet. Die Verfügbarkeit von Anbindungen an die Programmiersprachen Python (pyCUDA) und Fortran (CUDA Fortran) erleichtern den Entwicklern die Portierung ihrer Codes auf GPUs. Zu den weiteren kompressiblen Strömungslösern, die in den letzten Jahren für NVIDIA Architekturen entwickelt wurden, gehört ZEFR [123], der eine Kombination der Programmiersprachen C++ und CUDA nutzt und ebenfalls die Flux Reconstruction Methode verwendet. Eine Besonderheit ist die Unterstützung von überlappenden Gittern. STREAmS [16] ist ein strukturierter Finite-Differenzen Code für kompressible, wandgebundene Strömungen zur Untersuchung von Kanal- und Grenzschichtströmungen, sowie Grenzschicht-Stoß

Interaktionen bis in den hypersonischen Bereich und nutzt FORTRAN und CUDA. Neben NVIDIA Hardware und der entsprechenden CUDA Umgebung verwenden bestimmte andere Cluster wiederum Hardware der Firmen AMD und Intel. Der Code URANOS [41] nutzt daher das allgemeine quelloffene Programmiergerüst OpenACC für die Lösung wandgebundener, kompressibler Strömungen um GPUs verschiedenster Hersteller nutzen zu können. Der Finite-Differenzen Code hoher Ordnung bietet zudem drei verschieden Möglichkeiten der Turbulenzmodellierung, Direct Numerical Simulations (DNS), Large-Eddy Simulations (LES) und Wall-modeled LES (WMLES). Galt früher der Grundsatz "Software outlives Hardware", sind die Entwickler heute aufgrund des Trends der steigenden Hardware Heterogenität im High-Performance Computing (HPC) zur häufigen Umgestaltung ihrer Codes gezwungen, um von den leistungsstärksten Computerressourcen profitieren zu können [80]. Wünschenswert ist daher eine Multi-Backend Version eines Codes, welche übergeordnet die Adaptierung auf verschiedene Plattformen mit bestmöglicher Performance ermöglicht. So wurde beispielsweise eine neue Version des oben genannten kompressiblen Finite-Differenzen Codes STREAmS entwickelt (STREAmS-2 [129]), der ein CUDA FORTRAN (NVIDIA), HIP (AMD) und CPU Backend beinhaltet. In dem hier verwendeten PyFR wird über Mako Templates domänenspezifischer Code für verschiedenste Hardwarearchitekturen generiert. Eine Vielzahl an Backends wird unterstützt, darunter die anbieterspezifische Software CUDA (NVIDIA), HIP (AMD), Metal (Apple) oder die allgemeinen quelloffenen Schnittstellen OpenCL und OpenMP.

2.2. Grundgleichungen

Die zugrundeliegenden Gleichungen für kompressible Strömungen idealer Gase sind die dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen, ein System von Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Sie lauten in konservativer Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{xj}}{\partial x_j}\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}\,, \tag{2.3}$$

mit dem viskosen Spannungstensor τ_{ij} und der Wärmeleitung

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}\,, \tag{2.4}$$

wobei $k = c_p\mu/Pr$ die thermische Leitfähigkeit, c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und Pr die Prandtl-Zahl, das Verhältnis von viskoser zu thermischer Diffusionsrate, bezeichnet. Die Grundgleichungen 2.1-2.3 werden im Hinblick auf die verwendete Flux Reconsruction Methode leicht umformuliert zu

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_\alpha + f_\rho \delta_{\alpha 1} + f_{\rho u_1} \delta_{\alpha 2} + f_{\rho u_1} u_1 \delta_{\alpha 5} = 0 \tag{2.5}$$

unter Nutzung von Feldvariablen mit Index α. Der Lösungsvektor

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)^T \tag{2.6}$$

in Abhängigkeit der Position $\mathbf{x}$ und der Zeit t enthält die Dichte ρ, die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u}$ in den drei Raumrichtungen, sowie die totale Energie pro Volumen E. Druck und totale Energie hängen zusammen über das ideale Gasgesetz:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho \left|\mathbf{u}\right|^2 . \tag{2.7}$$

Das Kronecker delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & i \neq j \\ 1\,, & i = j \end{cases} . \tag{2.8}$$

In Gleichung 2.5 ist, von externen Quelltermen f abgesehen, nur noch die zeitliche Ableitung des Lösungsvektors und die Divergenz des Flusses $\mathbf{f}_\alpha$ enthalten. Der Fluss $\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v})$ enthält den Lösungsvektor und seine Gradienten und wird weiterhin in einen reibungsfreien Term $\mathbf{f}^{(inv)}$ und einen reibungsbehafteten Term $\mathbf{f}^{(vis)}$ aufgeteilt, sodass $\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{f}^{(inv)} - \mathbf{f}^{(vis)}$ gilt:

$$\mathbf{f}^{(inv)} = \begin{bmatrix} \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 \\ \rho u_1^2 + p & \rho u_2 u_1 & \rho u_3 u_1 \\ \rho u_1 u_2 & \rho u_2^2 + p & \rho u_3 u_2 \\ \rho u_1 u_3 & \rho u_2 u_3 & \rho u_3^2 + p \\ u_1(E+p) & u_2(E+p) & u_3(E+p) \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{f}^{(vis)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \\ u_i\tau_{i1} + \mu\frac{c_p}{P_r}\partial_x T & u_i\tau_{i2} + \mu\frac{c_p}{P_r}\partial_y T & u_i\tau_{i3} + \mu\frac{c_p}{\mathrm{Pr}}\partial_z T \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

In Gleichung 2.10 bezeichnet μ die dynamische Viskosität. Die Komponenten des viskosen Spannungstensors sind definiert als

$$\tau_{ij} = \mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u} \tag{2.11}$$

und die Temperatur kann mithilfe des Drucks p, der Dichte ρ und des idealen Gasgesetzes ausgedrückt werden als

$$T = \frac{1}{c_v} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} . \tag{2.12}$$

Für die Kanalströmungen wurden in Gleichung 2.5 zusätzlich räumlich konstante Quellterme hinzugefügt. Der Quellterm $f_{\rho u_1}$ treibt die Strömung in Stromabrichtung an und die dazugehörige geleistete Arbeitsrate $f_{\rho u_1} u_1$ wird zur Energiegleichung addiert. Durch die Volumenkraft f_ρ lässt sich die mittlere Dichte beeinflussen. Auf die Quellterme wird in Abschnitt 3.1 genauer eingegangen.

2.3. Flux Reconstruction Methode

Zur Lösung der Erhaltungssätze in Gleichung 2.5 wird die Flux Reconstruction Methode verwendet. Als Verfahren hoher Ordnung hat sie das Potential eine hohe Genauigkeit bei gleichzeitig vertretbarem Rechenaufwand zu liefern, während Verfahren niedriger Ordnung zwar als robust und zuverlässig gelten, aber als weniger genau. Prominente Beispiele für Methoden hoher Ordnung für unstrukturierte, gemischte Gitter sind die Discontinuous Galerkin (DG) [33] und Spectral Difference (SD) Methode (auch "staggered-grid Chebyshev multidomain method" [90]). Die von Huynh eingeführte Flux Reconstruction Methode kann als vereinendes System von Methoden hoher Ordnung für unstrukturierte Gitter angesehen werden. Sie vereint die DG und SD Methoden und liefert vereinheitlichte Versionen dieser beiden Methoden [77], je nach Wahl der entsprechenden Fluss-Funktion. Neben der Eigenschaft der Exaktheit von Methoden hoher Ordnung weisen Flux Reconstruction Methoden in Kombination mit einer expliziten Zeitintegrationsmethode einen hohen Grad an örtlicher Kompaktheit auf, was die Methode für moderne Computerarchitekturen prädestiniert. In den letzten beiden Dekaden ist die Disparität zwischen der Prozessorgeschwindigkeit und der Speicherdatenübertragungsrate gestiegen, weshalb oft der Speicherzugriff leistungsbegrenzend ist [149]. Die Prozessoren sind stark angewiesen auf den schnellen Cache oder gemeinsam genutzten Speicher um die Rechengeschwindigkeit aufrecht zu erhalten. Ein weiterer Trend bei den Computerarchitekturen ist Vektorisierung und Multithreading durch immer mehr Prozessorkerne. Eine Vielzahl unabhängiger kleinerer Aufgaben können so auf die Kerne und Vektorverarbeitungseinheiten aufgeteilt und parallelisiert werden. Auch hierfür eignet sich die Flux Reconstruction Methode in Verbindung mit einer expliziten Zeitintegrationsmethode optimal [149].

2.3.1. 1D Kurzdarstellung

Das numerische Schema soll zunächst anhand des 1D Falls mithilfe von Abbildung 2.1 grob skizziert werden. Gesucht ist die Lösung u des skalaren Erhaltungssatzes in

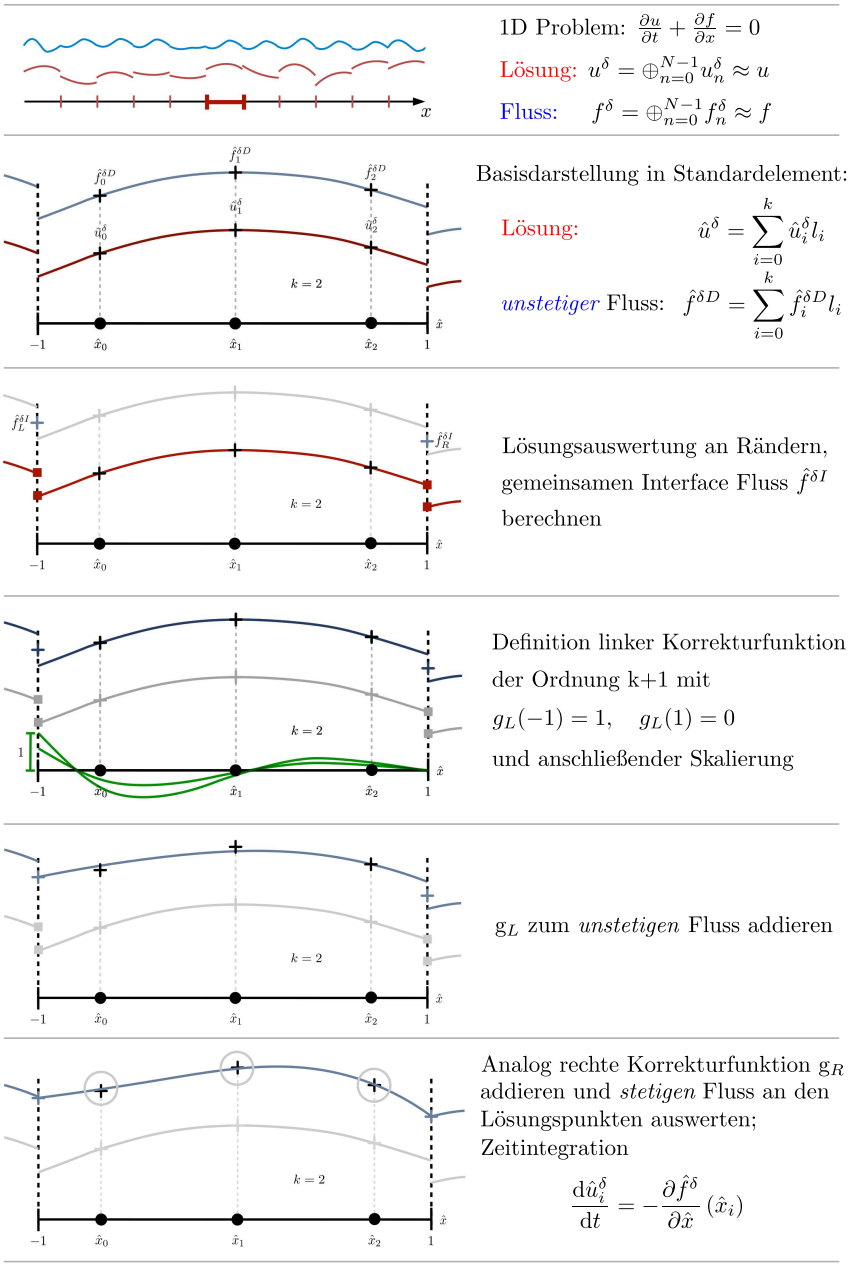


Abbildung 2.1: Schema der Flux Reconstruction Methode anhand des 1D Falls. Bilder aus Seminarpräsentation: **PyFR: High-Order Accurate Cross-Platform Petascale Computational Fluid Dynamics with Python.** F. D. Witherden, P. E. Vincent, *NASA Ames, Moffett Field, CA, USA*, May 2016.

konservativer Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \tag{2.13}$$

Diese wird durch elementweise *unstetige* Funktionen (Polynome der Ordnung k, hier $k = 2$) repräsentiert. Der Fluss f wird approximiert durch elementweise *stetige* Polynome der Ordnung $k + 1$. Innerhalb des Standardelements $\hat{x} \in [-1\ 1]$ bilden die Lösungspunkte (z.B. Gauss-Legendre oder Gauss-Legendre-Lobatto Quadraturpunkte) $\hat{x}_i$ die Basis für die Lösungsfunktion $\hat{u}^\delta = \sum_{i=0}^{k} \hat{u}_i^\delta l_i$ der Ordnung k. Gleichermaßen wird der *unstetige* Fluss im Standardelement mit dieser Basis dargestellt als $\hat{f}^{\delta D} = \sum_{i=0}^{k} \hat{f}_i^{\delta D} l_i$. Die Lösung $\hat{u}^\delta$ wird an den Elementgrenzen ausgewertet und der gemeinsame Interface Fluss $\hat{f}^{\delta I}$ an den beiden Elementgrenzen berechnet. Um einen über die Elementgrenzen stetigen Fluss zu bekommen wird die linke und rechte Korrekturfunktion g_L und g_R der Ordnung $k + 1$ allgemein definiert mit den Eigenschaften $g_L(-1) = 1,\ \ g_L(1) = 0$ bzw. $g_R(-1) = 0,\ \ g_R(1) = 1$ und $g_L(\hat{x}) = g_R(-\hat{x})$. Die Korrekturfunktionen werden so skaliert, dass nach Addition zum unstetigen Fluss der vorher bestimmte gemeinsame Interface Fluss an den Elementrändern abgebildet wird. Nachdem nun der *stetige* Fluss vorliegt, kann die Erhaltungsgleichung mithilfe der Polynomdarstellungen im Standardelement formuliert werden zu

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i^\delta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \hat{f}^\delta}{\partial \hat{x}}(\hat{x}_i)\,. \tag{2.14}$$

Dementsprechend wird die Divergenz des stetigen Flusses $\hat{f}^\delta$ an den Lösungspunkten $\hat{x}_i$ ausgewertet und in der Zeit weiterentwickelt. Die Eigenschaften der Flux Reconstruction Methode hängen im Wesentlichen ab von der Lage der Lösungspunkte, dem Interface Fluss und der Korrekturfunktion. Je nach Wahl der Korrekturfunktionen können unter anderem die bekannten Methoden DG und SD wie anfangs erwähnt rekonstruiert werden [77].

2.3.2. 3D Navier-Stokes Gleichungen

Die Schritte der Flux Reconstruction Methode werden im Folgenden etwas detaillierter bezüglich der dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen und deren Lösung innerhalb des Programmcodes PyFR anlehnend an Witherden et al. [149] erläutert. Ausgangspunkt sind die dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen in konservativer Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_\alpha = 0\,, \tag{2.15}$$

welche mithilfe der Hilfsvariablen $\mathbf{q}$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umformuliert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_\alpha(u, \mathbf{q}) &= 0 \\ \mathbf{q}_\alpha - \nabla u_\alpha &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Betrachtung innerhalb eines Elements $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{en}}$, wobei e für den Elementtyp (Hexaeder, Prisma, Tetraeder) steht und n der Elementindex ist, ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{en\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_{en\alpha} &= 0 \\ \mathbf{q}_{en\alpha} - \nabla u_{en\alpha} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Im nächsten Schritt wird das System im Standardelement $\hat{\mathbf{\Omega}}_e$ formuliert, welches durch die transformierten Raumkoordinaten $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ beschrieben wird. Die Umrechnung zwischen den Räumen erfolgt mithilfe der Abbildungsfunktion $\mathcal{M}$ und ihrer Inversen

$$\begin{aligned} x_i &= \mathcal{M}_{eni}(\tilde{\mathbf{x}}), & \mathbf{x} &= \mathcal{M}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}), \\ \tilde{x}_i &= \mathcal{M}^{-1}_{eni}(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{\mathbf{x}} &= \mathcal{M}^{-1}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

sowie den Jacobi Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{en} = J_{enij} &= \frac{\partial \mathcal{M}_{eni}}{\partial \tilde{x}_j}, & J_{en} &= \det \mathbf{J}_{en}, \\ \mathbf{J}^{-1}_{en} = J^{-1}_{enij} &= \frac{\partial \mathcal{M}^{-1}_{eni}}{\partial \tilde{x}_j}, & J^{-1}_{en} &= \det \mathbf{J}^{-1}_{en} = \frac{1}{J_{en}}\,. \end{aligned}$$

Mit der transformierten Lösung, dem Fluss und der Hilfsvariablen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{en\alpha} = \tilde{u}_{en\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= J_{en}(\tilde{\mathbf{x}}) u_{en\alpha}(\mathcal{M}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}), t), \\ \tilde{\mathbf{f}}_{en\alpha} = \tilde{\mathbf{f}}_{en\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= J_{en}(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{J}^{-1}_{en}(\mathcal{M}_{en}(\tilde{\mathbf{x}})) \mathbf{f}_{en\alpha}(\mathcal{M}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}), t), \\ \tilde{\mathbf{q}}_{en\alpha} = \tilde{\mathbf{q}}_{en\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= \mathbf{J}^{T}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{q}_{en\alpha}(\mathcal{M}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}), t), \end{aligned} \tag{2.18}$$

sowie der Notation $\tilde{\nabla} = \partial / \partial \tilde{x}_i$ wird das System 2.16 im Standardelement zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{en\alpha}}{\partial t} + J^{-1}_{en} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{en\alpha} &= 0\,, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{en\alpha} - \tilde{\nabla} u_{en\alpha} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Weiterhin wird für die Polynomapproximation ein Satz an Lösungspunkten $\{\tilde{\mathbf{x}}^{(u)}_{\mathrm{e}\rho}\}$ innerhalb des Standardelements $\hat{\mathbf{\Omega}}_e$ benötigt, mit dem Index $0 \leq \rho < N^{(u)}_{\mathrm{e}}(\wp)$ in Abhängigkeit der Polynomordnung $\wp$. Der zugehörige Satz an Basisfunktionen wird bezeichnet als $\{\ell^{(u)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}})\}$ mit der Eigenschaft $\ell^{(u)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}}^{(u)}_{e\rho}) = \delta_{\rho\sigma}$. Analog wird ein Satz an Flusspunkten $\{\tilde{\mathbf{x}}^{(f)}_{e\rho}\}$ mit $0 \leq \rho < N^{(f)}_{e}(\wp)$ auf den Rändern $\partial\hat{\mathbf{\Omega}}_e$ definiert mit nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektoren $\{\hat{\tilde{\mathbf{n}}}^{(f)}_{e\rho}\}$. Die Koordinaten der Flusspunkte am Interface benachbarter Elemente im physikalischen Raum müssen dabei übereinstimmen (siehe Abbildung 2.2).

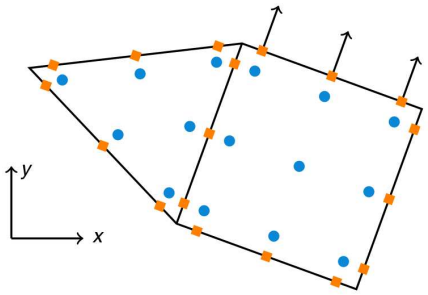


Abbildung 2.2: Lösungspunkte (Kreise) und Flusspunkte (Quadrate) der Flux Reconstruction Methode am Beispiel von einem Dreiecks- und Viereckselement im physikalischen Raum mit Normalenvektoren an der oberen Kante des Vierecks [150]

Der erste Schritt zur Lösung des Systems 2.19 beinhaltet die Auswertung der unstetigen Lösung an den Flusspunkten

$$u^{(f)}_{e\sigma n\alpha} = u^{(u)}_{e\rho n\alpha}\ell^{(u)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}}^{f}_{e\sigma}), \tag{2.20}$$

wobei $u^{(u)}_{e\rho n\alpha}$ die approximierte Lösung am Lösungspunkt $\tilde{\mathbf{x}}^{(u)}_{e\rho}$ ist. Damit wird die *gemeinsame* Lösung für das Flusspunktpaar $e\rho n$ und $\widetilde{e\rho n}$ zweier angrenzender Elemente berechnet zu

$$\mathfrak{C}_\alpha u^{(f)}_{e\rho n\alpha} = \mathfrak{C}_\alpha u^{(f)}_{\widetilde{e\rho n}\alpha} = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) u^{(f)}_{e\rho n\alpha} + \left(\frac{1}{2} + \beta\right) u^{(f)}_{\widetilde{e\rho n}\alpha}\,, \tag{2.21}$$

wobei der Parameter β den upwind / downwind Grad einstellt. Des Weiteren werden Korrekturfunktionen als Vektorfelder für die Flusspunkte $\mathbf{g}^{(f)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}})$ benötigt mit der Eigenschaft

$$\hat{\tilde{\mathbf{n}}}^{(f)}_{e\sigma} \cdot \mathbf{g}^{(f)}_{e\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \tag{2.22}$$

wobei deren Divergenz dieselbe Polynomordnung wie die Lösung liefert. Mit deren Hilfe kann nun die *stetige* Lösung der Hilfsgleichung in 2.19 angegeben werden:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(u)}_{e\sigma n\alpha} = \left[\hat{\tilde{\mathbf{n}}}^{(f)}_{e\rho} \cdot \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{g}^{(f)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}})\{\mathfrak{C}_\alpha u^{(f)}_{e\rho n\alpha} - u^{(f)}_{e\rho n\alpha}\} + u^{(u)}_{e\nu n\alpha}\tilde{\nabla}\ell^{(u)}_{e\nu}(\tilde{\mathbf{x}})\right]_{\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}^{(u)}_{e\sigma}}. \tag{2.23}$$

Für den letzten Term wurde die Polynomapproximation mit Basisdarstellung der Lösungspunkte eingesetzt. Der erste Term korrigiert die Unstetigkeit basierend auf der *gemeinsamen* Lösung 2.21 an den Flusspunkten, wobei der Term innerhalb der geschweiften Klammer den Sprung am Interface beschreibt. Mit den Transformationen 2.18 kann die Lösung im physikalischen Raum an den Lösungs- und Flusspunkten berechnet werden zu

$$\mathbf{q}^{(u)}_{e\sigma n\alpha} = \mathbf{J}^{-T\,(u)}_{e\sigma n}\tilde{\mathbf{q}}^{(u)}_{e\sigma n\alpha}\,, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{q}^{(f)}_{e\sigma n\alpha} = \ell^{(u)}_{e\rho}(\tilde{\mathbf{x}}^{(f)}_{e\sigma})\mathbf{q}^{(u)}_{e\sigma n\alpha}\,, \tag{2.25}$$

mit $\mathbf{J}_{e\sigma n}^{-T\,(u)} = \mathbf{J}_{en}^{-T}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\sigma}^{(u)})$. Da der Fluss in dem System erster Ordnung 2.16 eine Funktion der Lösung und der Hilfsvariablen ist, kann dieser nun ausgewertet und in das Standardelement transformiert werden gemäß

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e\rho n\alpha}^{(u)} = J_{e\rho n}^{(u)} \mathbf{J}_{e\rho n}^{-1\,(u)} \mathbf{f}_\alpha(u_{e\rho n}^{(u)},\, \mathbf{q}_{e\rho n}^{(u)})\,, \tag{2.26}$$

mit $J_{e\rho n}^{(u)} = \det \mathbf{J}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\rho}^{(u)})$. Hiermit kann unter Zuhilfenahme der Basis, den Flusspunkten und deren Normalenvektoren der transformierte Normalenfluss an den Flusspunkten berechnet werden:

$$\tilde{f}_{e\sigma n\alpha}^{f_\perp} = \ell_{e\rho}^{(u)}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\sigma}^{(f)}) \hat{\tilde{\mathbf{n}}}_{e\sigma}^{f} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e\rho n\alpha}^{u}\,. \tag{2.27}$$

Im physikalischen Raum werden die nach außen zeigenden Normalenvektoren an den Flusspunkten zu $\mathbf{n}_{e\sigma n}^{(f)} = \mathbf{J}_{e\sigma n}^{-T\,(f)} \hat{\tilde{\mathbf{n}}}_{e\sigma}^{(f)}$, wobei $\mathbf{J}_{e\sigma n}^{-T\,(f)} = \mathbf{J}_{en}^{-T}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\sigma}^{(f)})$. Diese können mithilfe des entsprechenden Einheitsvektors und der Amplitude $n_{e\sigma n}^{(f)}$ ausgedrückt werden als $n_{e\sigma n}^{(f)} \hat{\mathbf{n}}_{e\sigma n}^{(f)}$, wobei der Einheitsvektor gemäß $\hat{\mathbf{n}}_{e\sigma n}^{(f)} = -\hat{\mathbf{n}}_{\widetilde{e\sigma n}}^{(f)}$ gleich dem des Nachbarelements mit entgegengesetztem Vorzeichen sein muss. Damit ist alles bekannt um den gemeinsamen Normalenfluss an einem Flusspunktpaar aufzustellen zu

$$\mathfrak{F}_\alpha f_{e\sigma n\alpha}^{f_\perp} = -\mathfrak{F}_\alpha f_{\widetilde{e\sigma n}\alpha}^{f_\perp} = \mathfrak{F}_\alpha^{(inv)} - \mathfrak{F}_\alpha^{(vis)}\,, \tag{2.28}$$

wobei man $\mathfrak{F}_\alpha^{(inv)}$ durch einen Riemann Löser angewandt auf den nichtviskosen Anteil des Flusses erhält. Auch hier muss der austretende Normalenfluss gleich dem eintretenden Normalenfluss am angrenzenden Element sein im Sinne eines konservativen numerischen Verfahrens. Für den viskosen Anteil gilt analog zu der gemeinsamen Lösung 2.21

$$\mathfrak{F}_\alpha^{(vis)} = \hat{\mathbf{n}}_{e\sigma n}^{(f)} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \mathbf{f}_{e\sigma n\alpha}^{(vis)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{f}_{\widetilde{e\sigma n}\alpha}^{(vis)} \right\} + \tau \left(u_{e\sigma n\alpha}^{(f)} - u_{\widetilde{e\sigma n}\alpha}^{(f)} \right) \tag{2.29}$$

wobei über den Parameter τ zusätzlich die Abweichung der Lösung am Flusspunkt bezüglich des angrenzenden Elements einfließt. Der gemeinsame Normalenfluss in Gleichung 2.28 wird nun über

$$\mathfrak{F}_\alpha \tilde{f}_{e\sigma n\alpha}^{f_\perp} = J_{e\sigma n}^{(f)} n_{e\sigma n}^{(f)} \mathfrak{F}_\alpha f_{e\sigma n\alpha}^{(f_\perp)} \tag{2.30}$$

in das Standardelement transformiert mit $J_{e\sigma n}^{(f)} = \det \mathbf{J}_{en}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\sigma}^{(f)})$. Analog zur Lösung der Hilfsgleichung in 2.23 wird die Divergenz des *stetigen* Flusses approximiert durch

$$(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{f}})_{e\rho n\alpha}^{(u)} = \left[\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{g}_{e\sigma}^{(f)}(\tilde{\mathbf{x}}) \left\{ \mathfrak{F}_\alpha \tilde{f}_{e\sigma n\alpha}^{(f_\perp)} - \tilde{f}_{e\sigma n\alpha}^{(f_\perp)} \right\} + \tilde{\mathbf{f}}_{e\nu n\alpha}^{(u)} \cdot \tilde{\nabla} \ell_{e\nu}^{(u)}(\tilde{\mathbf{x}}) \right]_{\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_{e\rho}^{(u)}} \tag{2.31}$$

mithilfe der Polynomdarstellung auf den Lösungspunkten, sowie der Korrekturfunktion und dem Sprung vom Normalenfluss auf den *gemeinsamen* Normalenfluss am

Interface. Einsetzen in den Erhaltungssatz im Standardelement (erste Zeile in 2.19) liefert

$$\frac{\partial u_{e\rho n\alpha}^{(u)}}{\partial t} = -J_{e\rho n}^{-1\,(u)}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{f}})_{e\rho n\alpha}^{(u)} \,. \tag{2.32}$$

Gegenüber Gleichung 2.19 ist der Index ρ der Polynombasis hinzugekommen und $J_{e\rho n}^{-1\,(u)} = \det \mathbf{J}_{en}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_{e\rho}^{(u)}) = 1/J_{e\rho n}^{(u)}$ ist die Determinante der inversen Jacobi Matrix an den Lösungspunkten. Gleichung 2.32 stellt ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar und kann mit den üblichen Zeitintegrationsverfahren, wie z.B. der Euler- oder Runge-Kutta Methode, gelöst werden.

2.3.3. Anti Aliasing

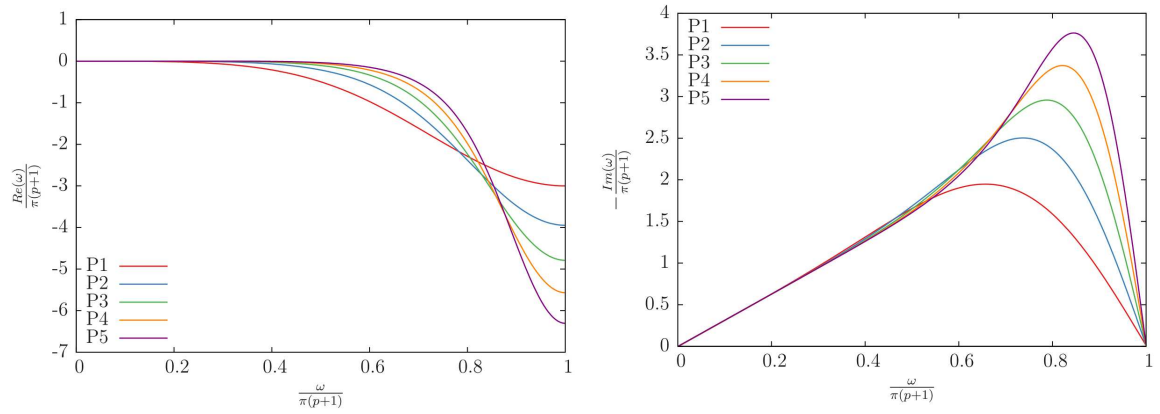
Innerhalb eines Flux Reconstruction Schrittes ist es immer wieder notwendig, Polynomprojektionen durchzuführen, im Einzelnen die Projektion des transformierten Flusses in den Polynomraum der Lösung innerhalb eines Elements, die Projektion des transformierten gemeinsamen Normalenflusses in den Polynomraum der Divergenz der Korrekturfunktion auf der Elementfläche und die Projektion der Divergenz des korrigierten Flusses in den Polynomraum der Lösung innerhalb eines Elements [110]. Die Durchführung dieser Projektionen lediglich durch Auswerten des entsprechenden Funktionals auf den Knotenpunkten (Kollokationsprojektion) kann zu Aliasing führen, indem Energie von unaufgelösten Moden fälschlicherweise in aufgelöste Moden übertragen wird und somit Genauigkeit und Stabilität der Lösung beeinflusst [110]. Antialiasing durch approximierte L^2-Projektion ist daher in PyFR implementiert. Bei der approximierten L^2-Projektion werden die Modalkoeffizienten des entsprechenden Polynoms exakt berechnet mit einer geeigneten Quadraturregel. Um den Aliasingfehler effektiv zu reduzieren, werden generell Quadraturregeln mit einer ausreichend hohen Ordnung gewählt, die deutlich über der Ordnung der Lösung liegt. Die Methode ist gegenüber der einfachen Kollokationsprojektion oder auch gegenüber modalem Filtern zur Begrenzung von Aliasingfehlern rechenintensiver, kommt jedoch im Gegensatz zur letzteren Methode ohne zusätzliche Parameter aus und ist nicht übermäßig dissipativ [110]. Park et al. [110] verglichen die beiden Methoden hinsichtlich Genauigkeit und Rechenaufwand basierend auf ILES einer Tragflächenumströmung mit Strömungsabriss und fanden gute Übereinstimmung der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte mit experimentellen Daten unter Verwendung von Anti Aliasing mittels L^2-Projektion.

2.3.4. ILES Eignung

Neben der hohen Genauigkeit, die Verfahren hoher Ordnung mitbringen und der Möglichkeit zwischen verschiedenen Hardwarearchitekturen hin- und herzuwechseln,

besitzt die Flux Reconstruction Methode die reizvolle Eigenschaft, implizite Large-Eddy Simulationen (ILES) durchführen zu können. LES findet unter anderem Anwendung bei komplexen turbulenten Strömungen, bei denen die zur Verfügung stehenden Computerressourcen keine direkte numerische Simulation erlauben. Dies gilt auch für einzelne Problemfälle dieser Arbeit, wie z.B. die Kanalströmungen unter Einbeziehung der Very Large Anisotropic Scales (VLAS), die Kanalströmungen bei hohen Mach- und Reynoldszahlen, sowie die Freistrahlsimulationen. Die großskaligen turbulenten Strukturen werden bei dieser Technik direkt aufgelöst und solche, die unter eine gewisse definierte Länge fallen, werden abgeschnitten. Typische Gitterweiten einer Grenzschicht in Strömungs- und in Spannweitenrichtung liegen bei einer DNS im Bereich $\Delta x_1^+ = 10-15$, $\Delta x_3^+ = 5$ bzw. bei $\Delta x_1^+ = 50-100$, $\Delta x_3^+ = 10-20$ im Fall einer wandaufgelösten LES [69] [1]. Durch die abgeschnittenen kleinsten Skalen kommt es folglich auch zu einem Eingriff in die Energiekaskade. Es existieren daher verschiedene sub-grid scale (SGS) Modelle, die den Aufbau kinetischer Energie in den kleinsten Skalen, die auf dem Rechengitter aufgelöst werden, begrenzen. Die Modelle dissipieren auf diesen Skalen Energie mit dem Ziel, die zu erwartenden Dissipationsraten aus Theorie und Experiment nachzubilden, setzen bei dem Energietransfer zwischen verschiedenen Längenskalen an oder nutzen eine Kombination dieser Ansätze [144]. Die SGS Modelle haben einige Einschränkungen hinsichtlich Implementierung und Rechenaufwand. Sie basieren auf der Annahme, dass numerische Fehler unbedeutend gegenüber den SGS Termen sind. Ghosal *et al.* [64] zeigten jedoch, dass sogar Verfahren achter Ordnung Diskretisierungsfehler aufweisen können, deren Betrag den der SGS Terme übersteigt [144]. Eine mögliche Lösung um Diskretisierungsfehler auf den kleinsten aufgelösten Skalen, wo SGS Modelle typischerweise am aktivsten sind, zu eliminieren, sind explizite Filter. Das zusätzliche explizite Filtern erfordert gegenüber der rein impliziten Gitterfilterung ein feineres Gitter, was wiederum zu erhöhtem Rechenaufwand führt ohne zusätzliche Skalen in der Strömung aufzulösen [144, 69]. Die Hauptaufgabe eines SGS Modells ist, Energie in den kleinsten turbulenten Skalen zu dissipieren. Diese liegen in den größten Wellenzahlen, die von dem numerischen Gitter aufgelöst werden können. Glücklicherweise besitzt die Flux Reconstruction Methode numerische Eigenschaften, die den Aufbau kinetischer Energie in den kleinsten Skalen implizit ohne weiteres Zutun in Form eines SGS Modells begrenzt. In [145] wurde durch von Neumann Analyse der linearen Advektionsgleichung gezeigt, dass die Flux Reconstruction Methode grundsätzlich dissipativ in den hohen Wellenzahlen ist, unabhängig von der gewählten Polynomordnung. Dabei wird untersucht, wie präzise das numerische Verfahren die Ausbreitung von Wellen auf dem diskretisierten Gebiet abbildet durch Vergleich mit der bekannten exakten Wellenausbreitungslösung. Die normierten Dissipations- und Dispersionsfehler sind für verschiedene Polynomordnungen (P1 bis P5) und einen upwind Interfacefluss in Abbildung 2.3 dargestellt.

[1] Das hochgestellte "+" kennzeichnet die Normierung in wandgebundenen Strömungen mit dem viskosen Längenmaß $l^+ = \nu/u_\tau$ in Wandnähe mit der Viskosität ν und der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$.



(a) **(b)**

Abbildung 2.3: Normierte Dissipation (a) und Dispersion (b) der Flux Reconstruction Methode für verschiedene Polynomordnungen P1 bis P5 [144].

Die höchste Dissipation findet bei hohen Wellenzahlen, d.h. auf den kleinsten aufgelösten Skalen, statt. Diese sind zugleich mit den höchsten Dispersionsfehlern behaftet (Abbildung 2.3 b). Somit werden grundsätzlich die kleinsten turbulenten Skalen dissipiert im Sinne eines einfachen SGS Modells. Die Frage ob die Dissipation ausreichend ist, um auf ein explizites SGS Modell zu verzichten, wurde in Vermeire et al. [144] adressiert, indem der implizite LES Ansatz für verschiedene anerkannte Testfälle wie Taylor-Green Vortex, Kanalströmung und SD7003 Tragflügelumströmung, sowie verschiedene Polynomordnungen gegenüber DNS und LES anderer Gruppen validiert wurde. Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass die numerische Dissipation bei den hohen Frequenzen in der Lage ist, die kinetische Energie der kleinsten Skalen zu dissipieren ohne Verwendung eines expliziten SGS Modells. Bei gleicher effektiver Auflösung liefert eine höhere Polynomordnung grundsätzlich bessere Ergebnisse als eine niedrigere. Nur das P1 Schema war zu dissipativ bei der verwendeten Gitterauflösung und verhinderte beispielsweise die Transition bei der Kanalströmung. Die Abklingraten bei isotroper Turbulenz stimmten bei höherer Ordnung gut mit experimentellen Ergebnissen überein. Exzellente Ergebnisse zeigten sich ebenfalls für Kanalströmungen hinsichtlich der mittleren Geschwindigkeitsprofile und Reynoldsspannungen, sowie bei der Umströmung des SD7003 Tragflügels, wo Ort und Größe des Separationsgebiets und der mittlere Auftriebs- und Widerstandsbeiwert sehr gut übereinstimmten mit hochaufgelösten Ergebnissen von Methoden hoher Ordnung aus der Literatur [144]. Die Verwendung von ILES innerhalb PyFR und mit einer hohen Polynomordnung ist daher nicht nur besonders einfach anzuwenden, da auf ein SGS Modell verzichten werden kann, sondern bietet zudem gegenüber Verfahren niedriger Ordnung einen signifikanten Performance Vorteil.

2.4. Verwendete Rechner

Die Strömungssimulationen dieser Arbeit wurden durchgeführt auf einem lehrstuhleigenen Cluster, dem OMNI-Cluster der Universität Siegen, sowie auf dem Supercomputer JUWELS des Jülich Supercomputing Centre über zwei Rechenzeitprojekte des Gauss Centre for Supercomputing. Die wichtigsten Daten dieser Systeme werden im Folgenden kurz vorgestellt.

- Lehrstuhleigener Cluster
  2 Knoten:
  - **CPU:** 2 x Intel Skylake Gold 6130 Prozessor, 2.1 GHz, 16-core, 22 MB Cache
  - **Speicher:** 192 GB DDR4 RAM
  - **GPU:** 1 x NVIDIA Tesla V100, 5120 CUDA Kerne, 16 GB HBM2
  - **Netzwerk:** 1 x Mellanox ConnectX InfiniBand
- OMNI Cluster der Universität Siegen
  439 CPU-Knoten:
  - **CPU:** 2 x AMD EPYC 7452 Prozessor, 2.35 - 3.35 GHz, 32-core, 128 MB Cache
  - **Speicher:** 256 GB DDR4 RAM 3200 MHz
  - **Netzwerk:** InfiniBand HDR100

  10 GPU-Knoten:
  - **CPU:** 2 x AMD EPYC 7452 Prozessor, 2.35 - 3.35 GHz, 32-core, 128 MB Cache
  - **Speicher:** 256 GB DDR4 RAM 3200 MHz
  - **GPU (1/2/4 pro Knoten):** NVIDIA Tesla V100, 5120 CUDA Kerne, 16 GB HBM2
  - **Netzwerk:** InfiniBand HDR100
- JUWELS, Jülich Supercomputing Centre
  Cluster GPU Modul (0.76 MCore-h), 56 Knoten:
  - **CPU:** 2 x Intel Xeon Gold 6148 Prozessor, 2.4 GHz, 20-core, 27.5 MB Cache
  - **Speicher:** 192 GB DDR4 RAM 2666 MHz
  - **GPU:** 4× NVIDIA Tesla V100, 5120 CUDA Kerne, 16 GB HBM2

- **Netzwerk:** 2× InfiniBand EDR (Connect-X4)

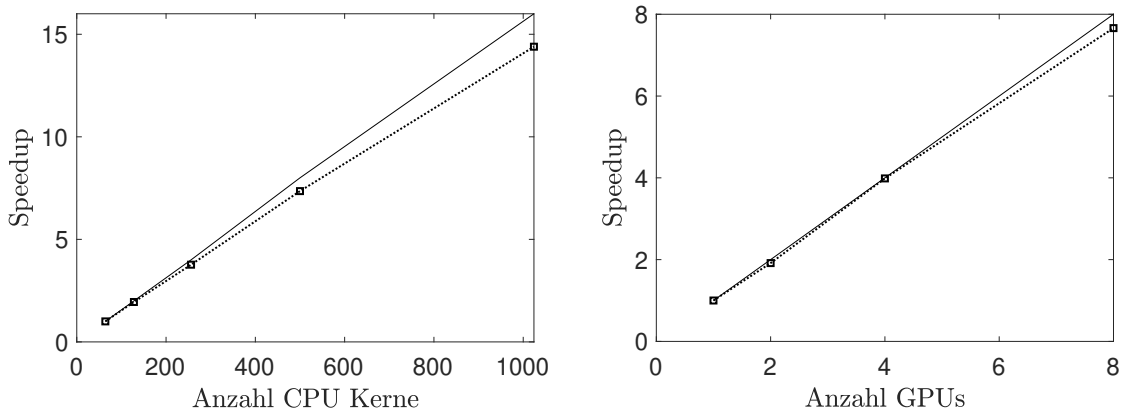
JUWELS Booster Modul (11.5 MCore-h), 936 Knoten:

- **CPU:** 2 x AMD EPYC 7402 Prozessor, 2.8 GHz, 24-core, 128 MB Cache
- **Speicher:** 512 GB DDR4 RAM 3200 MHz
- **GPU:** 4 × NVIDIA A100, 6912 CUDA Kerne, 40 GB HBM2e
- **Netzwerk:** 4 × Mellanox HDR200 InfiniBand Connect-X6

2.4.1. Skalierung

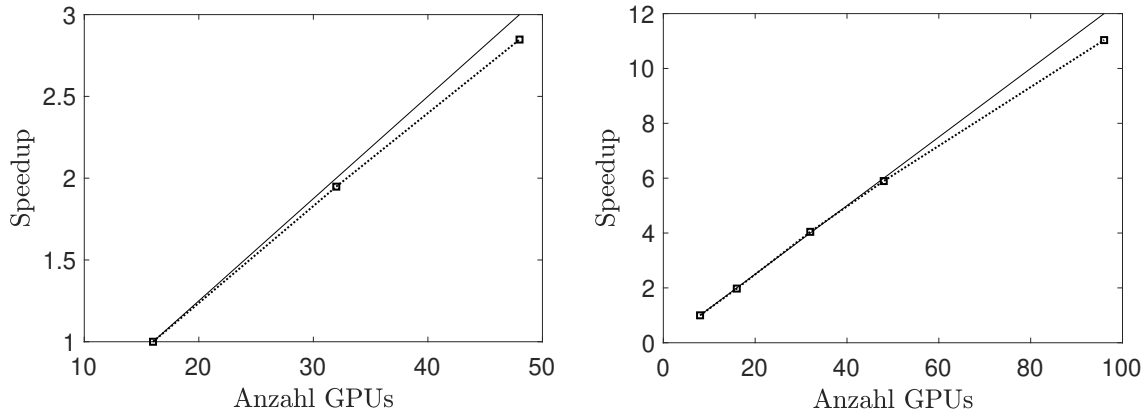
Um die parallele Recheneffizienz des verwendeten Strömungslösers auf verschiedenen Architekturen zu demonstrieren, werden einige Skalierungsdaten anhand von Testfällen auf den vorgestellten Clustern gezeigt. Der Geschwindigkeitsgewinn bei Nutzung mehrerer paralleler Rechenknoten auf dem OMNI Cluster ist in Abbildung 2.4 dargestellt für die Nutzung sowohl der CPU Knoten (Abbildung 2.4a) als auch der GPU Knoten (Abbildung 2.4b). Der Testfall entspricht einer Kanalströmung mit der Machzahl $Ma_b = 0.3$ und der Reynoldszahl $Re_b = 3000$, $13 \cdot 10^6$ Gitterpunkten, sowie einer festen Zeitschrittweite. Als kleinstes Setup wurde ein CPU Knoten mit 64 Prozessorkernen verwendet, bzw. ein GPU-Knoten mit einer GPU. Die Parallelisierung erfolgt mit einem MPI Task pro CPU Kern, bzw. einem MPI Task pro GPU. Eine Vervielfachung der verwendeten CPU Kerne um den Faktor 16 hat in dem Testfall einen Speedup von 14.4 zur Folge. Der Speedup unter Verwendung der maximal möglichen Anzahl von 8 GPUs auf dem OMNI Cluster ist mit dem Wert 7.7 gegenüber der Nutzung von nur einer GPU nahe am linearen Speedup. Abbildung 2.5 zeigt die Skalierung auf den GPU Knoten zweier Module des Jülich Supercomputing Centre, JUWELS und JURECA. Das JURECA Modul stand lediglich testweise für den gezeigten Skalierungstest zur Verfügung. Die Konfiguration ähnelt jedoch dem in Abschnitt 2.4 vorgestellten Booster Modul, wobei hier zwei CPUs des Typs AMD EPYC 7742 mit jeweils 64 Kernen zum Einsatz kommen. Der Testfall ist eine Kanalströmung mit Machzahl $Ma_b = 3$, Reynoldszahl $Re_b = 14000$ und $112 \cdot 10^6$ Gitterpunkten. Die Testsimulation beinhalten das Ausschreiben von Größen wie Wandschubspannung, Massenstrom und der Lösung (Druck, Dichte, Geschwindigkeit) an ausgewählten Punkten innerhalb des Rechengebiets im Abstand von 250 Zeitschritten, sowie die Akkumulation zeitgemittelter dreidimensionaler Felder. Die Kurven starten jeweils bei der kleinstmöglichen Anzahl an GPUs, die für den Testfall mindestens erforderlich sind. Im Fall des JUWELS Moduls sind es 16 GPUs, wobei auf JURECA bereits 8 GPUs ausreichen. Begrenzend ist der GPU Speicher, der bei der von JURECA verwendeten NVIDIA A100 mit 40 GB HBM2e gegenüber 16 GB HBM2 der V100 auf JUWELS mehr als doppelt so groß ausfällt. Die Laufzeit auf der neueren A100 GPU (herausgebracht 2020) ist für den verwendeten Testfall ungefähr um den Faktor 2 geringer gegenüber der V100 GPU (2017, gleiche Chipgröße), was

den raschen Fortschritt auf dem Gebiet der GPUs und deren Bedeutung für High Performance Computing deutlich macht. Auch auf den großen parallelen Systemen des Jülich Supercomputing Centre liegen die Speedup Kurven nahe des idealen linearen Verlaufs, was die gute Skalierbarkeit des numerischen Verfahrens auf modernen Computerarchitekturen beweist.



(a) **(b)**

Abbildung 2.4: Speedup der Kanalströmung auf dem OMNI Cluster. (a) CPU Knoten; (b) GPU Knoten. ——, Linearer Speedup; □, Simulation mit $13 \cdot 10^6$ Gitterpunkten.



(a) **(b)**

Abbildung 2.5: Speedup der Kanalströmung auf den Modulen des Jülich Supercomputing Centre. (a) GPU Partition des JUWELS Cluster Moduls ; (b) GPU Partition des JURECA DC Moduls. ——, Linearer Speedup; □, Simulation mit $112 \cdot 10^6$ Gitterpunkten.

2.5. SPOD Algorithmus

Eine Methode um kohärente Strukturen in den bereits vorliegenden Strömungsdaten zu identifizieren ist SPOD (Spectral Proper Orthogonal Decomposition) nach Towne et al. [140]. Die resultierenden Moden können für verschiedenste Absichten genutzt werden, von Klassifizierung über reduced-order modeling bis hin zu Strömungsbeeinflussung [131]. In dieser Arbeit soll die Zerlegung Erkenntnisse liefern über die Funktionsweise der Strömungsbeeinflussung und über Änderungen, die sich aufgrund der Kompressibilität gegenüber inkompressiblen Strömungen ergeben. Bei der Methode handelt es sich um eine Form von POD (Proper Orthogonal Decomposition) im Frequenzbereich. Angewandt auf statistisch stationäre Strömungen liefert die Zerlegung Moden, die jeweils mit einer einzigen Frequenz oszillieren. Die SPOD-Moden repräsentieren raum-zeitlich kohärente Strukturen. Mathematisch gesehen sind sie eine orthogonale Basis der Strömungsdaten in dem Sinn, dass eine Teilmenge der Moden einen größeren Anteil der gesamten Energievarianz repräsentiert als jede andere orthogonale Basis [131]. Die Methodik der Zerlegung wird folgend angelehnt an Schmidt und Colonius [131] und deren hier verwendete open-source Implementierung kurz zusammengefasst.

Bei der klassischen POD werden deterministische, orthogonale Funktionen $\boldsymbol{\phi}(z)$ gesucht, die einen mittelwertfreien Zufallsprozess durchschnittlich am besten approximieren. Sie formen eine Basis, mit der jede Realisierung entwickelt werden kann:

$$\mathbf{q}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \boldsymbol{\phi}_k(z)\,. \tag{2.33}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{q}$ allgemein die Zufallsvariable (Geschwindigkeitsfluktuationen im vorliegenden Fall) und $z \in \Omega$ beschreibt die räumlichen Koordinaten oder die Zeit. Die Funktionen $\phi_k(z)$ sind dabei Eigenfunktionen, deren zugehörigen Eigenwerte sich aus der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}(z, z') = E\{\mathbf{q}(z)\mathbf{q}^{\dagger}(z')\} \tag{2.34}$$

ableiten, wobei † die konjugierte Transponierte beschreibt. Basierend auf N Stichproben des Zufallsprozesses $\mathbf{q}_k$, $k = 1, \ldots, N$ wird die Kovarianzmatrix zu

$$\mathbf{C}(z, z') = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{q}^{(k)}(z)\mathbf{q}^{\dagger(k)}(z')\,. \tag{2.35}$$

Die Idee der SPOD ist, die Zufallsvariable in statistisch stationärer Strömung sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängig zu beschreiben (z=[x,t]). Nutzt man die statistische Stationarität, d.h. eine Struktur der Strömung zum Zeitpunkt t kann mit

gleicher Wahrscheinlichkeit zu jeder beliebigen anderen Zeit auftreten, so sollte die Kovarianz nur von der relativen Zeit abhängen:

$$\mathbf{C}(x, x', t, t') \rightarrow \mathbf{C}(x, x', t - t') \,. \tag{2.36}$$

Die Annahme der Stationarität liefert einen Satz entkoppelter Probleme im Fourier-Raum für jede Frequenz, d.h. es wird für jede einzelne Frequenz nacheinander ein Satz von POD Problemen im Fourier-Raum gelöst. Die Fouriertransformierte der Kovarianz liefert die CSD (Cross-Spectral Density) Matrix:

$$\mathbf{S}(x, x', f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}(x, x', \tau) e^{-i2\pi n f \tau} \mathrm{d}\tau \,, \qquad \tau = t - t' \,. \tag{2.37}$$

Analog zu der Entwicklung in Gleichung 2.35 liefert die CSD Matrix einen Satz von Eigenfunktionen $\boldsymbol{\phi}_f(x)$, welche zurück in den Zeitbereich transformiert im raumzeitlichen Sinn orthogonal zueinander sind und die SPOD-Moden repräsentieren.

Der wesentliche Algorithmus, der neben dem POD Teil den spektralen Teil der SPOD ausmacht, ist die Welch Methode. Dabei geht es darum, die CSD Matrix S aus den Daten zu schätzen. Die Welch Methode nutzt die Stationarität, um aus einer einzigen, längeren Zeitreihe ein Ensemble von Realisierungen zu erstellen. Die Zeitreihe bestehend aus N_t instantanen Feldern wird dabei in N_{blk} Blöcke segmentiert, von denen jeder N_{FFT} Felder enthält und mit dem nächsten Segment um N_{ovlp} überlappt. Jede Realisierung enthält dann eine Zeitperiode T, die in diskrete Zeitintervalle $t_j = t_0 + jT/N_{\mathrm{FFT}}$, $j = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{FFT}}$ unterteilt ist mit der Startzeit t_0. Die Daten der k-ten Realisierung zur diskreten Zeit t_j bilden den Vektor $\mathbf{q}^{(k)}(t_j)$, die in die Datenmatrix Q einsortiert werden:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^{(1)}\, \mathbf{q}^{(2)}\, \cdots \mathbf{q}^{(N)}] \,, \qquad \hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{C}^{M \times N} \,. \tag{2.38}$$

Damit wird die diskrete zeitliche Fourier Transformation der k-ten Realisierung zu

$$\hat{\mathbf{q}}^{(k)}(f_m) = \sum_{j=0}^{N_{\mathrm{FFT}}-1} \mathbf{q}^{(k)}(t_{j+1}) e^{-i2\pi jm/N_{\mathrm{FFT}}} \,, \quad k = -N_{\mathrm{FFT}}/2+1, \ldots, N_{\mathrm{FFT}}/2 \,, \tag{2.39}$$

woraufhin die Daten in Abhängigkeit der diskreten Frequenzen $f_m = mN_{\mathrm{FFT}}/T$, $m = -N_{\mathrm{FFT}}/2, \ldots, N_{\mathrm{FFT}}$ vorliegen. Wie oben erwähnt wird nun separat für jede Frequenz vorgegangen und analog zur herkömmlichen POD die SPOD-Moden und Eigenvektoren bestimmt. Die Daten werden für eine bestimmte Frequenz in die Datenmatrix $\hat{\mathbf{Q}}$ einsortiert gemäß

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{\mathbf{q}}^{(1)}\, \hat{\mathbf{q}}^{(2)}\, \cdots \hat{\mathbf{q}}^{(N)}] \,, \qquad \hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{C}^{M \times N} \tag{2.40}$$

mit der Anzahl an Freiheitsgraden M als Produkt aus Anzahl der Variablen und Anzahl der Raumpunkte, und der Anzahl an Realisierungen N. Die CSD Matrix wird geschätzt zu

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{N-1} \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^H \tag{2.41}$$

mit der hermiteschen Datenmatrix $\hat{\mathbf{Q}}^H$ im Falle komplexer Daten, falls diese bereits in einer oder mehreren homogenen Richtungen Fourier-transformiert wurden. Die SPOD-Moden und Eigenwerte werden schließlich durch Lösung des Eigenwertproblems

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{W}\hat{\mathbf{\Phi}} = \hat{\mathbf{\Phi}}\hat{\mathbf{\Lambda}} \tag{2.42}$$

bestimmt, mit der Diagonalmatrix der Eigenwerte $\hat{\mathbf{\Lambda}}$, den Gewichtungen $\mathbf{W}$ gemäß der Definition des inneren Produkts im Hilbertraum, dem die Realisierungen zugrunde liegen, und den SPOD-Moden

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = [\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}^{(2)}\, \cdots \hat{\boldsymbol{\phi}}^{(N)}]\,, \qquad \hat{\mathbf{\Phi}} \in \mathbb{C}^{M\times N}\,. \tag{2.43}$$

Ein schematisches Schaubild des SPOD Algorithmus basierend auf der Welch Methode liefert Abbildung 2.6. Die räumliche und zeitliche Kohärenz der resultierenden Moden erleichtert die physikalische Interpretation enorm. Die Visualisierung der Moden offenbart oft unmittelbar die zugrundeliegende Physik der Strömung, wie beispielsweise Wirbelablösung, Instabilitäten, akustische Resonanzen usw. [131]. Durch das SPOD Spektrum, d.h. die zugehörigen Eigenwerte über der Frequenz, kann wiederum ermittelt werden, welche der Strukturen, die durch die Moden identifiziert wurden, eine entscheidende Rolle in der Strömung spielen [131].

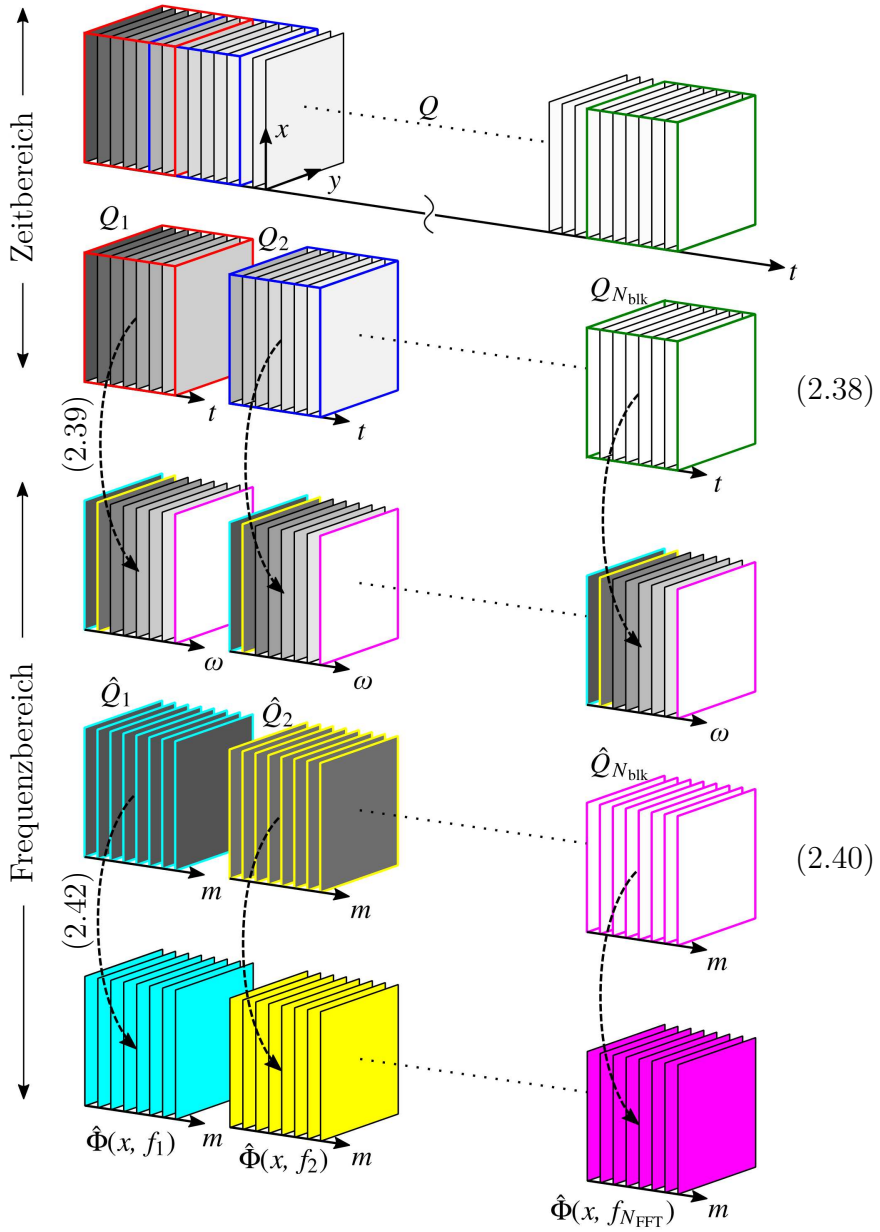


Abbildung 2.6: Schaubild des SPOD Algorithmus (übernommen aus Schmidt und Colonius [131]). Die Nummern in Klammern beziehen sich auf die Gleichungen im Text. Die insgesamt N_t rechteckigen Scheiben stellen instantane Strömungsdaten dar. Diese werden in N_{blk} Blöcke segmentiert mit einer Überlappung von N_{ovlp}, danach Fourier transformiert und anschließend nach der Frequenz sortiert. Separat für jede Frequenz wird die CSD Matrix aufgestellt, deren Eigenwertzerlegung die SPOD-Moden für die jeweilige Frequenz liefert.

3. Kompressible Kanalströmungen

3.1. Numerische Spezifikationen der kompressiblen Kanalströmungen

Das Rechengebiet der Kanalströmung ist in Abbildung 3.1 dargestellt, zusammen mit den Koordinaten in der Stromab-, wandnormalen und Spannweitenrichtung x_1, x_2, x_3, sowie den Abmessungen L_{x_1}, L_{x_2}, L_{x_3} in den entsprechenden Richtungen. Ebenfalls schematisch gezeigt ist das sich einstellende mittlere Geschwindigkeitsprofil in Stromabrichtung $u_1(x_2)$ in Abhängigkeit der wandnormalen Richtung und das später zusätzlich an den Wänden aufgeprägte transversale sinusförmige Geschwindigkeitsprofil $u_3(x_1)$, welches in Stromabrichtung variiert. Die wandnormale Koordinate deckt den Bereich $[-h \;\; h]$ ab, wobei h die halbe Kanalhöhe ist, die als charakteristisches Maß der Strömung unter anderem zur Bildung der Reynoldszahl verwendet wird. Das Strömungsgebiet wird in vertikaler Richtung durch die beiden Wände begrenzt, die als isotherme Haftrandbedingungen modelliert werden mit $u_i = 0$ im unbeeinflussten Fall. Periodische Randbedingungen werden jeweils für die Begrenzungen normal zur Stromab- und Spannweitenrichtung genutzt. Das Rechengitter besteht ausschließlich aus Hexaederelementen mit konstanten Kantenlängen in den homogenen wandparallelen Richtungen. Für die wandnormalen Punkte wird Gitterstreckung angewandt gemäß einer Tangens hyperbolicus Funktion

$$x_2(j) = -\frac{\tanh\left[\beta \frac{1-2(j-1)}{N_{x_2}-1}\right]}{\tanh(\beta)}, \quad j = 0, \ldots, N_{x_2} \tag{3.1}$$

nach Gullbrand [70] und Vermeire et al. [144], wobei j der Gitterpunktindex, $\beta \approx 2.75$ der Streckungsfaktor und N_{x_2} die Anzahl an Gitterpunkten in der wandnormalen Richtung ist. Die Verteilung der Lösungs- und Flusspunkte in den Elementen, bzw. an deren Übergängen erfolgt nach Gauss-Legendre. Gauss-Legendre Quadratur wird ebenfalls für die Anti-Aliasing Methode innerhalb des Elementes verwendet. Für die Berechnung des nichtviskosen gemeinsamen Interface Flusses an den Elementübergängen wird der HLL Riemann Löser verwendet, benannt nach Harten, Lax und van

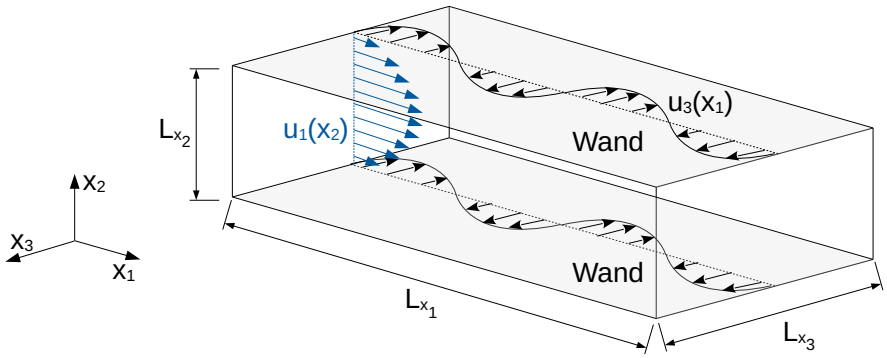


Abbildung 3.1: Skizze des Rechengebiets der Kanalströmung mit Abmessungen und schematischen Geschwindigkeitsprofilen der Strömung und der angewandten Beeinflussung.

Leer. Ein Überblick über diese Familie von Riemann Lösern bietet beispielsweise Toro [138]. Angetrieben wird die Strömung, wie in kompressibler Kanalströmung mit periodischen Randbedingungen üblich [96], durch eine räumlich konstante externe Kraft $f_{\rho u_1}$ gemäß Gleichung 2.5. Das Antreiben durch einen Druckgradienten in Strömungsrichtung würde gemäß der idealen Gasgleichung Dichte- und Temperaturgradienten bedingen und die axiale Homogenitätsbedingung verletzen [51, 96]. Lenormand et al. [96] zeigten durch Mittelung der Impulsgleichung in den wandparallelen Richtungen und anschließender Integration in wandnormaler Richtung, dass die zeitliche Änderung des in der 2-3-Ebene gemittelte Massenstroms Q gegeben ist durch

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -2hL_{x_3} f_{\rho u_1} - \frac{2L_{x_3}}{Re}\langle \tau_w \rangle \,. \tag{3.2}$$

Die antreibende Kraft muss also zeitabhängig sein, um den erwünschten konstanten Massenstrom zu gewährleisten und wird daher in jedem Zeitschritt angepasst. Bezüglich der Regelung der antreibenden Kraft existieren unterschiedliche Ansätze. Lenormand et al. [96] nutzten einen Regler

$$f_{\rho u_1}^{n+1} = f_{\rho u_1}^{n} + \frac{1}{L_{x_3} h}\left[\left(Q^{n+1} - Q_0\right) - 0.1\left(Q^n - Q_0\right)\right] \tag{3.3}$$

unter Nutzung des Massenstroms zum aktuellen Zeitschritt n, dem Zielwert Q_0, sowie einem Prädiktor des Massenstroms zum Zeitschritt $n+1$ mithilfe der Wandschubspannung gemäß Gleichung 3.2. Morinishi et al. [105] nutzten allein die auf die Wände wirkenden Wandschubspannungen, um die damit im Gleichgewicht stehende Volumenkraft zu bestimmen. Foysi [51] beschrieb die Kraft durch

$$f_{\rho u_1} = \frac{\int_0^h \widetilde{\rho u_1}^{n+1} dx_2 - \int_0^h \widetilde{\rho u_1}^{n} dx_2}{\Delta t} + \frac{\langle \tau_w \rangle}{h} \tag{3.4}$$

mithilfe der Wandschubspannung und der durch einen Differenzenquotienten angenäherten zeitlichen Massenflussänderung. Hier wird die Kraft rein durch den über die periodische 2-3-Ebene gemittelten Massenstrom Q geregelt,

$$f_{\rho u_1}^{n+1} = f_{\rho u_1}^{n} + \frac{1}{\Delta t}\left(Q_0 - 2Q^n + Q^{n-1}\right) , \tag{3.5}$$

unter Nutzung der Werte zum aktuellen und vorherigen Zeitschritt, sowie dem Zielwert Q_0. Die von der Kraft verrichtete Arbeit $f_{\rho u_1} u_1$ wird gemäß Gleichung 2.5 zur Energiegleichung addiert. Für die Dichte und den Druck gibt es in kompressibler Kanalströmung keine Randbedingung. Numerische Fehler können ein leichtes Driften dieser Größen bewirken [51], was das Einstellen der gewünschten Mach- und Reynoldszahl zusätzlich erschwert und eine Korrektur erfordert. Hierzu wird zusätzlich eine Volumenkraft f_ρ für die Dichte zum entsprechenden Erhaltungssatz addiert:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 + f_\rho \, . \tag{3.6}$$

Integration über das Gebiet ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \frac{\partial \rho_b}{\partial V} = f_\rho \tag{3.7}$$

wegen

$$\int \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \, dV = \oint \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = 0 \, . \tag{3.8}$$

Das Integral der Divergenz ist wegen den periodischen Rändern Null, die Kraft f_ρ entspricht deshalb direkt der Zeitableitung der gemittelten Dichte und wird durch einen Differenzenquotienten

$$f_\rho^{n+1} = 0.2\,\frac{\rho_{b0} - \rho_b^n}{\Delta t} \tag{3.9}$$

approximiert, mithilfe des Zielwertes der volumengemittelten Dichte ρ_{b0} und dem Wert zum aktuellen Zeitschritt n. Der Faktor 0.2 verhindert ein zu starkes Eingreifen des Reglers. Wegen der starken Temperaturänderungen bei den supersonischen Kanalströmungen kann die Viskosität nicht als konstant angenommen werden. Üblich ist die Beschreibung dieser Größe mithilfe einer einfachen Temperaturabhängigkeit über das Sutherland Gesetz ([105, 104, 155, 157])

$$\mu = \mu_w \frac{T_w + S}{T + S}\left(\frac{T}{T_w}\right)^{3/2} \tag{3.10}$$

mit den Wandwerten μ_w, T_w und einer Konstanten S, oder über ein Potenzgesetz ([96, 25, 51])

$$\mu = \mu_w \left(\frac{T}{T_w}\right)^{0.7} \, . \tag{3.11}$$

Hier wurde das Potenzgesetz 3.11 gewählt, da es ohne zusätzliche Konstante auskommt. Weitere Stoffgrößen und Kennzahlen, die für den viskosen Fluss in Gleichung 2.10 und die Verknüpfung von Temperatur, Druck und Dichte in Gleichung 2.12 benötigt werden, sind der Isentropenexponent $\gamma = 1.4$, die Wärmekapazität bei konstantem Druck $c_p = 1004.5$ und die Prandtl-Zahl $Pr = 0.7$.

3.1.1. Dimensionslose Kennzahlen

Zur Charakterisierung der Strömungsbedingungen werden die dimensionslosen Kennzahlen unter anderem mit sogenannten *bulk* Größen, d.h. über das gesamte Gebiet gemittelten Größen, gebildet. Die bulk Reynolds- und Machzahl ist nach Brun et al. [25] definiert als

$$Re_b = \frac{\rho_b U_b h}{\mu_w}, \qquad Ma_b = U_b / c_w \,. \tag{3.12}$$

und enthält die bulk Dichte und Geschwindigkeit

$$\rho_b = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \langle \rho \rangle \, \mathrm{d}y \,, \qquad U_b = \frac{1}{2h\rho_b} \int_{-h}^{h} \langle \rho u \rangle dy \,, \tag{3.13}$$

wobei die eckigen Klammern $\langle \cdot \rangle$ die Mittelung einer Größe in der Zeit und über die homogenen Richtungen kennzeichnen. Gattere et al. [58] definierten zusätzlich die bulk Temperatur als

$$T_b = \frac{1}{2h\rho_b U_b} \int_{-h}^{h} \langle \rho u T \rangle \, \mathrm{d}y \,. \tag{3.14}$$

Zur Beschreibung der von Viskosität dominierten wandnahen Schicht ist dagegen die Verwendung der Schubspannungsgeschwindigkeit als Maß für die Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnähe und des viskosen Längenmaßes üblich. Sie sind definiert als

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \,, \qquad \delta_\nu = \frac{\nu_w}{u_\tau} = \frac{\mu_w}{\rho_w u_\tau} \tag{3.15}$$

und die Normierung mit diesen Größen wird durch ein hochgestelltes "+" gekennzeichnet. Die entsprechende Reynoldszahl, die die wandnahe Strömung charakterisiert ist

$$Re_\tau = \frac{h}{\nu_w} = \frac{\rho_w u_\tau h}{\mu_w} \,. \tag{3.16}$$

Für die inkompressiblen Kanalströmungen ist es aufgrund annähernd konstanter thermodynamischer Größen völlig ausreichend die entsprechenden Maße in Wandnähe (δ_ν, u_τ) und in der äußeren Schicht (h, U_b oder Geschwindigkeit u_c in der Kanalmitte)

zur Charakterisierung der Strömungsbedingungen zu verwenden. Unter supersonischen Bedingungen ist es dagegen notwendig, den starken Einfluss der Viskositäts-, Dichte- und Temperaturvariationen durch eine geeignete Skalierung zu berücksichtigen. Huang et al. [74] empfahlen daher die Verwendung semilokaler Größen (hochgestellter Index "*") basierend auf lokalen Werten von Viskosität und Dichte, um bessere Übereinstimmung der Statistiken wie gemittelten Geschwindigkeits- und Reynoldsspannungsprofilen zu erreichen. Die semilokale Schubspannungsgeschwindigkeit und das semilokale viskose Längenmaß wird zu

$$u_\tau^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\langle\rho\rangle}}\,, \qquad \delta_\nu^* = \frac{\langle\nu\rangle}{u_\tau^*}\,, \tag{3.17}$$

womit die semilokale Reynoldszahl gebildet wird zu

$$Re_\tau^* = \frac{h}{\delta_\nu^*} = Re_\tau \frac{\sqrt{\langle\rho\rangle/\rho_w}}{\langle\mu\rangle/\mu_w}\,. \tag{3.18}$$

Unmittelbar an der Wand gilt $Re_\tau^* = Re_\tau$, wobei die semilokale Reynoldszahl für die hier betrachteten kompressiblen Kanalströmungen mit isothermen Wänden zur Mitte hin absinkt. Die Variation dieser Größe wirft zudem die Frage auf, an welcher wandnormalen Position die semilokale Reynoldszahl für den Vergleich von Strömungen unterschiedlicher Machzahlen herangezogen werden soll. Modesti und Pirozzoli [104] zeigten, dass die Geschwindigkeits- und Reynoldsspannungsprofile unter Verwendung der Transformation nach Huang et al. [74] am besten übereinstimmen, wenn die semilokale Reynoldszahl in der Kanalmitte

$$Re_{\tau c}^* = Re_\tau^*\Big|_{x_2=h} \tag{3.19}$$

übereinstimmt. $Re_{\tau c}^*$ für kompressible Strömungen ist damit das Pendant zu Re_τ für inkompressible Strömungen [142]. Die Erkenntnis wird als Grundlage für den Vergleich der Kanalströmungen in dieser Arbeit benutzt.

3.1.2. Simulationsparameter

Eine Übersicht über die Kanalsimulationen und verwendeten Parameter ist in den Tabellen 3.1 und 3.2 gegeben. Konfigurationen mit annähernd gleicher semilokaler Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re_{\tau c}^*$ als entscheidender Vergleichsparameter sind jeweils gruppiert. Untersucht wurden Kombinationen von jeweils drei Mach- und Reynoldszahlen $Ma_b = [0.3,\ 1.5,\ 3.0]$, $Re_{\tau c}^* = [150,\ 400,\ 800]$, um Unterschiede aufdecken zu können, die sich aus der Variation dieser Kennzahlen ergeben. Teilweise wurden Simulationen mit gleichen Strömungsparametern in Gebieten zweier verschiedener Abmessungen in Stromabrichtung durchgeführt, damit sich ein ganzzahliges Vielfaches verschiedener Beeinflussungswellenlängen realisieren lässt. Zudem wurden zwei

Case	Ma_b	Ma_τ	Re_b	Re_τ	$Re^*_{\tau c}$
M03R150	0.3	0.019	3000	192	188
M15R150	1.5	0.080	3000	218	146
M3R150	3.0	0.116	4880	454	148
M03R400	0.3	0.017	6890	396	388
M15R400	1.5	0.070	9450	604	407
M3R400	3.0	0.104	14000	1150	398
M03R800	0.3	0.016	15400	800	784
M15R800	1.5	0.065	20000	1180	805
M3R800	3.0	0.095	33035	2537	854

Tabelle 3.1: Simulationsparameter (1/2): Strömungskennzahlen

Case	$\frac{L_{x_1}}{h}$	$\frac{L_{x_3}}{h}$	N_{x_1}	N_{x_2}	N_{x_3}	Δx_1^+	Δx_3^+	Δx_2^+	Δx_2^*
M03R150	4π	2π	192	128	152	0.64	7.9	$0.64 - 5.7$	$0.57 - 5.6$
	6π	2π	288	128	152	0.64	7.9	$0.64 - 5.7$	$0.57 - 5.6$
M15R150	4π	2π	192	128	152	14.3	9.0	$0.73 - 6.5$	$0.68 - 4.2$
	6π	2π	288	128	152	14.3	9.0	$0.73 - 6.5$	$0.68 - 4.2$
M3R150	4π	$3/2\pi$	500	224	288	11.3	7.4	$0.28 - 10.3$	$0.09 - 3.2$
	6π	$3/2\pi$	752	224	288	11.3	7.4	$0.28 - 10.3$	$0.09 - 3.2$
M03R400	2π	π	200	160	200	12.6	6.3	$0.63 - 11.1$	$0.58 - 10.8$
	3π	π	300	160	200	12.6	6.3	$0.63 - 11.1$	$0.58 - 10.8$
M15R400	2π	π	252	200	252	15.1	7.5	$0.42 - 15.3$	$0.38 - 10.4$
	3π	π	380	200	252	15.1	7.5	$0.42 - 15.3$	$0.38 - 10.4$
M3R400	2π	π	375	336	375	19.3	9.6	$0.45 - 17.6$	$0.29 - 6.0$
	3π	π	564	336	375	19.3	9.6	$0.45 - 17.6$	$0.29 - 6.0$
M03R800	2π	π	400	448	400	12.6	6.3	$0.71 - 6.8$	$0.70 - 6.7$
M03R800L	12π	4π	1000	136	664	30.7	15.4	$0.90 - 30.5$	$0.86 - 29.9$
M15R800	2π	π	396	336	396	18.8	9.4	$0.46 - 18.0$	$0.43 - 12.3$
M15R800L	10π	3π	1980	336	1188	18.8	9.4	$0.46 - 18.0$	$0.43 - 12.3$
M3R800	2π	π	800	700	800	19.2	9.6	$0.58 - 22.4$	$0.23 - 6.1$
	$3/2\pi$	π	600	700	800	19.2	9.6	$0.58 - 22.4$	$0.23 - 6.1$

Tabelle 3.2: Simulationsparameter (2/2): Gebietsgröße und Gitterauflösung. L_{x_i}, N_{x_i}, Δx_i bezeichnen die Länge des Simulationsgebiets, die Anzahl an Gitterpunkten und die Gitterauflösung in den jeweiligen Raumrichtungen.

Simulationen bei $Re^*_{\tau c} = 800$ und $Ma_b = 0.3$ bzw. $Ma_b = 1.5$ zusätzlich in einem sehr großen Gebiet von $L_{x_1} \times L_{x_2} \times L_{x_3} = 12\pi h \times 2h \times 4\pi h$ (Fall M03R800L) und $L_{x_1} \times L_{x_2} \times L_{x_3} = 10\pi h \times 2h \times 3\pi h$ (Fall M15R800L) wiederholt, um den Einfluss der Very Large Anisotropic Scales (VLAS) in Abschnitt 3.10 zu untersuchen. Als Anfangsbedingungen wurde ρ_b für die Dichte gesetzt und der Anfangsdruck aus einer

Abschätzung von T_b über das ideale Gasgesetz bestimmt. Als Geschwindigkeitsprofil wurde $u_1 = 1.25u_b(1-(y/h)^4)$ genutzt, überlagert mit Wirbelröhren und Störungen der Form $\sin(\alpha_i x_1)\sin(\beta_i x_3)$ in den Komponenten u_2 und u_3. Nach ausreichendem Einlaufen der Simulation von ca. 30 charakteristischen Zeitmaßen $t_c = h/u_\tau$ beginnt die Zeitmittelung einiger dreidimensionaler Felder. Für die Profile über der wandnormalen Richtung wird anschließend räumlich in den homogenen Richtungen gemittelt, sodass sich der Mittelwert einer Größe ϕ bestimmt durch

$$\overline{\phi}(x_2) = \frac{1}{L_{x_1}L_{x_3}} \int_{L_{x_1}} \int_{L_{x_3}} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_1, x_2, x_3, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1\,. \tag{3.20}$$

Zusätzlich kann wegen der Symmetrie über beide Kanalhälften gemittelt werden. Bei zeitgemittelten Produkten von Fluktuationen wie beispielsweise den Reynoldsspannungen $\overline{u_i'u_j'}$ wird die Beziehung

$$\overline{u_i'u_j'} = \overline{u_iu_j} - \overline{u_i}\,\overline{u_j} \tag{3.21}$$

verwendet, um eine explizite Berechnung der Fluktuationen zu umgehen. Die Aufspaltung in Mittelwert und Fluktuationen einer Größe ϕ geschieht im Inkompressiblen grundsätzlich über die Reynoldsaufspaltung

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'\,, \qquad \overline{\phi'} = 0\,. \tag{3.22}$$

Bei der im Kompressiblen üblichen Favre-Mittelung werden massegewichtete Mittelwerte für Geschwindigkeit, Temperatur und Energie verwendet gemäß

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi''\,, \qquad \widetilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\phi}} \qquad \overline{\rho\phi''} = 0\,. \tag{3.23}$$

Der Zusammenhang zwischen Reynolds- und Favre-gemittelten Größen für Geschwindigkeit und Temperatur kann durch

$$\overline{\phi} - \widetilde{\phi} = \overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho'\phi'}}{\overline{\rho}} \tag{3.24}$$

beschrieben werden [74]. Alle in Tabelle 3.1 und 3.2 gelisteten Fälle dienen jeweils als Ausgangspunkt für die Anwendung der Strömungsbeeinflussung. Verschiedene Beeinflussungswellenlängen Λ_x gemäß Gleichung 3.25 im Bereich des Optimums werden untersucht. Die verwendete Skalierung $\Lambda_x^* = \Lambda_x/\delta_\nu^*(h)$ basierend auf lokalen Größen in der Kanalmitte soll eine bessere Vergleichbarkeit der Beeinflussungswellenlänge zwischen verschiedenen Strömungsbedingungen ermöglichen. Die Amplitude A der Beeinflussung entspricht jeweils $A^+ = 12$, einem weit verbreiteten Wert in der Literatur ([139, 118, 146, 135, 124]). Der Vergleich zum entsprechenden unbeeinflussten Fall erfolgt unter konstantem Massenstrom und folglich gleicher volumengemittelter Mach- und Reynoldszahlen Ma_b und Re_b.

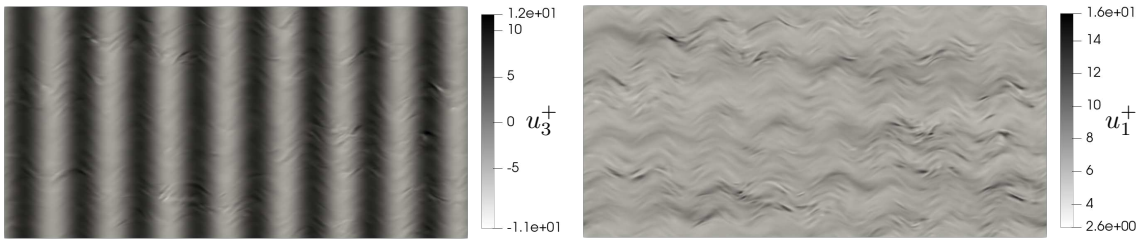
3.2. Funktionsprinzip der Beeinflussungsmethode

Die Wandoszillationen der Form

$$u_3(x_1) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_x}\right) x_1 \tag{3.25}$$

zielen darauf ab, mit den wandnahen kohärenten Wirbelstrukturen (Streaks) zu interagieren und diese zu schwächen, da sie eine bedeutende Rolle in der Generierung und Aufrechterhaltung von Turbulenz spielen [133]. Die Streaks machen sich im Wandbereich bemerkbar durch langgezogene Bereiche von abwechselnd hoher und niedriger Geschwindigkeit. Sie stehen in enger Verbindung zu den kleinsten Wirbeln in der Energiekaskade, die letztendlich hauptverantwortlich für die Turbulenzproduktion und Widerstandsgenerierung an der Wand sind. Sie werden generiert durch Instabilitäten der Streaks [81]. Die Turbulenzbeeinflussung durch Riblets zielt beispielsweise darauf ab, die Wirbel in Strömungsrichtung zu schwächen, die unmittelbar durch Dissipation an der Wand Widerstand generieren, und damit auch die Generierung der Streaks zu stören [81]. Die Wirbel an sich haben jedoch eine relativ geringe Ausdehnung in Strömungsrichtung[1]. Eine praktikablere Strategie der Strömungsbeeinflussung ist es daher, in umgekehrter Weise die wesentlich längeren Streaks zu beeinflussen und zu schwächen und damit den selbsterhaltenden Kreislauf der Turbulenzgenerierung zu durchbrechen. Die Streaks weisen eine universelle Kohärenzlänge in Strömungsrichtung auf, bevor sie instabil werden. Auf dieses Maß zielt die Beeinflussungsmethode durch sinusförmige Wandbewegungen ab. Es existiert somit eine optimale Beeinflussungswellenlänge Λ_x, bestimmt durch die mittlere Kohärenzlänge der Streaks, bei der die Turbulenzgenerierung bestmöglich gestört wird. Die Beeinflussungswellenlänge ist daher der entscheidende, physikalisch begründete Parameter der Methode. Die Amplitude wirkt sich bei gegebener Wellenlänge hauptsächlich auf die Energiebilanz aus und auch andere beliebige periodische Wellenformen funktionieren grundsätzlich [32]. Vorausgesetzt, dass die Beeinflussung mit optimalen Parametern A_{opt}, $\Lambda_{x\,opt}$ betrieben werden kann, liefert die sinusförmige Wellenform die beste Netto Energieersparnis [32]. Gerade bezüglich der benötigten optimalen Parameter kann es jedoch in Anwendungsfällen bei hohen Reynoldszahlen leicht zu Limitierungen kommen. Sabidussi et al. [128] fanden gute Übereinstimmung der Widerstandsreduktionsrate für (zeitliche) Wandoszillationen in Rohr- und Kanalströmungen verschiedener DNS und Experimente in einem weiten Reynoldszahlbereich von $Re_\tau = 884 - 5246$ in Abhängigkeit der dimensionslosen Beschleunigung $a^+ = A^+/T^+$. Diese beeinflusst direkt die Änderungsrate der transversalen Scherung $\mathrm{d}u_3/\mathrm{d}x_2$ der spannweitigen Geschwindigkeitsschicht [45]. Um in dem Wertebereich von a^+ zu bleiben, der hohe Wider-

[1] Jiménez und Pinelli [81] bestimmten die Größe eines typischerweise auftretenden Systems von gegensinnig drehenden, in Strömungsrichtung ausgerichteten Wirbeln zu $\lambda^+_{x_1} \approx 250$, $\lambda^+_{x_3} \approx 50 - 100$ anhand der Maxima der zweidimensionalen Energiespektren der wandnormalen und spannweitigen Geschwindigkeiten. Die Abmessungen der Streaks ergeben sich anhand des Spektrums der Stromabgeschwindigkeit zu $\lambda^+_{x_1} \approx 700$, $\lambda^+_{x_3} \approx 100$.



(a) **(b)**

Abbildung 3.2: Spannweitenkomponente (a) und Stromabkomponente der Geschwindigkeit in wandparallelen Schnitten der Konfiguration M15R800, beeinflusst mit Wellenlänge $\Lambda_x = \pi h/4$, bei $x_2^+ = 5$.

standsreduktion gewährleistet, werden aufgrund der Normierung von A^+ und T^+ mit u_τ mit steigender Reynoldszahl höhere Frequenzen und Amplituden nötig[2]. In ihrem Experiment basierend auf einem azimutal oszillierendem Rohr wären für $T^+ < 500$ und $Re_\tau \approx 6600$ eine Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ von rund 130 Hz nötig gewesen, wobei der Versuchsaufbau nur 20 Hz liefern konnte. Andere Wellenformen als die Sinusförmige, die die spannweitige Beschleunigung innerhalb einer Periode maximieren, wären in dem Fall effizienter gewesen [45].

Abbildung 3.2 zeigt die Manipulation der Strömung im Wandabstand $x_2^+ = 5$ beispielhaft für die Konfiguration M15R800. Die instantane spannweitige Geschwindigkeit (Abbildung 3.2a) ist geprägt von den Wandbewegungen, es bilden sich Bänder mit abwechselndem Vorzeichen der Geschwindigkeit, überlagert mit den turbulenten Fluktuationen. Die Ablenkung der Strömung in Spannweitenrichtung zeigt sich anhand der Stromabkomponente der Geschwindigkeit (Abbildung 3.2b), wobei die Wirbelstrukturen regelrecht "durchgeschnitten" werden an Positionen, wo der Betrag der Wandgeschwindigkeit maximal ist. Kleinere Wirbelstrukturen formieren sich größtenteils zwischen diesen Linien maximaler spannweitiger Geschwindigkeitsbeträge. Die Wandschubspannung variiert dementsprechend mit doppelter Frequenz der Wandoszillationen, mit Minima an Positionen maximaler Geschwindigkeitsbeträge und Maxima an Positionen verschwindender Wandgeschwindigkeit. Konturlinien der spannweitigen Geschwindigkeit sind in einem Ausschnitt der x_1-x_2-Ebene mit starker Dehnung der wandnormalen Koordinate in Abbildung 3.3 gezeigt. Die abwechselnd positiven und negativen Geschwindigkeiten breiten sich von der Wand weg ins Kanalinnere aus und werden dabei in Strömungsrichtung konvektiert. Die typischen Profile der Spannweitengeschwindigkeit, die sich an unterschiedlichen Stromabpositionen ergeben, zeigt Abbildung 3.4 beispielhaft für die Konfiguration M03R400 und ausgewählte Beeinflussungswellenlängen. Die spannweitige Geschwindigkeit ist ungefähr bis $x_2^* = 20$ von Bedeutung für die untersuchten Machzahlen und Beein-

[2]In der Rohrströmung ergibt sich $A^+ = \omega d/u_{\tau 0}$ und $T^+ = 2\pi u_{\tau 0}^2/(\omega\nu)$ mit der Kreisfrequenz ω und dem Durchmesser d des Rohrs.

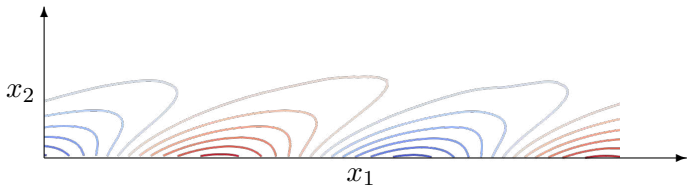


Abbildung 3.3: Linear verteilte Konturlinien der gemittelten spannweitigen Geschwindigkeit in einem x_1-x_2-Schnitt der Strömung M15R400 mit $\Lambda_x^* = 1280$. Wandkoordinate stark gedehnt. Rot: Positive Werte; Blau: Negative Werte.

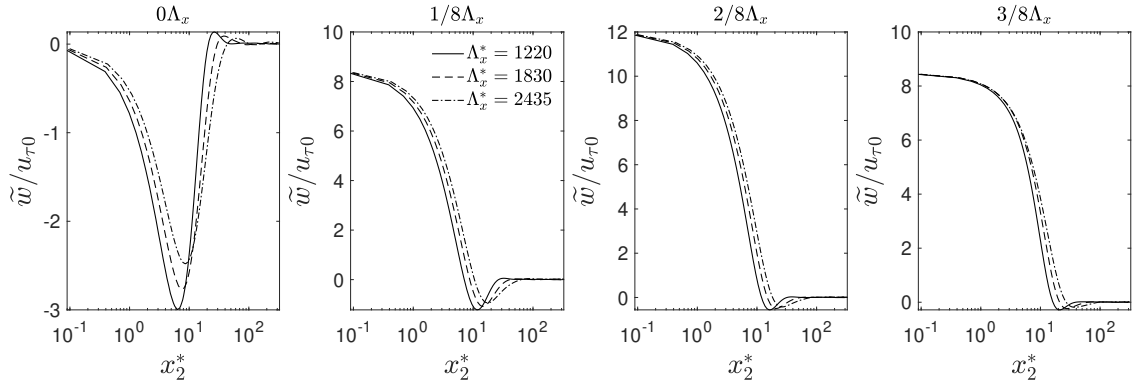


Abbildung 3.4: Profile der mittleren spannweitigen Geschwindigkeit des Falls M03R400, normiert mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_{\tau 0}$ der unbeeinflussten Strömung, an verschiedenen Positionen $x_1 = 0\Lambda_x$, $x_1 = 1/8\Lambda_x$, $x_1 = 2/8\Lambda_x$ und $x_1 = 3/8\Lambda_x$.

flussungswellenlängen. Generell zeigt sich eine höhere Reichweite mit zunehmender Beeinflussungswellenlänge. Das erste Minimum bei $x_2^* \approx 10$ nimmt dabei ab. Wie aus dem Konturplot in Abbildung 3.3 hervorgeht, ist das Minimum durch die vorangegangene entgegengesetzte Wandbewegung begründet. Je nach Verhältnis der (annähernd konstanten) Konvektionsgeschwindigkeit nahe der Wand und der Beeinflussungswellenlänge ist dieser Effekt mehr oder weniger stark. Die aus den Abbildungen 3.3 und 3.4 abgeleiteten Beobachtungen können sehr gut durch die laminare Theorie beschrieben werden. In laminarer ruhender Strömung ist die spannweitige Strömung, die sich unter Anwendung der Wandoszillationen ergibt, von der Stromabrichtung entkoppelt und kann isoliert betrachtet werden. Nach Stokes kann das spannweitige Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit der wandnormalen Koordinate analytisch bestimmt werden. Es bildet sich die nach Stokes benannte Stokes-Schicht aus. Es existiert eine analytische Lösung sowohl für die zeitlichen Wandoszillationen (zeitliche Stokes-Schicht $u_3(x_2, t)$), als auch für die hier verwendeten räumlichen Wandbewegungen (räumliche Stokes-Schicht $u_3(x_2, x_1)$). Sie erlaubt Vorhersagen bezüglich der Dicke der spannweitigen Geschwindigkeitsschicht und der benötigten Antriebsleistung [146], sowie zur Wirksamkeit anderer nicht-sinusförmiger Wellenformen [32].

Die Dicke der räumlichen Stokes-Schicht ergibt sich nach Viotti et al. [146] zu

$$\delta_x = \left(\frac{\nu \Lambda_x}{2\pi \left. \frac{\mathrm{d}\overline{u_1}}{\mathrm{d}x_2} \right|_w} \right)^{1/3} . \tag{3.26}$$

Aufgrund der direkten Abhängigkeit der Schichtdicke von der Beeinflussungswellenlänge ist es verlockend, die Wirksamkeit der Beeinflussung mithilfe der Schichtdicke zu erklären. Gerade bei den fortlaufenden Wanderwellen [124], wo mithilfe der Schichtdicke gleich mehrere Parameter in einem kondensiert werden können, bietet die Schichtdicke eine Möglichkeit, die Abnahme und auch Zunahme des Widerstandes für einen weiten Bereich an Beeinflussungsparametern zu erklären. Quadrio et al. [118] merkten an, dass die Stokes-Schicht für Beeinflussungswellenlängen unterhalb der Optimalen sehr dünn ist und deren Interaktion mit der turbulenten Strömung auf die unmittelbare Wandnähe begrenzt ist. Im umgekehrten Fall zu großer Beeinflussungswellenlängen ergibt sich eine zu dicke Stokes-Schicht, deren Interaktion mit der turbulenten Strömung weniger effektiv ist [118]. Die Erklärung der Wirksamkeit basierend auf dem Längenmaß in Strömungsrichtung in Relation zu der Kohärenzlänge der Streaks scheint jedoch plausibler. Die unterschiedliche Dicke der Stokes-Schicht, die sich aus der Variation der Beeinflussungswellenlänge nach Gleichung 3.26 ergibt, wird hier bei den stehenden Wellen eher als Begleiteffekt angesehen. In turbulenter Strömung ist eine akkurate Beschreibung durch die Stokes Lösung in der viskosen Unterschicht zu erwarten, wo Fluktuationen weniger bedeutend sind. Gute Übereinstimmung der analytischen Lösung mit den phasengemittelten turbulenten Profilen zeigt sich aber auch über die viskose Unterschicht hinaus für ein großes Spektrum an Beeinflussungswellenlängen und Reynoldszahlen [121, 146]. Die Komponente der Reynoldsspannung $\overline{u_2' u_3'}$ ist viel kleiner als der entsprechende viskose Term [121], sodass die spannweitige Richtung weiterhin als weitgehend entkoppelt von der Hauptströmungsrichtung angesehen werden kann.

3.3. Gemittelte Größen

3.3.1. Unbeeinflusste Fälle

Bei den Überschallkanalströmungen steigt die Temperatur zur Kanalmitte hin aufgrund von Dissipation infolge der Reibung an der Wand an. Die Variation im mittleren Druck über den Kanal ist gering (bis zu $1,5\,\%$ des Wandwertes bei $Ma_b = 3$), somit ist der Verlauf der Dichte nach der idealen Gasgleichung ungefähr umgekehrt proportional zur Temperatur. Die Viskosität steigt nach dem Potenzgesetz 3.11 mit $\mu \propto T^{0.7}$. Die starken Gradienten in Wandnähe sind anhand der Profile der mittleren Temperatur und Dichte in Abbildung 3.5 zu sehen. Durch Auftragung über der äußeren Koordinate x_2/h wird deutlich, wie klein der Bereich in Relation zur halben

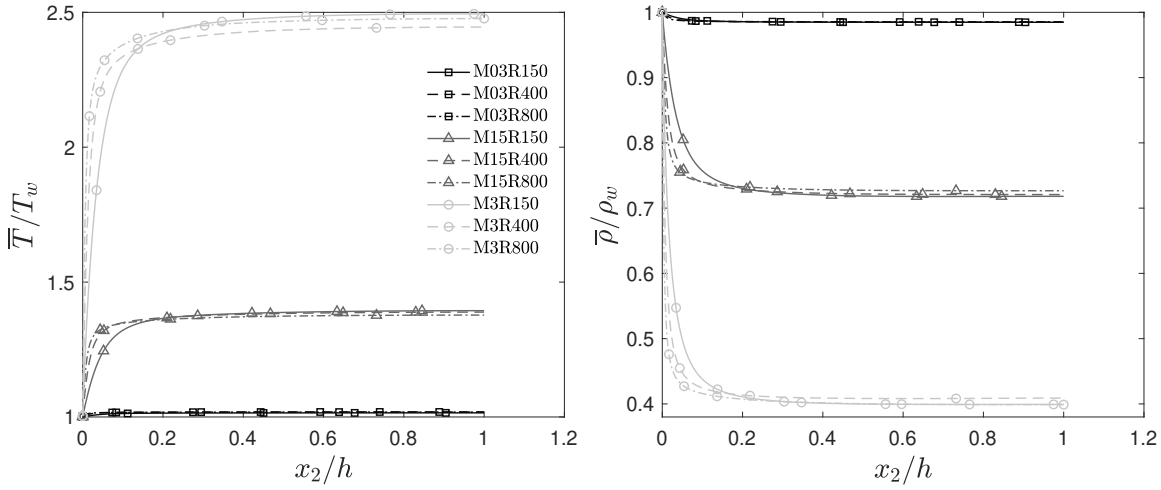


Abbildung 3.5: Variation der mittleren Temperatur (a) und Dichte (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der äußeren Koordinate x_2/h.

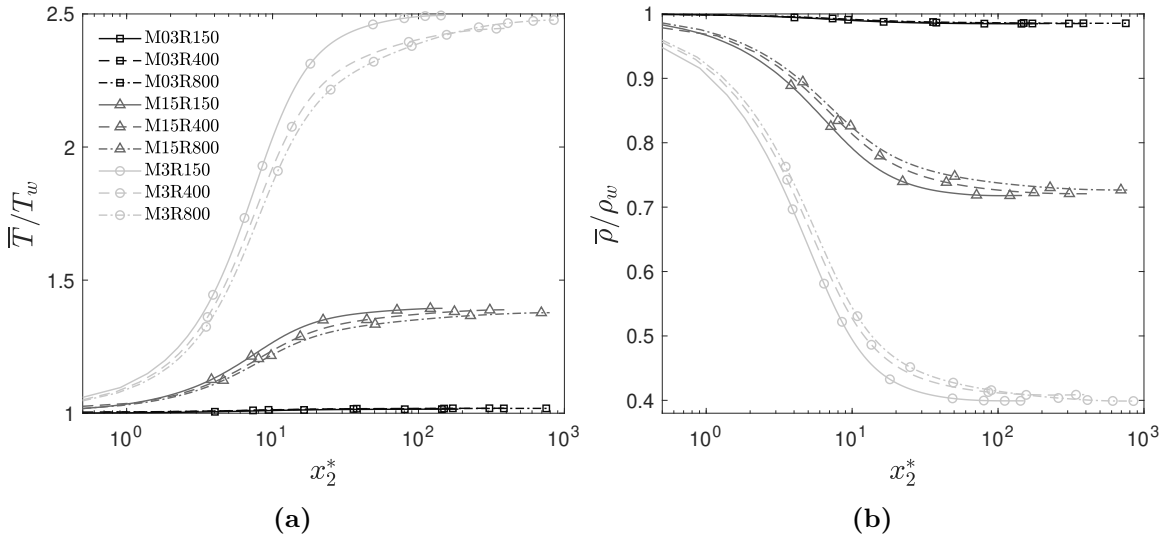


Abbildung 3.6: Variation der mittleren Temperatur (a) und Dichte (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der semilokalen Koordinate x_2^*.

Kanalhöhe ist, in dem der Großteil der Temperatur- und Dichtevariation stattfindet. Der Bereich wird zunehmend kleiner mit steigender Reynoldszahl und die Aufheizung in der Kanalmitte nimmt grundsätzlich mit der bulk Machzahl zu. Die Auftragung über semilokalen Wandeinheiten (Abbildung 3.6) bildet die Profile gleicher bulk Machzahlen besser aufeinander ab. Die Gradienten sind am größten in der viskosen Unterschicht $x_2^* \lesssim 5$ und in der Übergangsschicht $5 \lesssim x_2^* \lesssim 30$. Die wandnorma-

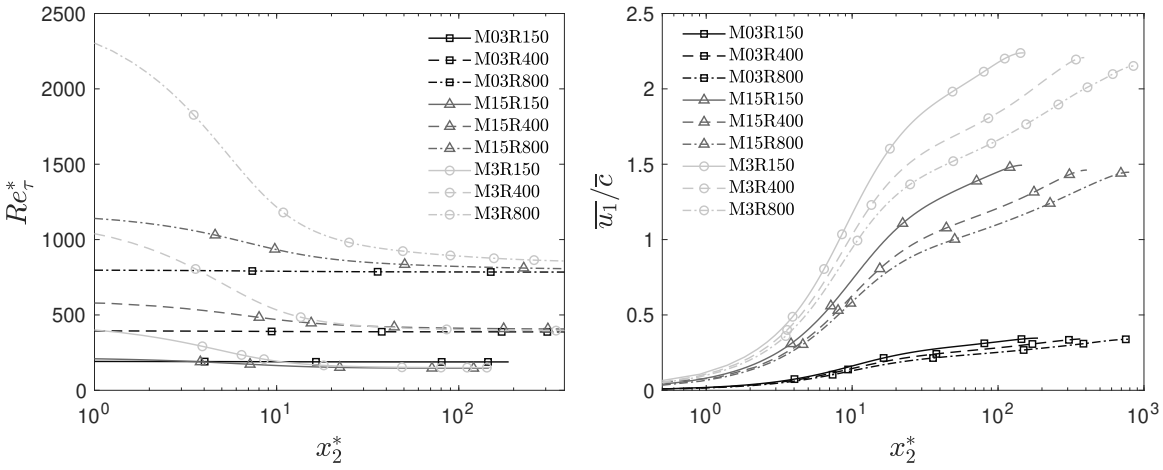


Abbildung 3.7: Variation der semilokalen Reynoldszahl $Re_\tau^* = \overline{\rho} u_\tau^* h/\overline{\mu}$ (a) und der lokalen Machzahl $\tilde{u}_1/\overline{c}$ (b) über x_2^*.

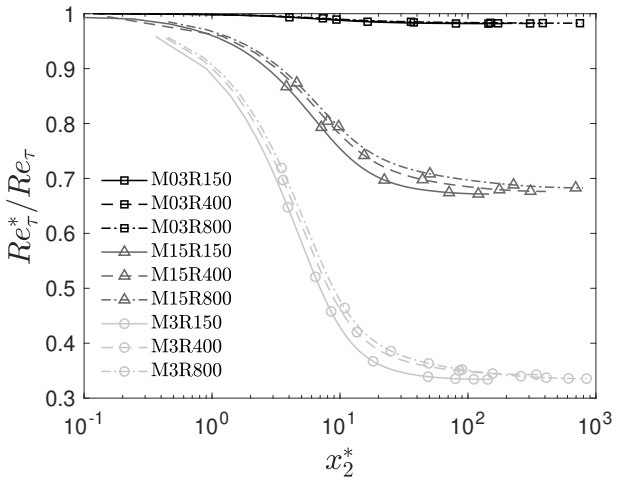
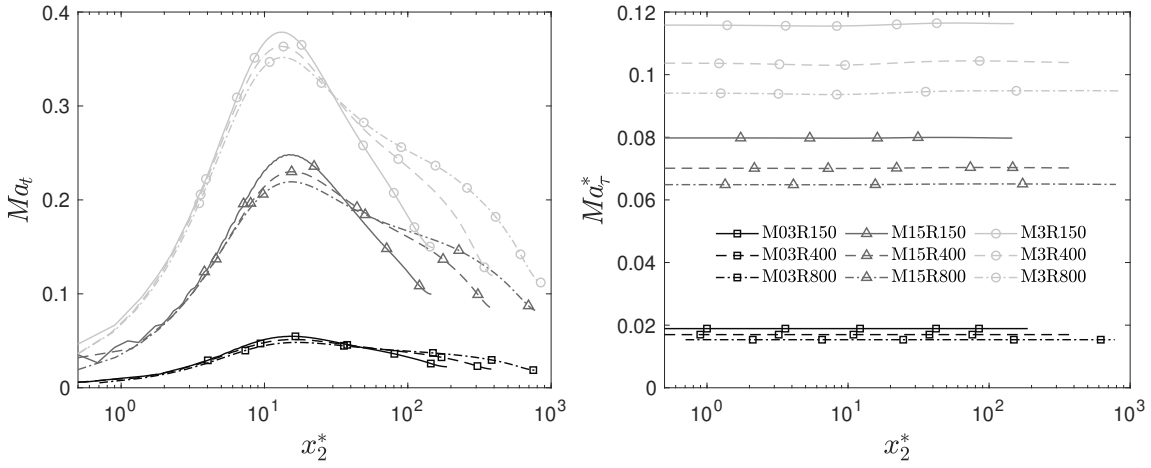


Abbildung 3.8: Variation der semilokalen Reynoldszahl $Re_\tau^* = \overline{\rho} u_\tau^* h/\overline{\mu}$, normiert mit dem Wandwert Re_τ.

len Profile der Dichte und Viskosität gehen nach Gleichung 3.18 in die semilokale Reynoldszahl ein. Ihr absoluter Verlauf ist für die unterschiedlichen Strömungsbedingungen in Abbildung 3.7a gezeigt. Aufgrund der oben beschriebenen Proportionalitäten gilt $Re_\tau^* \approx Re_\tau \left(\overline{T}/T_w\right)^{-1.2}$ [51]. Somit ergeben sich für gleiche Machzahlen auch ähnliche Verläufe der mit Wandwerten normierten semilokalen Reynoldszahl (Abbildung 3.8). Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, wird eine übereinstimmende semilokale Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re_{\tau c}^*$ für gleiche Bulk-Reynoldszahlen an-



(a) **(b)**

Abbildung 3.9: Variation der turbulenten Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$ (a) und der semilokalen Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$ (b).

gestrebt, was nach Abbildung 3.7a für alle Strömungsfälle hinreichend genau erfüllt ist. Die lokale Machzahl, basierend auf lokalen Werten der Geschwindigkeit $\overline{u}_1$ und Schallgeschwindigkeit $\overline{c} = \sqrt{\gamma R \overline{T}}$, zeigt Abbildung 3.7b. Neben dem Anstieg der lokalen Machzahl mit der bulk Machzahl zeigt sich eine Verringerung dieser Größe im gleichen semilokalen Wandabstand mit zunehmender Reynoldszahl. Weitere Machzahlen, die typischerweise als Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte genutzt werden, sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Die turbulente Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$ (Abbildung 3.9a) verwendet die turbulente kinetische Energie $k = \overline{\rho u_i'' u_i''}/2$ und die lokale Schallgeschwindigkeit. Im Allgemeinen werden intrinsische Kompressibilitätseffekte als bedeutend angenommen wenn die turbulente Machzahl Ma_t lokal den Wert 0.3 übersteigt [136]. Die Kurven weisen ein Maximum in der Übergangsschicht bei $x_2^* \approx 15$ auf, analog zum Maxmimum der dominierenden Stromabkomponente der Normalenspannungen $\overline{\rho u_1'' u_1''}$. Mit steigender Reynoldszahl erstrecken sich die semilokalen Wandeinheiten über einen größeren Bereich und die Maxima der turbulenten Machzahl nehmen ab, die Kurven werden flacher. Die Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$ (Abbildung 3.9b) setzt die semilokale Schubspannungsgeschwindigkeit in Relation zur lokalen Schallgeschwindigkeit. Der Verlauf ist selbst für die Fälle mit starker Temperaturvariation annähernd konstant wegen des nahezu entgegengesetzten Verlaufs von $\overline{T}/T_w$ und $\overline{\rho}/\rho_w$ [72], sodass die semilokale Schubspannungsmachzahl ungefähr konstant gleich der mit u_τ und T_w gebildeten im Inkompressiblen üblichen Schubspannungsmachzahl Ma_τ ist:

$$Ma_\tau^* = \frac{u_\tau^*}{\sqrt{\gamma R \overline{T}}} = \frac{u_\tau \sqrt{\rho_w/\overline{\rho}}}{\sqrt{\gamma R \overline{T}}} \approx \frac{u_\tau \sqrt{\overline{T}/T_w}}{\sqrt{\gamma R \overline{T}}} = \frac{u_\tau}{\sqrt{\gamma R T_w}} = Ma_\tau \,. \tag{3.27}$$

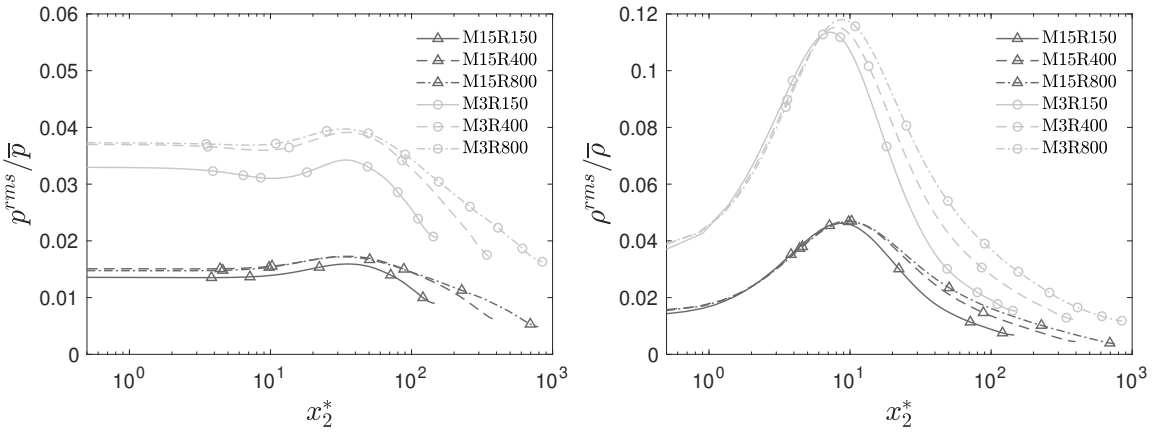


Abbildung 3.10: RMS-Werte des Drucks (a) und der Dichte (b) über x_2^*, normiert mit mittleren Werten.

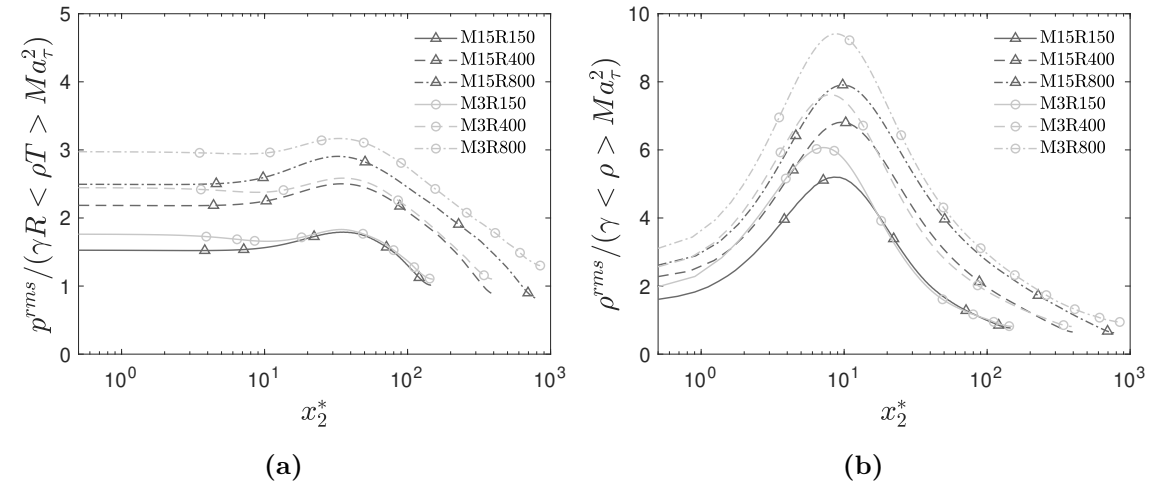
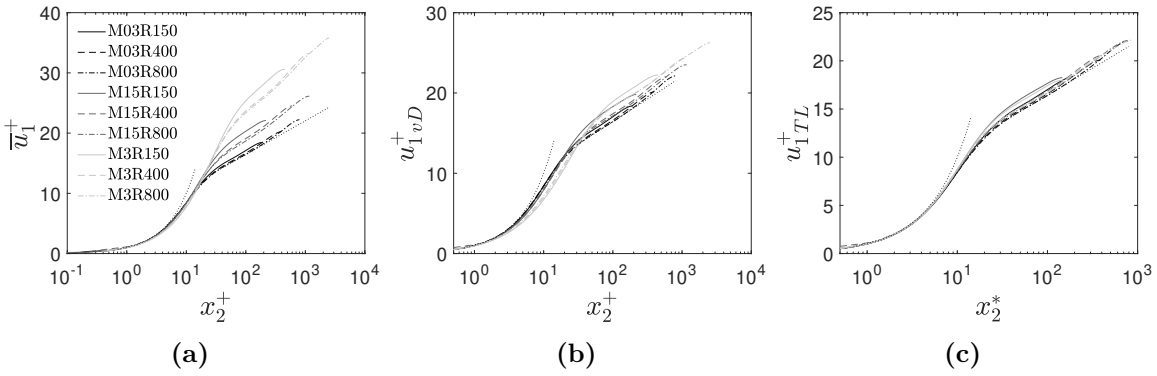


Abbildung 3.11: RMS-Werte des Drucks (a) und der Dichte (b) über x_2^* und Normierung nach Laguarda et al. [92].

Auch bei dieser Machzahl zeigt sich neben dem natürlichen Anstieg mit der bulk Machzahl eine Abnahme mit zunehmender Reynoldszahl. Der typische Verlauf der RMS-Werte von Druck- und Dichtefluktuationen bezogen auf die mittleren Profile in supersonischer Kanalströmung wird in Abbildung 3.10 deutlich. Die Druckfluktuationen sind nahezu konstant bis $x_2 \approx 10$. Es schließt sich ein schwaches Maximum an bei $x_2^* \approx 35$, bevor die Fluktuationen in der logarithmischen und äußeren Schicht abfallen. Das Niveau der Druckfluktuationen steigt stark mit der bulk Machzahl und variiert leicht mit der Reynoldszahl. Das Profil der Dichtefluktuationen zeigt ein ausgeprägtes Maximum bei $x_2^* \approx 10$ aufgrund der hohen Wärmeübertragung in diesem



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung 3.12: Mittlere Geschwindigkeitsprofile; (a) untransformiert, (b) Transformation nach van Driest, (c) Transformation nach Trettel und Larsson; $\cdots$ lineares Wandgesetz $u_1^+ = x_2^+$ und logarithmisches Gesetz $u_1^+ = 1/0.41 \ln(x_2^+) + 5.2$.

Bereich. Die Profile stimmen bei gleicher bulk Machzahl im Wandbereich gut überein, während die Werte in der Übergangs- und äußeren Schicht mit zunehmender Reynoldszahl ansteigen. Eine andere Art der Normierung nach Laguarda et al. [92] in Abbildung 3.11 mit der Schubspannungsmachzahl Ma_τ bildet die Profile unterschiedlicher Machzahlen aufeinander ab. Die Zunahme mit der Reynoldszahl ist hier wegen der in Abbildung 3.9b gezeigten Abnahme von Ma_τ ausgeprägter und wurde unter anderem von Laguarda et al. [92] in supersonischen Grenzschichten beobachtet. Abbildung 3.12 zeigt das mittlere Geschwindigkeitsprofil sowohl rein reynoldsgemittelt (a), als auch mit den gängigen Kompressibilitätstransformationen nach van Driest [143] (b) und Trettel & Larsson [142] (c). In Abbildung 3.12a sind die starken Abweichungen von dem inkompressiblen Wandgesetz

$$u_1^+ = x_2^+ \,, \qquad x_2^+ \lesssim 5 \tag{3.28}$$

$$u_1^+ = 1/\kappa \, \ln(x_2^+) + B \,, \qquad x_2^+ \gtrsim 30 \tag{3.29}$$

aufgrund der variablen Dichte und Viskosität zu sehen, wobei wie üblich für die Kármán-Konstante $\kappa = 0.41$ und für die additive Konstante $B = 5.2$ angenommen wurde. Um die Profile auf das inkompressible Wandgesetz abzubilden, wurden diverse Transformationen eingeführt, die die Kompressibilitätseffekte berücksichtigen. Die in Abbildung 3.12b gezeigte Transformation nach van Driest gewichtet die mit der Schubspannungsgeschwindigkeit normierte Geschwindigkeit mit dem Dichteprofil gemäß

$$u_{1\,vD}^+ = \int_0^{u_1^+} \sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}} \, du_1^+ \,. \tag{3.30}$$

Die Dichtegewichtung basiert auf der Morkovin-Hypothese, die davon ausgeht, dass Kompressibilitätseffekte bei moderaten Machzahlen allein durch die variierende mittlere Dichte berücksichtigt werden können [154]. Gute Übereinstimmung mit dem inkompressiblen Profil wird mithilfe dieser Transformation unter annähernd adiabaten

Wandbedingungen erreicht, wie z.B. bei den kompressiblen Grenzschichtströmungen in Duan et al. [49], Pirozzoli und Bernardini [115] und Cogo et al. [34]. Die Transformation scheitert bei den hier betrachteten Kanalströmungen mit isothermen Wänden und starkem Wärmefluss wie in Abbildung 3.12b zu sehen. Die van-Driest Transformation führt mit zunehmender Wärmeübergangsrate an der Wand zu einer Erhöhung des Achsenabschnittes des logarithmischen Gesetztes, einer zu geringen Steigung in der viskosen Unterschicht und einer Verschiebung der Wandeinheiten nach außen, d.h. zu einem Aufdicken der Übergangsschicht [142]. Trettel und Larsson [142] entwickelten eine Transformation mit dem Ziel das mittlere Geschwindigkeitsprofil auf das inkompressible Wandgesetz abzubilden, unabhängig von der Mach- und Reynoldszahl und auch der Wärmeübergangsrate. Die Transformation basiert auf zwei Formulierungen für den transformierten Geschwindigkeitsgradienten $\mathrm{d}U_2/\mathrm{d}X_2$. Eine Bedingung abgeleitet aus dem logarithmischen Gesetz liefert

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}X_2} = \frac{x_2}{X_2}\left(\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_2}\,, \tag{3.31}$$

wobei die Wahl der transformierten Koordinate X_2 zunächst noch nicht festgelegt wurde. Eine weitere Bedingung, abgeleitet aus der Spannungsbilanz und der Annahme, dass Morkovins Skalierung $R_{12}^+ = \overline{\rho} r_{12}/\tau_w$ für die Reynoldsspannung überall gilt, liefert

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}X_2} = \frac{\overline{\mu}}{\mu_w}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_2}\,. \tag{3.32}$$

Gleichsetzen der beiden Bedingungen zeigte, dass die schon bekannte semilokale Koordinate x_2^*, von der man anfangs dachte, dass sie nur bei Geschwindigkeitsfluktuationen funktioniert, auch die richtige Wahl für die transformierte mittlere Geschwindigkeit ist. Schließlich erhält man die Transformation

$$U_1^+ = \int_0^{u_1^+}\left(\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2\overline{\rho}}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}x_2}x_2 - \frac{1}{\overline{\mu}}\frac{\mathrm{d}\overline{\mu}}{\mathrm{d}x_2}x_2\right]\mathrm{d}u_1^+\,, \quad X_2^+ = \frac{\overline{\rho}(\tau_w/\overline{\rho}^{1/2})x_2}{\overline{\mu}}\,, \tag{3.33}$$

die neben der Dichtegewichtung nach van Driest zusätzlich Ableitungen der Viskositäts- und Dichteprofile enthält. Patel et al. [112] stellten eine Verbindung zur van-Driest transformierten Geschwindigkeit her über

$$u_{1\,TL}^+ = \int_0^{u_{1\,vD}}\left(1 + \frac{x_2}{Re_\tau^*}\frac{\mathrm{d}Re_\tau^*}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}u_{1\,vD}\,. \tag{3.34}$$

Daraus geht hervor, dass die Transformation von den Profilen der semilokalen Reynoldszahl beeinflusst ist und weniger von den individuellen Dichte- und Viskositätsverläufen [112, 111]. Die enorme Verbesserung gegenüber der van Driest Transformation zeigt Abbildung 3.12c. Variable-Dichte-Effekte werden durch die Transformation sehr gut berücksichtigt. Die Geschwindigkeitsprofile stimmen in der viskosen Unterschicht exzellent überein, in der logarithmischen Schicht sind die Kurven höherer

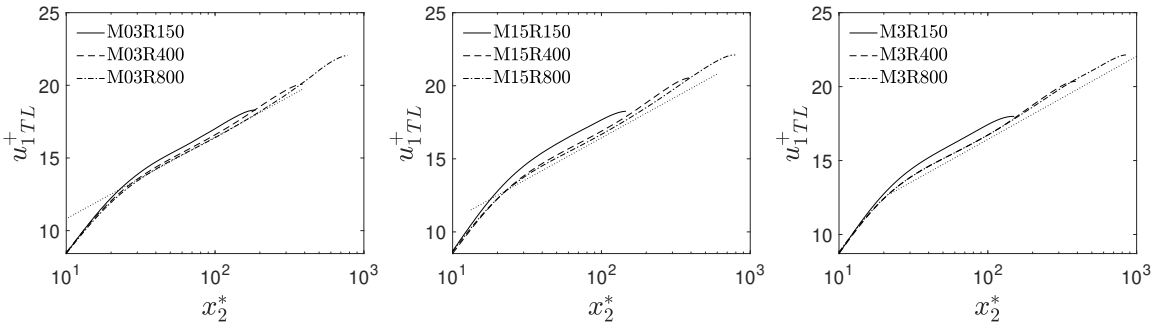


Abbildung 3.13: Einfluss der Reynoldszahl auf die Trettel & Larsson transformierten Geschwindigkeitsprofile; (a) $Ma_b = 0.3$, (b) $Ma_b = 1.5$, (c) $Ma_b = 3.0$; $\cdots$ logarithmisches Gesetz $u_1^+ = 1/0.41 \ln(x_2^+) + 5.2$.

Machzahlen immer noch leicht nach oben verschoben, insbesondere für die niedrige Reynoldszahl $Re_{\tau c}^* = 150$. Für eine bessere Übersicht sind Vergrößerung der Profile im logarithmischen Bereich in Abbildung 3.13 jeweils nur für eine Machzahl dargestellt. Deutlich ist die Abweichung bei der niedrigen Reynoldszahl für alle Machzahlen zu sehen. Die Abweichungen bei einer so geringen Reynoldszahl sind zu erwarten, da die additive Konstante B im logarithmischen Gesetz und auch die Kármán-Konstante κ schwach von der Reynoldszahl abhängen, wenn diese gering ist [60]. Die Werte reichen in der Literatur von $\kappa = 0.4$ und $B = 5.5$ bei $Re_\tau = 180$ [88] bis $\kappa = 0.384$ und $B = 4.27$ bei $Re_\tau = 5200$ [93]. Die Kurven der beiden höheren Reynoldszahlen unterscheiden sich nur noch sehr gering, bei $Ma_b = 3.0$ (Abbildung 3.13c) sind sie sogar nahezu deckungsgleich, möglicherweise aufgrund der hohen Reynoldszahl an der Wand in diesen Fällen ($Re_\tau = 1150$ bei M3R400 und $Re_\tau = 2537$ bei M3R800). Bei der niedrigen Machzahl $Ma_b = 0.3$ (Abbildung 3.13a) stimmt die Kurve der höchsten Reynoldszahl gut mit dem logarithmischen Gesetz überein mit den hier verwendeten Konstanten $\kappa = 0.41$ und $B = 5.2$. Die leichte Verschiebung nach oben gegenüber dem logarithmischen Gesetz bei den höheren Machzahlen ist in den Abbildungen 3.13b und 3.13c gut zu sehen. Ein systematischer Anstieg der Trettel-Larsson transformierten Geschwindigkeit in der logarithmischen und äußeren Schicht mit steigender Machzahl ist selbst bei den Kanalströmungen von Hasan et al. [72] zu sehen, die durch Entfernen der viskosen Dissipation eine nahezu konstante mittlere Dichte aufweisen. Folglich können dort nur intrinsische Kompressibilitätseffekte für die Abweichungen gegenüber dem logarithmischen Wandgesetz verantwortlich sein. Da das Trettel-Larsson transformierte Geschwindigkeitsprofil durch Integration der viskosen Schubspannung gewonnen werden kann (Gleichung 3.32) geht ein Anstieg der Geschwindigkeit auch mit einem Anstieg der viskosen Spannung einher [72]. Weil nahe der Wand die Summe aus viskosen und turbulenten Spannungen konstant ist, muss wiederum die turbulente Spannung sinken. Somit kann die Verschiebung im Geschwindigkeitsprofil mit einer Dämpfung der turbulenten Scherspannung in Verbindung gebracht werden, hervorge-

rufen durch intrinsische Kompressibilitätseffekte [72]. Aufgrund der Verbindung des Geschwindigkeitsprofils mit der turbulenten Schubspannung und dem Wandwiderstand, wird die additive Konstante im logarithmischen Wandgesetz (Gleichung 3.29) auch als Maß für die Reduktion des Reibungswiderstandes bei verschiedenen Methoden der Strömungsbeeinflussung verwendet [61, 121]. Die Trettel-Larsson Transformation wendet die Annahme der konstanten Gesamtspannung (viskos und turbulent) außerhalb des eigentlichen Gültigkeitsbereiches der viskosen Unterschicht auf den gesamten halben Kanal an, mit dem Argument der Unabhängigkeit der Reynoldsspannung von der Machzahl [68]. Auch wenn die zugrunde liegenden Annahmen nicht exakt erfüllt sind, zeigen zahlreiche Ergebnisse, dass die Transformation gut im gesamten wandnormalen Bereich anwendbar ist, insbesondere bei Kanalströmungen [68]. Vorwiegend bei Grenzschichtströmungen kommt es zu größeren Abweichungen der nach van Driest und Trettel-Larsson transformierten Geschwindigkeit von dem inkompressiblen Wandgesetz, weshalb ein neuerer Ansatz von Griffin et al. [68] (Gesamtspannungsbasierte Transformation) separate Annahmen für die viskose und turbulente Spannung nutzt, jeweils im entsprechenden Gültigkeitsbereich. Mit einer verallgemeinerten dimensionslosen mittleren Scherung $S_t^+ = \partial U_t^+ / \partial y^*$, wobei der Index t für 'total' steht, wird dort die Spannungsbilanz ausgedrückt durch

$$\tau^+ = S_t^+ \left(\frac{\tau_v^+}{S_{TL}^+} + \frac{\tau_R^+}{S_{eq}^+} \right) . \tag{3.35}$$

Die Größen τ_v^+ und τ_R^+ stehen für die viskose Spannung und Reynoldsschubspannung, die in Summe gleich τ^+ sind. Die mittleren dimensionslosen Spannungen $S_{TL}^+ = \partial U_{TL}^+ / \partial y^*$ und $S_{eq}^+ = \partial U_{eq}^+ / \partial y^*$ sind einmal für die viskose Region (Index TL, 'Trettel-Larsson') und einmal für die logarithmische Schicht (Index eq, 'equilibrium') abgeleitet. Im viskosen wandnahen Bereich stimmt die Transformation mit der Trettel-Larsson Transformation überein und in der logarithmischen Schicht basiert sie auf dem ungefähren Gleichgewicht von turbulenter Produktion und Dissipation [34]. Unter Annahme konstanter Gesamtspannung $\tau^+ \approx 1$ wird die verallgemeinerte Scherung in Gleichung 3.35 zu

$$S_t^+ \approx \frac{S_{eq}^+}{1 + S_{eq}^+ - S_{TL}^+} . \tag{3.36}$$

Integration über der semilokalen Wandkoordinate liefert die transformierte Geschwindigkeit

$$u_{1\,t}^+(y^*) = \int S_t^+ \mathrm{d}y^* . \tag{3.37}$$

Mit dieser etwas differenzierteren Herangehensweise können die Ungenauigkeiten der van-Driest Transformation weiter reduziert werden, was Griffin et al. [68] für eine Vielzahl unterschiedlicher Strömungen (Grenzschichtströmungen mit adiabaten und

diabaten (beheizten und gekühlten) Wänden, Kanal- und Rohrströmungen) zeigten. Exzellente Übereinstimmung zeigte sich auch bei den Grenzschichtströmungen von Cogo et al. [34] über den gesamten wandnormalen Bereich für ein relativ großes Spektrum an Mach- und Reynoldszahlen. Eine weitere neuere Transformation ist die teils physikalische und teils datenbasierte Transformation von Volpiani et al. [147], die in Grenzschichtströmungen verschiedener Machzahlen, Reynoldszahlen und thermischer Wandbedingungen eine gegenüber van Driest und Trettel & Larsson bessere Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeit liefert. Sie ist abgeleitet von bestehenden Transformation (z.B. van Driest und Trettel & Larsson), die nach Modesti und Pirozzoli [104] alle in der Form

$$y_I = \int_0^y f_I \mathrm{d}y\,, \qquad u_I = \int_0^u g_I \,\mathrm{d}u \tag{3.38}$$

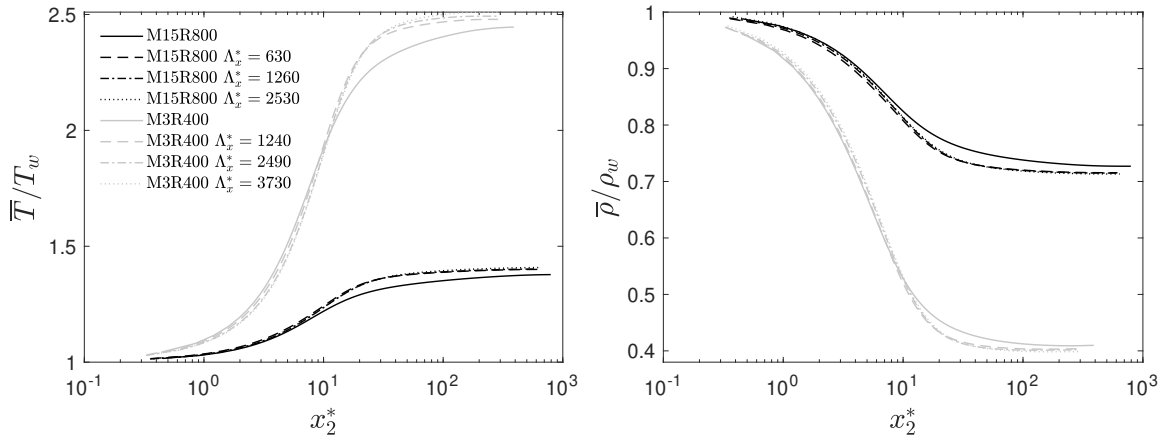
ausgedrückt werden können, wobei I für die jeweilige Transformation steht und die Funktionen f_I und g_I die Dichte- und Viskositätsverläufe beinhalten. Volpiani et al. [147] fanden

$$y_V^+ = \int_0^{y^+} \left(\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}\right)^{1/2} \left(\frac{\overline{\mu}}{\mu_w}\right)^{-3/2} \mathrm{d}y^+\,, \quad u_V^+ = \int_0^{u^+} \left(\frac{\overline{\rho}}{\rho_w}\right)^{1/2} \left(\frac{\overline{\mu}}{\mu_w}\right)^{-1/2} \mathrm{d}u^+ \tag{3.39}$$

für die Transformation der wandnormalen Koordinate und der Geschwindigkeit.

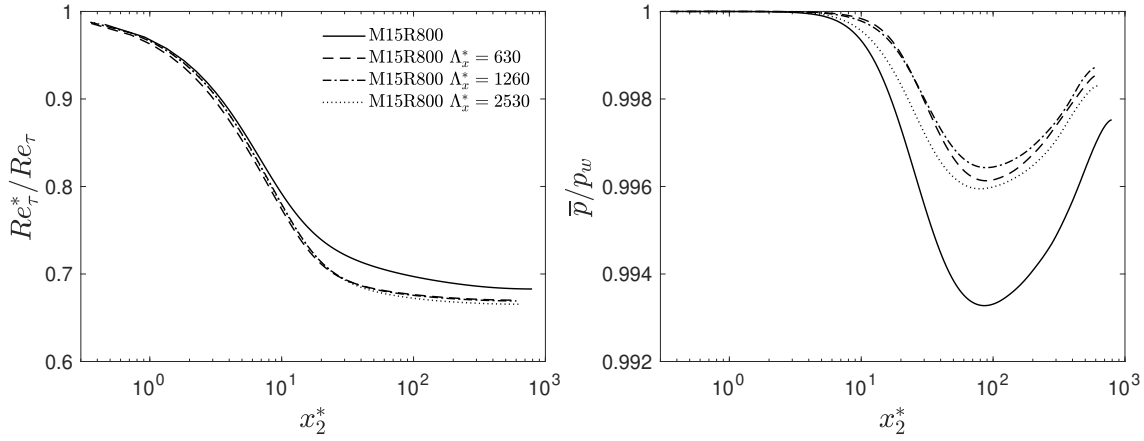
3.3.2. Beeinflusste Fälle

Die in Abschnitt 3.3.1 thematisierten Größen werden im Folgenden für die beeinflussten Strömungen gezeigt, um den Einfluss der Strömungsbeeinflussung auf diese im Allgemeinen zu zeigen. Da ein ähnliches Verhalten der hier gezeigten Größen über alle untersuchten Mach- und Reynoldszahlen hinweg beobachtet wird, werden dafür repräsentativ verschiedene Strömungsbedingungen ausgewählt. Die thermodynamischen Größen werden durch die zusätzliche Scherung in 23-Richtung von den Wandbewegungen zusätzlich beeinflusst und es kommt zu einer Erhöhung der Temperatur im mittleren Kanalbereich, verglichen mit dem unbeeinflussten Fall. Die Profile von Temperatur und Dichte sind in Abbildung 3.14 für die Fälle M15R800 und M3R400 jeweils mit und ohne Beeinflussung dargestellt. Im wandnahen Bereich bis $x_2^* \approx 15$ stimmen die beeinflussten und unbeeinflussten Kurven gut überein. Gleiches gilt für die Profile der semilokalen Reynoldszahl, wenn diese mit dem Wandwert normiert werden (Abbildung 3.15a). Die zusätzliche Aufheizung im Mittenbereich durch die Beeinflussung ist proportional zur Beeinflussungswellenlänge, aufgrund der höheren wandnormalen Reichweite der mittleren spannweitigen Geschwindigkeit, die mit größeren Beeinflussungswellenlängen generiert wird. Gattere et al. [58] äußerten Kritik bezüglich der physikalischen Vergleichbarkeit der Ergebnisse, da die Strömungsbeeinflussung zusätzlich die bulk Temperatur und damit die thermodynamischen Bedingungen verändert. Wie in Abbildung 3.14a zu sehen, ist die Temperaturerhöhung



(a) **(b)**

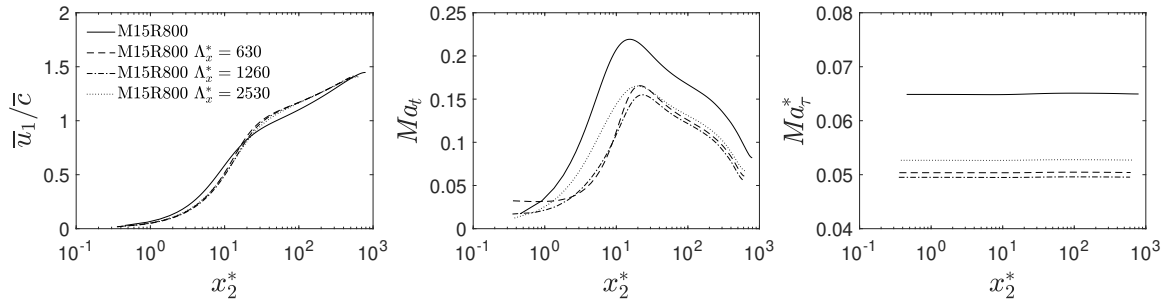
Abbildung 3.14: Beeinflusste Variation der mittleren Temperatur (a) und Dichte (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der semilokalen Koordinate x_2^* für die Fälle M15R800, M3R400 und verschiedene Beeinflussungswellenlängen.



(a) **(b)**

Abbildung 3.15: Beeinflusste Variation der semilokalen Reynoldszahl (a) und des Drucks (b) normiert mit den jeweiligen Wandwerten über der semilokalen Koordinate x_2^* für den Fall M15R800 und verschiedene Beeinflussungswellenlängen.

jedoch sehr gering im Vergleich zu den Änderungen, die sich durch eine Änderung der Machzahl ergeben. Das Profil der semilokalen Reynoldszahl, welches sich als entscheidend in der Trettel-Larsson Transformation herausstellte (siehe Gleichung 3.34), stimmt zudem sehr gut überein im wichtigen wandnahen Bereich, wo die Beeinflussung arbeitet (Abbildung 3.15a). Darüber hinaus wurde in Ruby und Foysi [126] für einen Fall mit $Ma_b = 3$ und $Re_{\tau c}^* = 400$ gezeigt, dass die Aufheizung in der Kanalmitte je nach Beeinflussungswellenlänge eine sehr lange Zeit von $15 \cdot 10^4 - 30 \cdot 10^4$



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung 3.16: Beeinflusste Machzahlprofile; (a) lokale Machzahl $\overline{u}_1/\overline{c}$, (b) turbulente Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$, (c) semilokale Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$.

viskosen Zeitskalen $t^+ = t/t_\nu = t\rho_w u_\tau^2/\mu_w$ nach Einschalten der Beeinflussung in Anspruch nimmt. Die Wandreibungsspannung dagegen ist bereits nach ca. 5000 viskosen Zeitskalen statistisch stationär und zeigt keine wahrnehmbare Veränderung aufgrund der weiter steigenden Temperatur im Mittenbereich. Somit sind die variable-Dichte-Effekte der unbeeinflussten Strömung auch für die zugehörigen beeinflussten Fälle maßgebend und eine zusätzliche Einflussnahme auf die Wandreibungsspannung über die veränderte bulk Temperatur kann als vernachlässigbar klein angesehen werden. Infolge der Beeinflussung nimmt die ohnehin schon geringe Druckvariation über den Kanal weiter ab, siehe Abbildung 3.15b. Machzahlen unter dem Einfluss der Wandoszillationen sind in Abbildung 3.16 gezeigt. Die lokale Machzahl (Abbildung 3.16a) sinkt leicht im wandnahen Bereich aufgrund des geringeren Geschwindigkeitsgradienten, der mit der Widerstandsreduktion einhergeht. Da der Massenstrom im beeinflussten und unbeeinflussten Zustand gleich ist, kommt es mit Beeinflussung in der logarithmischen Schicht zu leicht höheren Geschwindigkeiten. Ein wesentlicher Einfluss der höheren Temperatur im Mittenbereich mit zunehmender Beeinflussungswellenlänge über die lokale Schallgeschwindigkeit ist hier ebenfalls nicht zu beobachten. Die turbulente Machzahl (Abbildung 3.16b) und die Schubspannungsmachzahl (Abbildung 3.16c) sinken unter Beeinflussung, aufgrund der niedrigeren turbulenten kinetischen Energie bzw. Schubspannungsgeschwindigkeit verglichen mit dem unbeeinflussten Fall. Darüber hinaus nehmen die RMS-Werte der Druck- und Dichtefluktuationen im beeinflussten Zustand ab (Abbildung 3.17). Gleiches gilt für die Temperaturvarianz $\widetilde{T''T''}$ und die turbulenten Wärmeflüsse $\widetilde{T''u_1''}$, $\widetilde{T''u_2''}$ [126]. Die Trettel & Larsson transformierten Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 3.18 sowohl für den unbeeinflussten als auch für die beeinflussten Fälle bei $Ma_b = 1.5$ und $Re_{\tau c}^* = 800$ dargestellt. Während der unbeeinflusste Fall gute Übereinstimmung mit dem linearen und logarithmischen Wandgesetz zeigt, sind die beeinflussten Kurven deutlich nach oben verschoben, gemäß einer größeren Kármán-Konstante im logarithmischen Wandgesetz. Aufgrund der in Abschnitt 3.3.1 dargelegten Verbindung eines nach oben verschobenen Geschwindigkeitsprofils mit einer niedrigeren turbulenten

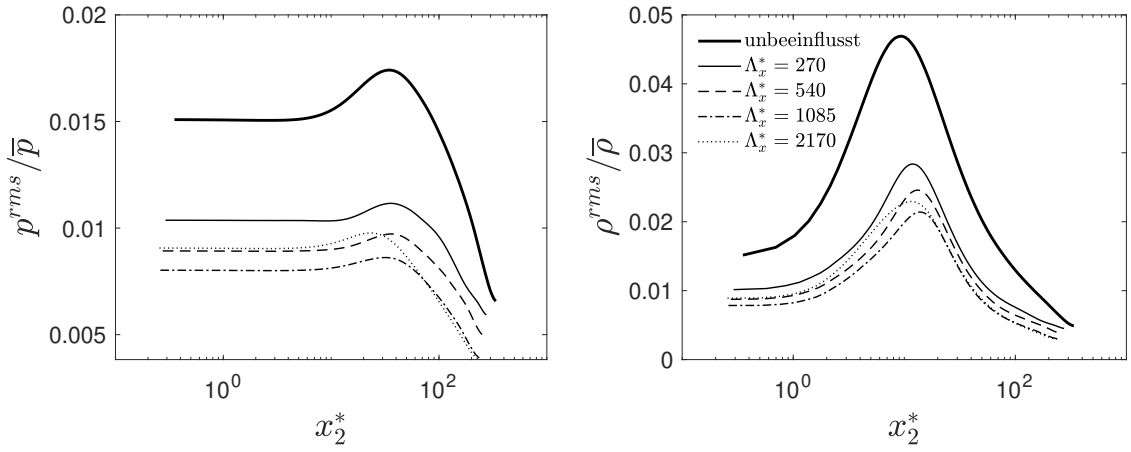


Abbildung 3.17: RMS-Werte des Drucks (a) und der Dichte (b) über x_2^*, normiert mit mittleren Werten, bei $Ma_b = 1.5$, $Re_{\tau c} = 350$ im unbeeinflussten Zustand und mit verschiedenen Beeinflussungswellenlängen.

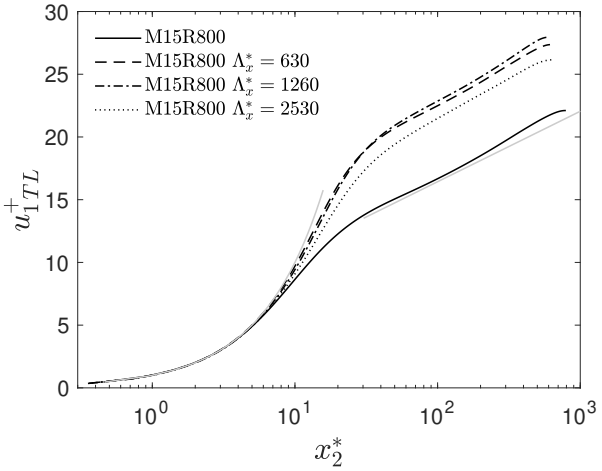


Abbildung 3.18: Trettel & Larsson transformierte Geschwindigkeitsprofile für die beeinflussten Fälle und den unbeeinflussten Fall bei $Ma_b = 1.5$ und $Re_{\tau c}^* = 800$. Graue Linien: lineares Wandgesetz $u_1^+ = x_2^+$ und logarithmisches Gesetz $u_1^* = 1/0.41 \ln(x_2^+) + 5.2$.

Schubspannung kann die Kármán-Konstante als Maß für die Reduktion des Reibungswiderstandes angesehen werden [61, 121]. Dies trifft auf jegliche Methoden der Strömungsbeeinflussung zu, die den Wandwiderstand durch eine Abschwächung der turbulenten Spannungen reduzieren. Der Betrag, um den das Geschwindigkeitsprofil nach oben verschoben wird, ist dabei nahezu proportional zur Widerstandsreduktion, wie Yao und Hussain [154] für (zeitliche) Wandoszillationen in supersonischer Strömung feststellten. Der Effekt einer aufdickenden viskosen Unterschicht, sowie einer

Verkürzung und Anhebung des logarithmischen Bereichs wird gleichermaßen auch in inkompressibler Strömung mit spannweitigen Wandoszillationen beobachtet [139]. Die Änderungen gegenüber der unbeeinflussten Strömung werden besser sichtbar, wenn die Geschwindigkeit mit der Schubspannungsgeschwindigkeit der unbeeinflussten Strömung normiert wird. Auf diese Weise zeigt sich eine deutliche Verringerung der Geschwindigkeit in der viskosen Unterschicht und nur eine leichte Anhebung in der logarithmischen Schicht, eine Annäherung an das laminare Geschwindigkeitsprofil [139]. Analog wird die Abwärtsverschiebung des mit der Schubspannungsgeschwindigkeit skalierten Geschwindigkeitsprofils in der logarithmischen Schicht herangezogen, um den negativen Effekt von hydraulisch rauen Oberflächen auf die Wandreibung generalisiert zu erfassen, wo die direkte Interaktion der turbulenten Strömung mit der Rauigkeitsstruktur kompliziert zu beschreiben ist [153]. Konkret nutzten Gatti und Quadrio [60] das logarithmische Wandgesetz (Gleichung 3.29) und das Geschwindigkeitsdefizitgesetz

$$u_{1c}^{+} - u_{1}^{+} = -\frac{1}{\kappa}\ln(x_2) + B_1 \tag{3.40}$$

mit einer weiteren Konstanten B_1 und der Geschwindigkeit auf der Achse u_{1c} um für inkompressible Strömungen mit konstantem Massenstrom eine Beziehung zwischen der Verschiebung der additiven Konstante B im logarithmischen Gesetz und der Widerstandsreduktion $\mathcal{DR} = 1 - C_f/C_{f0}$ herzuleiten. Aus dem logarithmischen Gesetz wurde $u_{1c}^{+} = U_b^{+} + 1/\kappa$ mit $U_b^{+} = \sqrt{2/C_f}$ abgeschätzt, sodass die Beziehung

$$\Delta B = \sqrt{\frac{2}{C_{f0}}}\left[(1-\mathcal{DR})^{-1/2} - 1\right] - \frac{1}{2k}\ln(1-\mathcal{DR}) \tag{3.41}$$

gilt, wobei C_{f0} der Reibungskoeffizient der unbeeinflussten Strömung ist. Unter der Annahme, dass ΔB unabhängig von Re_τ ist, was schon ab ungefähr $Re_\tau = 1000$ annähernd der Fall ist [63], kann die Relation zusätzlich dazu verwendet werden, um $\mathcal{DR}$ bei höheren realitätsnäheren Re_τ zu extrapolieren. Rouhi et al. [124] bescheinigten dem Modell eine gute Genauigkeit anhand der Daten von Kanalströmungen mit fortlaufenden Wellen an der Wand bei $Re_\tau = 4000$. Im Parameterbereich, wo positive Widerstandsreduktionsraten von 15 - 28 % erreicht wurden, wich das Modell basierend auf Gleichung 3.41 um weniger als 2 % von den LES Ergebnissen ab. Yao et al. [156] wendeten das Modell auf ihren Datensatz von zeitlichen spannweitigen Wandoszillationen in turbulenter Kanalströmung an. Die vorausgesagte Widerstandsreduktion mithilfe der Relation 3.41 zeigte gute Übereinstimmung mit den DNS Daten bei $Re_\tau = 500$ und 1000, wobei die vorausgesagte Widerstandsreduktion bei $Re_\tau = 2000$ mit $\mathcal{DR} = 25\%$ um circa 3 % höher war als der wahre Wert. Die steigende Diskrepanz bei höherer Reynoldszahl Re_τ führten Yao et al. [156] auf die zugrunde liegende Annahme zurück, dass die Konstante B_1 in Gleichung 3.40 durch die Wandoszillationen unbeeinträchtigt ist. Für nahezu optimale Beeinflussungsparameter, die eine hohe Widerstandsreduktion liefern, ist die Annahme durch den starken Rückgang von Re_τ in der beeinflussten Strömung jedoch nicht immer tragbar [156].

3.4. Effizienz der Strömungsbeeinflussung

Nachdem das allgemeine Funktionsprinzip der Beeinflussungsmethode und deren Einfluss auf die wichtigsten Größen in den vorangegangenen Abschnitten behandelt wurde, werden nachfolgend die Wirksamkeit der Methode und Unterschiede bezüglich variierender Strömungsbedingungen aufgezeigt.

3.4.1. Widerstandsreduktion

Die Wirksamkeit der Beeinflussung wird mithilfe des Reibungskoeffizienten

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_b U_b^2} \tag{3.42}$$

quantifiziert. Dieser ist im Bezug auf den Wert der jeweiligen unbeeinflussten Strömung C_{f0} in Abbildung 3.19 für alle untersuchten Strömungsbedingungen und Beeinflussungswellenlängen gezeigt.Die relative Änderung des Reibungskoeffizienten zwischen der beeinflussten und unbeeinflussten Strömung ergibt nach Gatti und Quadrio [60] die Widerstandsreduktionsrate

$$\mathcal{DR}(\%) = 1 - C_f/C_{f0}\,. \tag{3.43}$$

Wie zu sehen, wird für alle untersuchten Beeinflussungswellenlängen unter allen Strömungsbedingungen positive Widerstandsreduktion erreicht. Das Optimum liegt bei der nahezu inkompressiblen Strömung ($Ma_b = 0.3$) im Bereich $\Lambda^*_{x\,opt} = 1000 - 1250$, in Übereinstimmung mit den inkompressiblen Ergebnissen von Viotti et al. [146], wonach die optimale Beeinflussungswellenlänge aus dem Produkt der optimalen Periode $T^+_{opt} = 100 - 125$ der zeitlichen Oszillationen und der wandnahen Konvektionsgeschwindigkeit $\mathcal{U}_w = 10$ berechnet werden kann. Das Optimum verschiebt sich mit zunehmender Machzahl zu größeren Wellenlängen, im Falle der mittleren Reynoldszahl $Re^*_{\tau c} = 400$ beispielsweise von 1217 auf 1280 und 2488 bei den bulk Machzahlen 0.3, 1.5 und 3. Zudem sinkt das Verhältnis C_f/C_{f0} im Optimum mit zunehmender Machzahl von 59 % ($Ma_b = 0.3$) auf 55 % ($Ma_b = 1.5$) und 53 % ($Ma_b = 3.0$), d.h. eine höhere Widerstandsreduktion $\mathcal{DR}$ wird in den supersonischen Strömungen erreicht. Darüber hinaus ist der optimale Wellenlängenbereich bei höheren Machzahlen ausgedehnter. So kann die optimale Wellenlänge $\Lambda^*_{x\,opt} \approx 2500$ bei $Ma_b = 3$ und $Re^*_{\tau c} = 400$ um den Faktor $0.5 - 1.5$ verändert werden, ohne dass sich C_f/C_{f0} um mehr als 9 % verschlechtert. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die wandnahen kohärenten Wirbelstrukturen der supersonischen Strömungen veränderte Dimensionen aufweisen und generell leichter zu beeinflussen sind. Die Überlegenheit der beiden supersonischen Strömungen gegenüber der Inkompressiblen wird besonders bei der niedrigsten untersuchten Reynoldszahl $Re^*_{\tau c} = 150$ deutlich, wo die Strömung ab einer Wellenlänge von $\Lambda^*_x = 1840$ ($Ma_b = 1.5$) bzw. $\Lambda^*_x = 3730$ ($Ma_b = 3.0$) relaminarisiert und ein

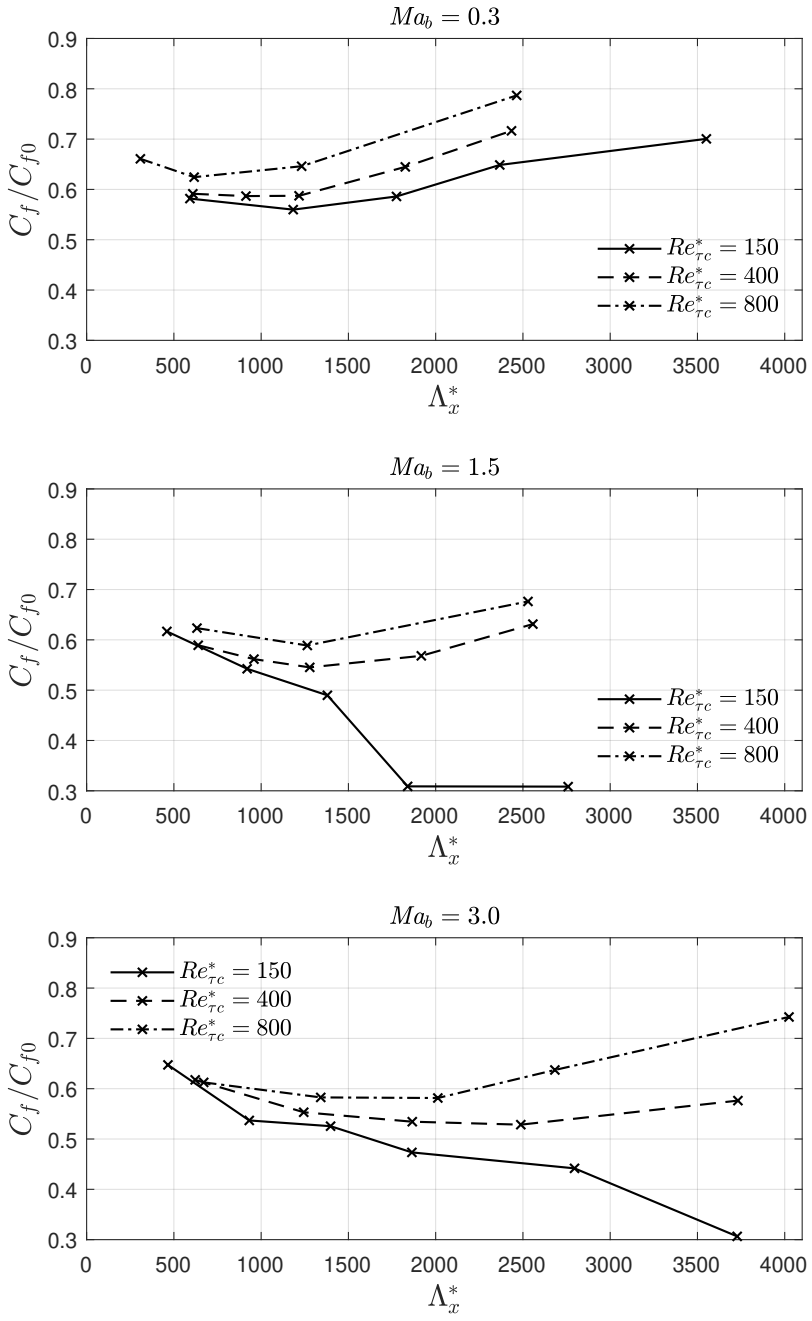


Abbildung 3.19: Reibungskoeffizient C_f der beeinflussten Strömung bezogen auf die jeweilige unbeeinflusste Strömung mit Reibungskoeffizient C_{f0} in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ_x^*. Oben: $Ma_b = 0.3$; Mitte: $Ma_b = 1.5$; Unten: $Ma_b = 3.0$.

Anteil von nur ungefähr 30 % des Reibungskoeffizienten der unbeeinflussten Strömung verbleibt. Wie bei allen wandbasierten Methoden zur Widerstandsreduktion und im Inkompressiblen gut untersucht (z.B. [156, 60, 63]) kommt es mit steigender Reynoldszahl generell zu einer Abnahme der Widerstandsreduktion aufgrund der zunehmenden Bedeutung der äußeren großskaligen Wirbelstrukturen, die Einfluss bis hin zur Wandregion ausüben. Die Wandregion, die durch die Beeinflussung manipuliert wird, wird anteilig an der gesamten Strömung immer kleiner und trägt zunehmend weniger zum turbulenten Widerstand bei [60]. Die Verschlechterung in der Widerstandsreduktion mit der Reynoldszahl ist dabei von der Beeinflussungswellenlänge abhängig. Für kleinere Λ_x^* ist die Änderung weniger ausgeprägt als für Größere, im Einklang mit den Ergebnissen von Yao und Hussain [154] in Abhängigkeit der zeitlichen Oszillationsperiode T^+. Yao und Hussain [154] vermuteten weiterhin eine stärkere reynoldszahlbedingte Abnahme von $\mathcal{DR}$ bei höherer Machzahl. Die beschränkte Datenlage von nur zwei unterschiedlichen Reynoldszahlen bei $Ma_b = 1.5$, von denen ein Fall periodische Relaminarisierung bei hohen T^+ zeigte, ließ jedoch keine eindeutigen Rückschlüsse zu. Durch den vorliegenden stark vergrößerten Datenbestand kann die Vermutung bestätigt werden. Die Erhöhung der Reynoldszahl von $Re_{\tau c}^* = 400$ auf $Re_{\tau c}^* = 800$ führt zu einer Verringerung der optimalen Widerstandsreduktion um 9.0 %, 9.6 % und 11.2 % in der Reihenfolge steigender Machzahlen. Eine weitere Auffälligkeit in Abbildung 3.19 ist die Abnahme der optimalen Beeinflussungswellenlänge mit steigender Reynoldszahl bei allen Machzahlen. Gleiches wurde schon in den Untersuchungen des Reynoldszahleffektes auf die Widerstandsreduktion durch spannweitige Wandoszillationen von Yao et al. [156] in inkompressibler Strömung festgestellt. Sie fanden deutliche Unterschiede in den Wirbelstärkeprofilen $\overline{\omega}_1^+(x_2^+)$ in Stromabrichtung im wandnahen Bereich für unterschiedliche Reynoldszahlen. Die Wirbelstärke steigt mit der Reynoldszahl, was eine Verstärkung der Wirbelstrukturen erkennen lässt. Die Kurven haben jeweils ein Minimum bei $y_2^+ = 4$, die Position des darauffolgenden Maximums variiert jedoch von $x_2^+ = 21$ bei $Re_\tau = 200$ bis $x_2^+ = 16$ bei $Re_\tau = 2000$ [156]. Da die Distanz zwischen Minimum und Maximum als der mittlere Radius der Wirbel in Strömungsrichtung angesehen werden kann [88], wird deren Größe mit steigender Reynoldszahl kleiner, selbst bei Normierung mit Wandeinheiten. Entsprechend muss auch die optimale Beeinflussungswellenlänge kleiner werden um diese bestmöglich zu manipulieren.

3.4.2. Leistungsbilanzierung

Bei aktiven Methoden zur Strömungsbeeinflussung ist die Bereitstellung externer Energie für das Funktionsprinzip notwendig. Ist diese noch nicht in dem Indikator für die Effizienz der Beeinflussung $\mathcal{DR}$ eingepreist, muss die Leistung bilanziert werden um die Beeinflussungseffizienz ganzheitlich beurteilen zu können. Dabei wird der Nutzen, der durch die Reduzierung des Reibungswiderstands ermöglicht wird, gegen den Aufwand für die Aufrechterhaltung der Wandbewegungen abgewogen. Gemäß Viot-

ti et al. [146], Quadrio et al. [118] und Kasagi et al. [85] ist die Leistung, um die Strömung gegen den viskosen Wandwiderstand anzutreiben, definiert als

$$\mathcal{P}_{\mathrm{dr}} = (\overline{\tau_{12\,l}} + \overline{\tau_{12\,u}})\, L_{x_1} L_{x_2} u_b \tag{3.44}$$

mit den Indizes l und u für die untere (lower) und obere (upper) Wand. Die relative Änderung der Antriebsleistung zwischen beeinflusster und unbeeinflusster (Index 0) Strömung ergibt die eingesparte Leistung

$$P_{\mathrm{sav}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{dr}\,0} - \mathcal{P}_{\mathrm{dr}}}{\mathcal{P}_{\mathrm{dr}\,0}}\,, \tag{3.45}$$

welche gleichbedeutend mit $\mathcal{DR}$ (Gleichung 3.43) ist. Die Wandbewegungen leisten viskose Arbeit, die dazugehörige Leistung wird an den Wänden ausgewertet gemäß

$$\mathcal{P}_{\mathrm{osc}} = \overline{(\tau_{23\,l} + \tau_{23\,u})\, u_3} L_{x_1} L_{x_3}\,. \tag{3.46}$$

Deren Anteil an der Antriebsleistung der unbeeinflussten Strömung

$$P_{\mathrm{req}} = \mathcal{P}_{\mathrm{osc}} / \mathcal{P}_{\mathrm{dr}\,0} \tag{3.47}$$

ergibt, subtrahiert von der anteilig eingesparten Antriebsleistung, die Netto Leistungsersparnis bezogen auf die Antriebsleistung der unbeeinflussten Strömung:

$$P_{\mathrm{net}} = P_{\mathrm{sav}} - P_{\mathrm{req}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{dr}\,0} - (\mathcal{P}_{\mathrm{dr}} + \mathcal{P}_{\mathrm{osc}})}{\mathcal{P}_{\mathrm{dr}\,0}}\,. \tag{3.48}$$

Die anteilig gesparten, benötigten und Netto Leistungen sind für alle untersuchten Parameterkombinationen in Abbildung 3.20 über der Beeinflussungswellenlänge aufgetragen. Zunächst lässt sich für die niedrigste Machzahl $Ma_b = 0.3$ (obere Reihe) deutlich der Reynoldszahleffekt erkennen. Bei ungefähr gleichbleibender Aufwendung sinkt die eingesparte Antriebsleistung, sodass bei der höchsten Reynoldszahl kaum noch positive Nettoleistung erreicht werden kann. Die Nettoleistung bei optimaler Beeinflussungswellenlänge sinkt von 9.5 % auf 5 % und 2 % mit steigender Reynoldszahl. Die verwendete Amplitude $A^+ = 12$ wurde jedoch nicht im Hinblick auf bestmögliche erreichbare Nettoeinsparung ausgewählt, sondern aufgrund der weiten Verbreitung in der Literatur. Um den Einfluss der Amplitude trotzdem zu demonstrieren, sind für die Kombinationen [$Ma_b = 0.3$, $Re^*_{\tau c} = 150$] und [$Ma_b = 1.5$, $Re^*_{\tau c} = 150$] zusätzlich Ergebnisse für eine halbierte Amplitude $A^+ = 6$ gezeigt. Sowohl die gesparte als auch die aufgewendete Leistung ist bei der niedrigeren Amplitude geringer. Durch einen vergleichsweise stärkeren Rückgang der aufgewendeten Leistung ist die Nettoersparnis jedoch gegenüber der hohen Amplitude größer. Eine Ausnahme bilden die großen Beeinflussungswellenlängen bei $Ma_b = 1.5$, wo die Kurve der eingesparten Leistung bei höherer Amplitude durch Relaminarisierung nicht das typische Maximum aufweist. Bei der Machzahl $Ma_b = 1.5$ wird für den gesamten Bereich der Beeinflussungswellenlänge positive Nettoleistung erreicht mit maximalen Werten von 26 %

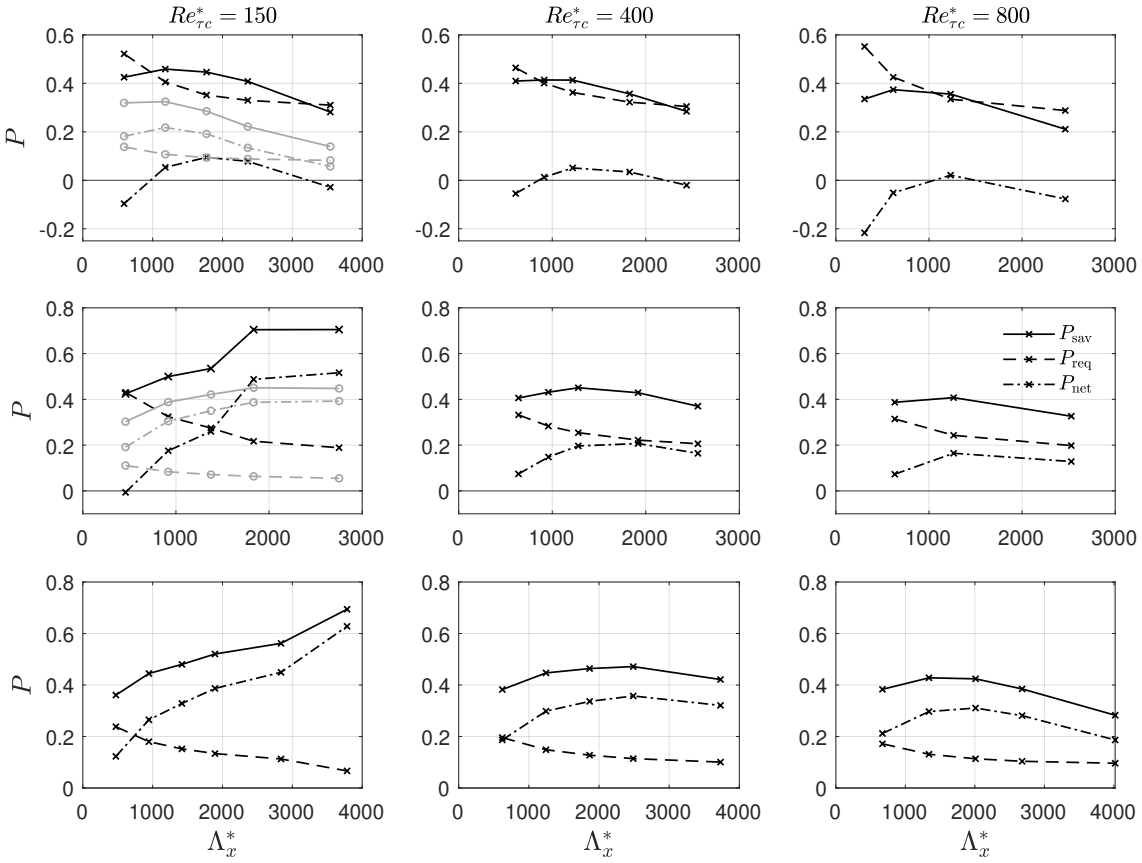


Abbildung 3.20: Leistungsbilanzierung in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ^*_x. Obere Reihe: $Ma_b = 0.3$; Mittlere Reihe: $Ma_b = 1.5$; Untere Reihe: $Ma_b = 3.0$. $-\times-$ Amplitude $A^+ = 12$; $-\mathrm{o}-$ Reduzierte Amplitude $A^+ = 6$.

($Re^*_{\tau c} = 150$ unter Nichtberücksichtigung der Relaminarisierung), 21 % ($Re^*_{\tau c} = 400$) und 17 % ($Re^*_{\tau c} = 800$). Möglich ist diese enorme Verbesserung gegenüber der nahezu inkompressiblen Strömung einerseits durch höhere Einsparung P_{sav} und andererseits und in höherem Maße durch eine wesentlich niedrigere aufgewendete Leistung P_{req}. Ein zusätzlicher Vorteil bei höherer Machzahl ist die Präferenz für größere Beeinflussungswellenlängen in P_{sav}, da große Wellenlängen bezüglich des Aufwands energetisch attraktiver sind. Die aufgewendete Leistung P_{req} ist durchweg monoton fallend. Viotti et al. [146] beobachteten Gleiches in inkompressibler Strömung und nutzten zusätzlich die laminare Lösung des Stokes-Problems um den Verlauf von P_{req} vorherzusagen. Bei dieser Stokes-Schicht handelt es sich um eine Grenzschicht mit ruhendem Fluid und oszillierender Wand. Aufgrund der Übereinstimmung des laminaren mit dem gemittelten turbulenten spannweitigen Geschwindigkeitsprofil, kann die benötigte Leistung mit der laminaren Theorie gut vorhergesagt werden, was ein direkter Vergleich mit den turbulenten DNS Daten bestätigte [146]. Quadrio und Ricco [117] drückten die

benötigte Leistung für zeitliche Wandoszillationen in laminarer Strömung aus durch

$$P_{\mathrm{req}} = A^2(\pi/(\nu T))^{1/2}/(2u_b\tau) \tag{3.49}$$

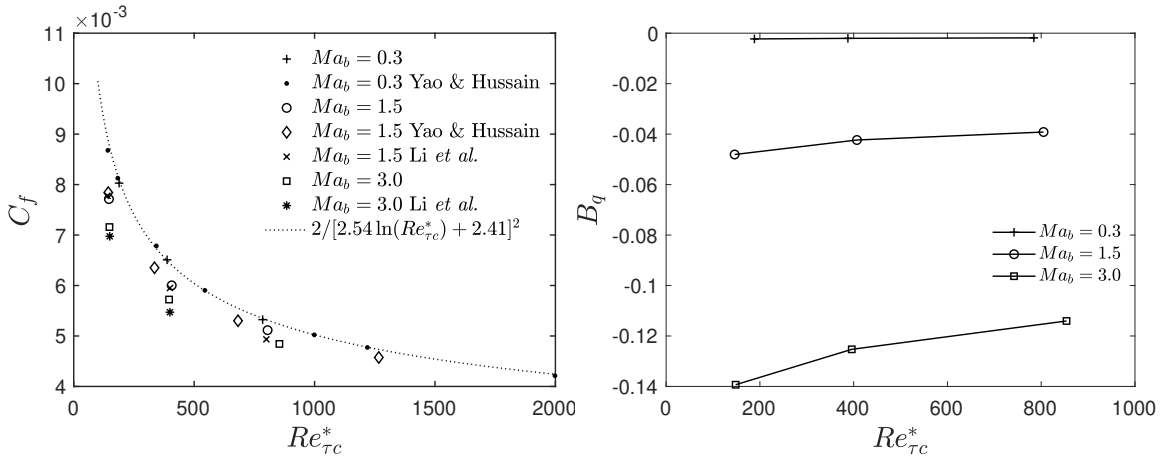
mit $\tau = \mathrm{d}u_1/\mathrm{d}x_2\big|_{x_2=0}$. Hier zeigt sich direkt die Abhängigkeit von der Amplitude A und der Oszillationsperiode T. Aufgrund der guten Beschreibung der benötigten Leistung mithilfe der laminaren Stokes-Schicht, variieren die in Abbildung 3.20 gezeigten Profile auch kaum mit der Reynoldszahl. Die Trends einer sinkenden benötigten Leistung P_{req} und einer höheren erzielbaren Nettoersparnis P_{net} setzen sich bei der höchsten Machzahl $Ma_b = 3$ weiter fort, weshalb von einem klaren Machzahleffekt ausgegangen werden kann.

3.5. Reibungskoeffizient

Der Reibungskoeffizient C_f, der als Indikator für die Effizienz der Strömungsbeeinflussung in Abschnitt 3.4.1 benutzt wurde, soll nun eingehender untersucht werden bezüglich des Einflusses der Kompressibilität. Zunächst ist es interessant, sich die Größe für die unbeeinflussten Fälle anzusehen. Abbildung 3.21a zeigt die Reibungskoeffizienten aller unbeeinflusster Strömungen zusammen mit den kompressiblen Kanalströmungen von Yao und Hussain [155] und Li et al. [97]. Eine starke Abhängigkeit von der Reynoldszahl ist zu erkennen. Abe und Antonia [2] nutzten zu deren Beschreibung im Inkompressiblen den empirischen Zusammenhang

$$C_f = \frac{2}{\left(2.54\ln(Re_\tau) + 2.41\right)^2}\,, \tag{3.50}$$

welcher in exzellenter Übereinstimmung ist mit den vorliegenden Daten bei $Ma_b = 0.3$, sowie mit denen von Yao und Hussain [155] bei $Ma_b = 0.3$ im gesamten Bereich. Die Kurve variiert besonders stark für niedrige Reynoldszahlen, während C_f im höheren Reynoldszahlbereich weniger stark sinkt. Die Abhängigkeit von C_f von der Reynoldszahl führt bei Bildung der Widerstandsreduktion $\mathcal{DR} = 1 - C_f/C_{f0}$ zu einer doppelten Abhängigkeit, da sich zusätzlich die Reynoldszahl der beeinflussten Strömung bei konstantem Massenstrom ändert. Deshalb werden Untersuchungen zur Reynoldszahlabhängigkeit der Widerstandsreduktion vermehrt mithilfe des Geschwindigkeitsprofils gemäß Gleichung 3.41 durchgeführt (z.B. Gatti und Quadrio [60], Yao et al. [156]). Dort ist die Reynoldszahlabhängigkeit nur noch implizit über den Reibungskoeffizienten C_{f0} der unbeeinflussten Strömung enthalten, deren Verlauf in Abbildung 3.21a zu sehen ist. Gegenüber dem sonst üblichen Potenzgesetz $\mathcal{DR} \propto Re_\tau^{-\gamma}$ (z.B. Touber und Leschziner [139]) mit einem gängigen Wert von $\gamma = 0.2$, welches durch Extrapolation von Simulationsergebnissen bei größtenteils niedrigen Reynoldszahlen ein schnelles Abklingen der Widerstandsreduktion voraussagt, prognostizierten Gatti und Quadrio [60] mithilfe des Geschwindigkeitsprofils einen wesentlich weniger starken Rückgang. Aus einer Widerstandsreduktion von 22 %



(a) **(b)**

Abbildung 3.21: (a) Mittlerer Reibungskoeffizient aller unbeeinflussten Strömungen zusammen mit Vergleichsdaten von Yao und Hussain [155] und Li et al. [97] und einer empirischen Beziehung für inkompressible Strömungen; (b) Mittlerer Wandwärmeübergangskoeffizient aller unbeeinflussten Strömungen.

bei $Re_\tau = 2000$ würde damit ungefähr 17 % bei $Re_\tau = 10^5$ [156]. Bei der Machzahl $Ma_b = 1.5$ sind leichte Unterschiede zu den Daten von Yao und Hussain [155] und Li et al. [97] zu erkennen, mehr noch bei $Ma_b = 3.0$ zu den Daten von Li et al. [97]. Eine mögliche Erklärung könnte die Verwendung unterschiedlicher Gesetzte für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität sein. Yao und Hussain [155] verwendeten das Sutherland Gesetz, in dieser Arbeit wird das Potenzgesetz genutzt und Li et al. [97] machten dazu keine Angabe. Grundsätzlich geht aus der Abbildung hervor, dass die supersonischen Strömungen im unbeeinflussten Zustand einen geringeren Reibungskoeffizienten aufweisen als die Inkompressiblen bei gleicher Reynoldszahl $Re^*_{\tau c}$ und damit schon einen gewissen Vorteil aufgrund von Kompressibilitätseffekten mitbringen. Dies gilt insbesondere für die niedrigen Reynoldszahlen, bei $Re^*_{\tau c} = 150$ und $Ma_b = 3$ beträgt der Anteil des Reibungskoeffizienten an dem der inkompressiblen Strömung beispielsweise nur 82 %. Für höhere Reynoldszahlen gleichen sich die kompressiblen C_f-Werte zunehmend mehr der empirischen inkompressiblen Beziehung an. Yao und Hussain [155] vermuteten daher, dass Letztere auch für kompressible Strömungen bei ausreichend hohen $Re^*_{\tau c}$ angewendet werden kann. Die knappe Datenlage erlaubt dazu jedoch nur Spekulationen. Die obige Diskussion bezüglich der Reynoldszahlabhängigkeit der Widerstandsreduktion in beeinflusster Strömung zeigt, dass man bei der Extrapolation von Daten bei niedrigen Reynoldszahlen vorsichtig sein muss. Die Geschwindigkeitsprofile sind erst ab $Re_\tau = 1000$ [63] oder besser noch ab $Re_\tau = 2000$ [60] als universell hinsichtlich des logarithmischen Gesetzes anzusehen. Übertragen auf $Re^*_{\tau c}$ bei kompressiblen Kanalströmungen gibt es derzeit nur eine Simulation von Yao und Hussain [155] bei $Ma_b = 1.5$ und $Re^*_{\tau c} = 1265$, die dieses

Kriterium annähernd erfüllt (Abbildung 3.21a). Der Anteil des Reibungskoeffizienten am inkompressiblen Wert beträgt dort 96.6 %. Es ist gut vorstellbar, dass ein Verhältnis in dieser Größenordnung für höhere Reynoldszahlen bestehen bleibt und die Kurve $C_f(Re^*_{\tau c})$ weiterhin parallel zur inkompressiblen Kurve verläuft.

Durch Integration der gemittelten Energiegleichung im halben Kanal erhält man den Wandwärmefluss

$$q_w = -u_b \tau_w \,. \tag{3.51}$$

Der Wärmefluss zur Wand kommt von der antreibenden Kraft, die mit der Wandreibung im Gleichgewicht steht [97]. Für den Wandwärmeübergangskoeffizienten

$$B_q = \frac{q_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w} \tag{3.52}$$

ergibt sich daher eine direkte Abhängigkeit des Wandwiderstandskoeffizienten gemäß

$$B_q = -\frac{0.5 Ma_b^2 (\gamma - 1)}{(\rho_w u_\tau)/(\rho_b u_b)} C_f \,, \tag{3.53}$$

was zu einer Abnahme des Betrags des Wandwärmeübergangskoeffizienten bei konstanter bulk Machzahl und steigender Reynoldszahl führt (Abbildung 3.21b).

3.5.1. Zerlegungen

Um die Zusammensetzung des Reibungswiderstands besser zu verstehen, wurden verschiedene Zerlegungen abgeleitet, die z.B. reine Anteile aufgrund der Turbulenz isolieren und deren Anteil am Gesamtwiderstand quantifizieren. Zunächst werden die verschiedenen Anteile der turbulenten und viskosen Spannungen über den Kanal betrachtet, die sich durch Verwendung der Favre-Mittelung in der Impulsgleichung ergeben [74]. Die Terme sind in Abbildung 3.22 für den unbeeinflussten Fall bei $Ma_b = 3$ und $Re^*_{\tau c} = 400$ gezeigt. Eine Abweichung zwischen der Favre- und Reynoldsmittelung der Geschwindigkeit bei der viskosen Spannung deutet auf Kompressibilitätseffekte nahe der Wand hin [126]. Huang et al. [74] merkten an, dass wegen $\overline{u_1} \gg \overline{u_1''}$ und dem Zusammenhang $\overline{u_1} - \widetilde{u_1} = \overline{u_1''}$ für die Kanalsimulationen bei $Ma_b = 1.5$ und $Ma_b = 3$ die Annahme $\overline{u_1} \approx \widetilde{u_1}$ berechtigt ist. Gradienten, wie sie in der Schubspannung vorkommen, sind allerdings empfindlicher für Änderungen der abhängigen Variable [74]. Die beiden letzten Terme in der Legende von Abbildung 3.22, welche Viskositäts- und Geschwindigkeitsfluktuationen enthalten, liefern mit Maximalwerten von ca. 4 % bzw. 2 % selbst bei der höchsten untersuchten Machzahl nur geringe Beiträge. Die Terme finden sich teilweise in den gängigen Zerlegungen des Reibungswiderstandes wieder, so zum Beispiel bei der FIK Zerlegung nach Fukagata, Iwamoto und Kasagi.

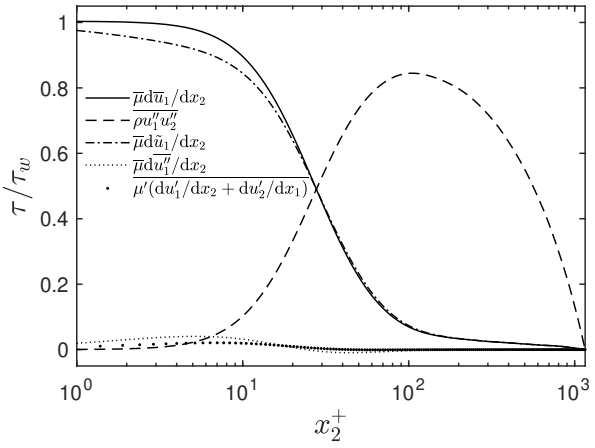


Abbildung 3.22: Zerlegung der viskosen und turbulenten Spannungen nach Huang et al. [74] für den Fall M3R400.

Gomez et al. [67] erweiterten die Zerlegung für kompressible Strömungen gemäß

$$C_f = \underbrace{\frac{6}{Re_b}}_{C_f^L} + \underbrace{\frac{3}{\rho_b u_b^2 h^2}\int_{-h}^{h} x_2 \overline{\rho}\widetilde{u_1'' u_2''}\mathrm{d}x_2}_{C_f^T} + \underbrace{\frac{3}{\rho_b u_b^2 h^2}\int_{-h}^{h} -x_2\left[(\overline{\mu}-\mu_w)-1\right]\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2}_{C_f^\mu} + \underbrace{\frac{3}{\rho_b u_b^2 h^2}\int_{-h}^{h} -x_2\overline{\mu'\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\right)}\mathrm{d}x_2}_{C_f^{\mu T}} . \tag{3.54}$$

Der Reibungskoeffizient wird aufgespalten in einen laminaren Anteil C_f^L und einen turbulenten Anteil C_f^T, der sich aus der gewichteten Integration der Reynoldsscherspannung ergibt. In kompressibler Strömung kommt ein Anteil C_f^μ dazu, aufgrund der Variation der mittleren Viskosität und dem mittleren wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten, sowie ein Anteil $C_f^{\mu T}$, der die Interaktion von Kompressibilität und Turbulenz erfasst. Die Anteile sind in Abbildung 3.23 für alle untersuchten Strömungsbedingungen und Beeinflussungswellenlängen gezeigt. Der turbulente Term C_f^T macht unter allen unbeeinflussten Strömungen (linke abgesetzte Balken) den größten Anteil aus und wird durch die Wandoszillationen unmittelbar beeinflusst. Der Term C_f^μ aufgrund der Variation der mittleren Viskosität ist vernachlässigbar bei $Ma_b = 0.3$, aber wird zunehmend bedeutender mit steigender Machzahl. In den unbeeinflussten supersonischen Strömungen bei $Re_{\tau c}^* = 150$ macht er einen beträchtlichen Teil am gesamten Reibungskoeffizienten aus (4 % bei $Ma_b = 1.5$ und 10 % bei $Ma_b = 3.0$), mit zunehmender Reynoldszahl nimmt der Term jedoch deutlich ab auf 0.9 % bei $Ma_b = 1.5$, $Re_{\tau c}^* = 800$ und 2.1 % bei $Ma_b = 3$, $Re_{\tau c}^* = 800$. In den beeinflussten Strömungen nimmt der Term grundsätzlich leicht zu, aufgrund der

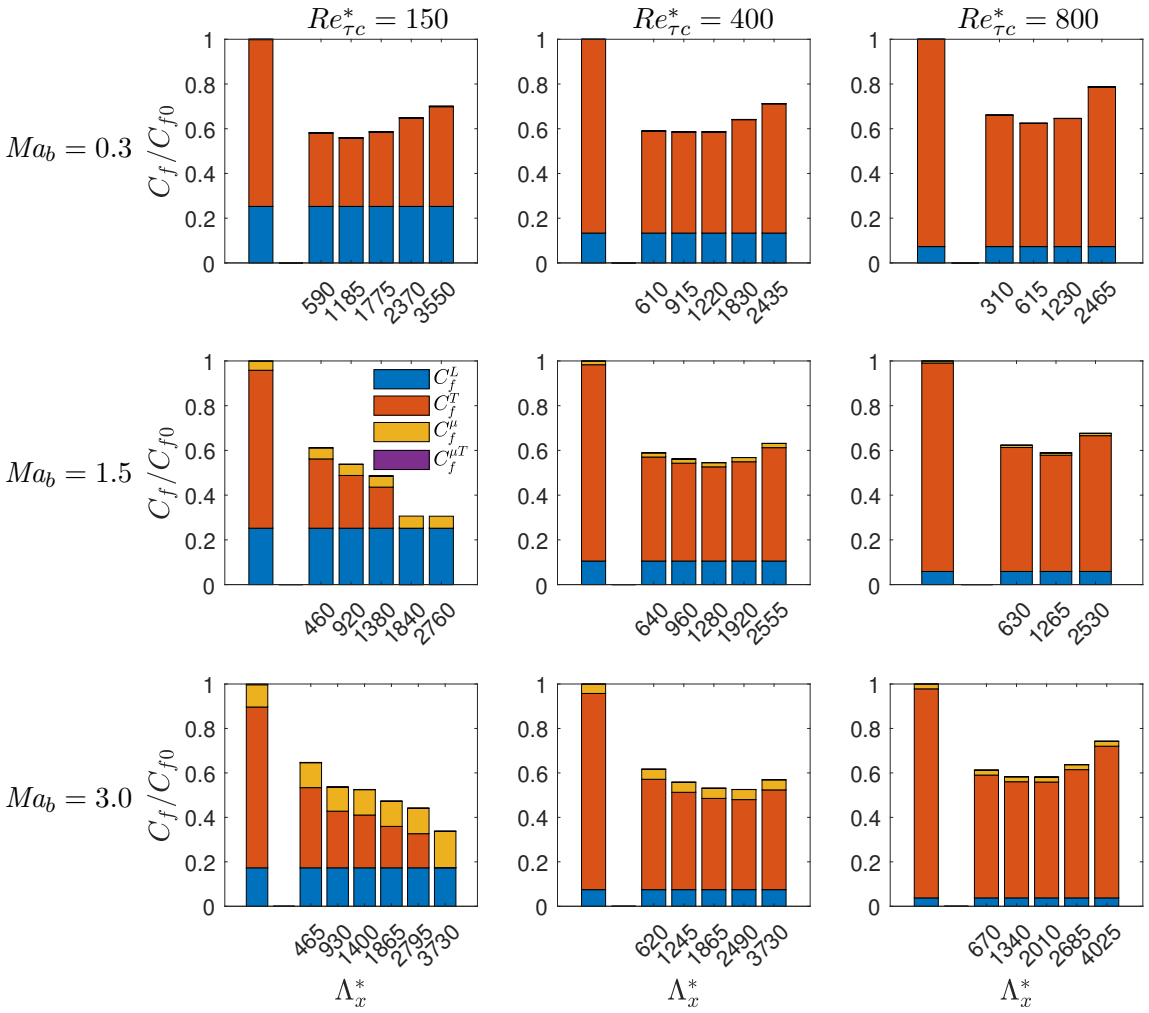


Abbildung 3.23: FIK Zerlegung des Reibungskoeffizienten jeweils für die unbeeinflusste Strömung und verschiedene Beeinflussungswellenlängen.

zusätzlichen spannweitigen Geschwindigkeitsschicht nahe der Wand und der herabgesetzten Reynoldszahl Re_τ [126]. Die Abhängigkeit von der Beeinflussungswellenlänge ist dabei jedoch vernachlässigbar klein, lediglich für die relaminarisierenden Fälle ist ein deutlicher Anstieg von C_f^μ zu sehen. Der Anteil $C_f^{\mu T}$ aufgrund von Fluktuationen in der Viskosität und dem wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten ist für alle untersuchten Strömungsbedingungen vernachlässigbar, am stärksten ist er bei $Ma_b = 3$ und $Re^*_{\tau c} = 150$ mit nur 0.3 %. Ein Nachteil der FIK Zerlegung ist die fehlende physikalische Interpretation der linear gewichteten Reynoldsspannung [155]. Die RD Zerlegung nach Renard und Deck [119] schafft hier Abhilfe. Sie wurde von der gemittelten Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie in Stromabrichtung im Absolutsystem abgeleitet und beschreibt die Leistung des Wandwiderstands als Energietransfer zwischen Wand und Fluid. Li et al. [97] erweiterten die Beziehung für

kompressible Strömungen zu

$$C_f = \underbrace{\frac{1}{\rho_b u_b^3}\int_{-h}^{h} \overline{\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}\frac{\partial \tilde{u_1}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2}_{C_{f1}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_b u_b^3}\int_{-h}^{h} \overline{\rho}\widetilde{-u_1'' u_2''}\frac{\partial \tilde{u_1}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2}_{C_{f2}} . \tag{3.55}$$

Die Komponente C_{f1} beschreibt die direkte molekulare viskose Dissipation, bei der die Leistung des Reibungswiderstandes in Wärmeleistung umgewandelt wird. C_{f2} stellt die Leistung dar, die in die Produktion turbulenter kinetische Energie umgewandelt wird, hervorgerufen durch turbulente Fluktuationen, bevor diese dissipiert werden [97]. Der Term C_{f1} im Zusammenhang mit viskoser Dissipation kann darüber hinaus in einen Anteil der mittleren Größen (Index m) und in einen Anteil thermodynamischer Fluktuationen (Index f) aufgespalten werden:

$$C_{f1} = \underbrace{\frac{1}{\rho_b u_b^3}\int_{-h}^{h} \overline{\mu}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2}\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2}_{C_{f1,m}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_b u_b^3}\int_{-h}^{h} \overline{\mu'\frac{\partial u_1'}{\partial x_2}+\mu'\frac{\partial u_2'}{\partial x_1}}\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}dx_2}_{C_{f1,f}} . \tag{3.56}$$

Die jeweiligen Anteile am Gesamtwiderstand sind in Abbildung 3.24 für alle untersuchten Strömungsbedingungen und Beeinflussungswellenlängen zu sehen. Anders als bei der FIK Zerlegung gibt es hier keinen konstanten laminaren Teil bei einer bestimmten Mach- und Reynoldszahl. Die Zusammensetzung aus C_{f1} und C_{f2} ändert sich mit der Reynoldszahl und mit der Beeinflussungswellenlänge. Mit der Reynoldszahl steigt der Anteil verbunden mit der Produktion turbulenter kinetischer Energie. In den beeinflussten Strömungen sinkt dieser Anteil gegenüber C_{f1} stärker. Wie in Abschnitt 3.3.2 gezeigt, nähert sich die Strömung unter Beeinflussung dem laminaren Zustand, der stärker von viskosen Kräften beherrscht wird. Der Anteil aufgrund thermodynamischer Fluktuationen $C_{f1,f}$ erreicht bei der höchsten Machzahl $Ma_b = 3$ Werte von nur 1.1 %, 0.8 % und 0.7 % in der Reihenfolge aufsteigender Reynoldszahlen und sinkt zudem in der beeinflussten Strömung. Die Auftragung der mit dem Wandabstand gewichteten Integranden in der Renard & Deck Zerlegung (Gleichung 3.55) über der wandnormalen Koordinate erlaubt eine Interpretation, welche Bereiche in welchem Maße zum Wandwiderstand beitragen. Beispielhaft für die Machzahl $Ma_b = 3$ ist in Abbildung 3.25 zu sehen, wie sich die Anteile der unbeeinflussten Strömung mit der Reynoldszahl verändern. Der viskose Anteil nimmt mit der Reynoldszahl ab (Abbildung 3.25a), während der Anteil verbunden mit der Produktion turbulenter kinetischer Energie seine Form grundlegend verändert (Abbildung 3.25b). Der wandnahe Peak bei $x_2^* \approx 18$ nimmt mit steigender Reynoldszahl ab und der äußere Bereich gewinnt für den Wandwiderstand an Bedeutung. Bei ausreichend hoher Reynoldszahl kommt es zu einer Trennung der Skalen, ein zweites lokales Maximum entsteht. Die Abbildung veranschaulicht, warum die Strömung bei niedriger Reynoldszahl soviel einfacher durch die Wandbewegungen manipuliert werden kann. Umgekehrte Trends sind unter Beeinflussung zu beobachten (Abbildung 3.26), da dort die

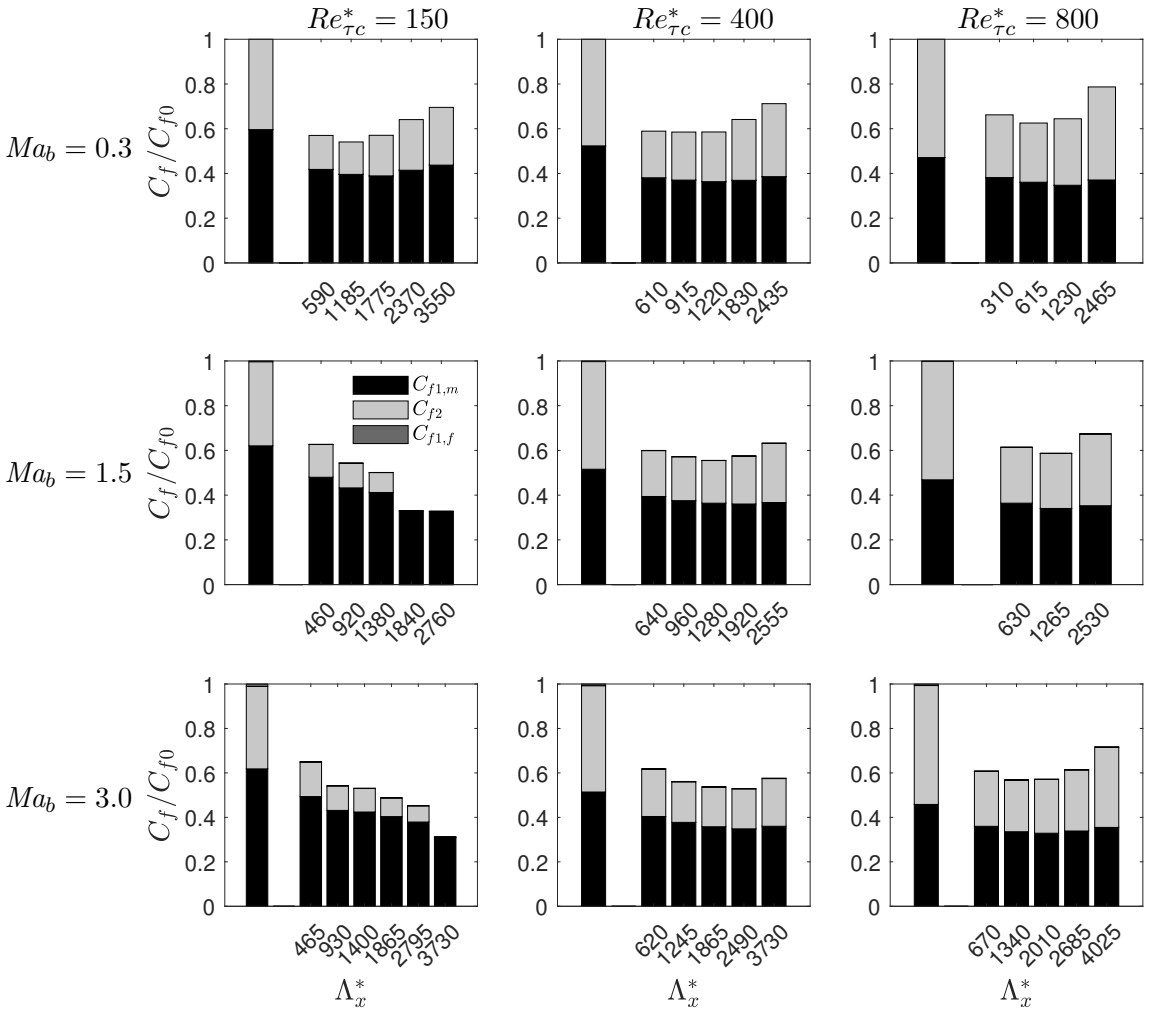
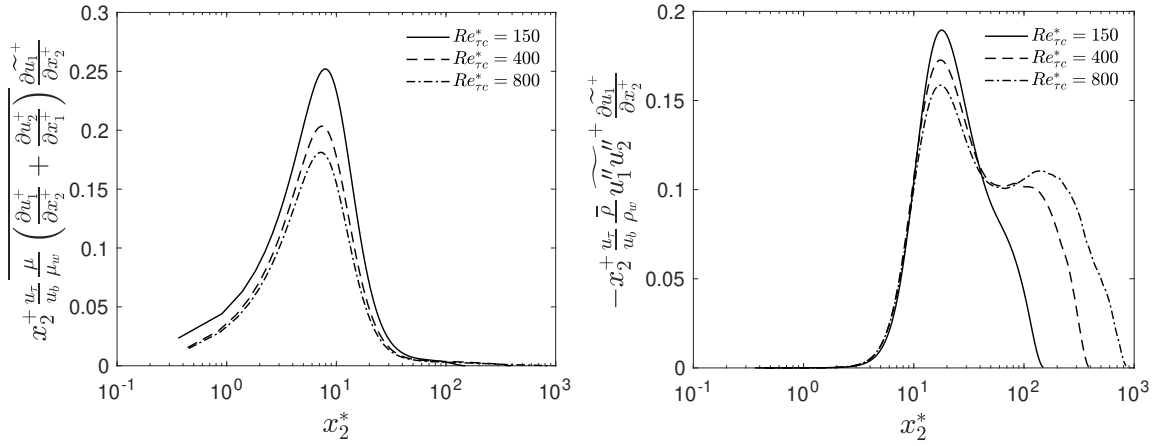


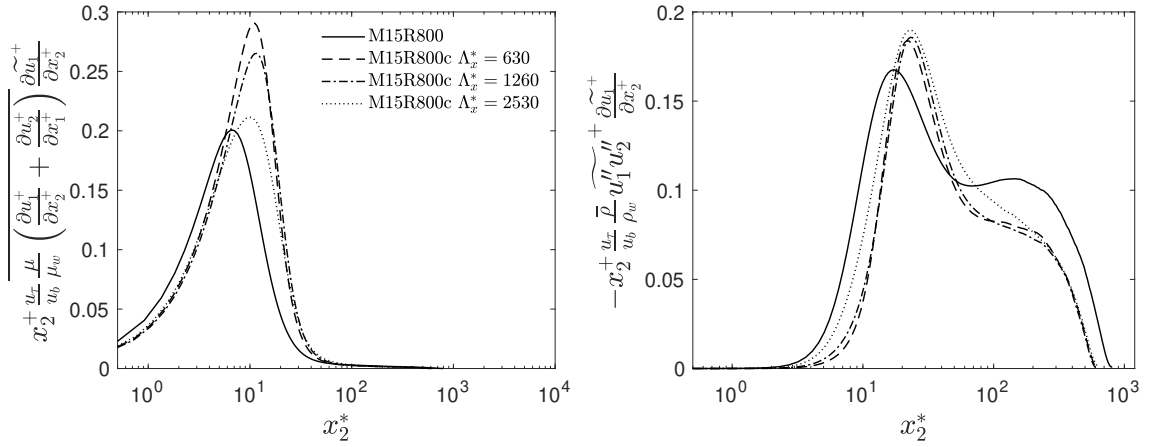
Abbildung 3.24: RD Zerlegung des Reibungskoeffizienten jeweils für die unbeeinflusste Strömung und verschiedene Beeinflussungswellenlängen.

Reynoldszahl gegenüber der unbeeinflussten Strömung sinkt. In Korrelation mit der erzielten Widerstandsreduktion nimmt der Peak bei der viskosen Dissipation zu und der Integrand der turbulenten Produktion wird in seiner wandnormalen Ausdehnung schmaler. Durch die Aufweitung der viskosen Unterschicht beginnt die Kurve für die beeinflussten Fälle erst bei größerem Wandabstand zu steigen. Auch im äußeren Bereich kommt es trotz der geringen wandnormalen Reichweite der spannweitigen Geschwindigkeitsschicht durch die Beeinflussung zu einer Abnahme des Beitrags zum Wandwiderstand. Eine ausführlichere Betrachtung dazu erfolgt in Abschnitt 3.10.



(a) **(b)**

Abbildung 3.25: Gewichtete Integranden der Terme C_{f1}/C_f (a) und C_{f2}/C_f (b) der Renard & Deck Zerlegung über x_2^* für die unbeeinflussten Strömungen bei $Ma_b = 3$.

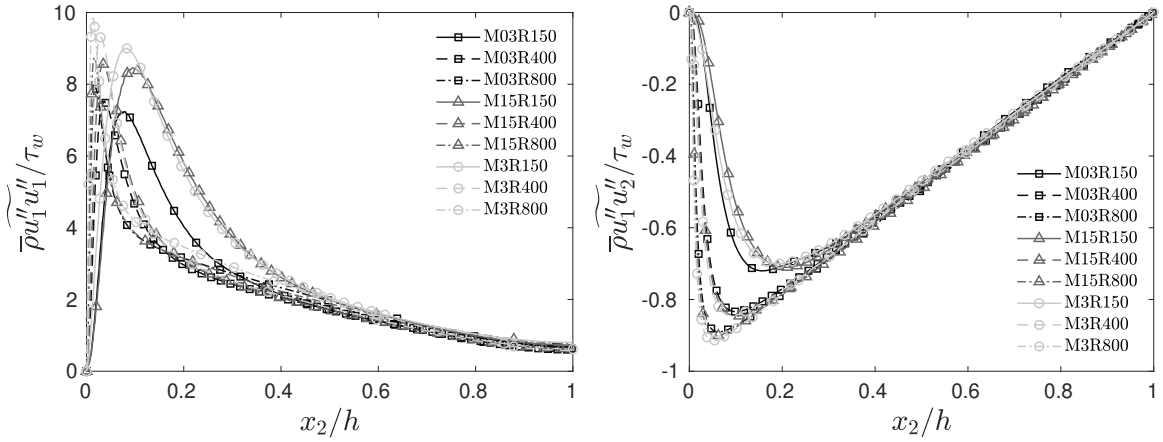


(a) **(b)**

Abbildung 3.26: Gewichtete Integranden der Terme C_{f1}/C_f (a) und C_{f2}/C_f (b) der Renard & Deck Zerlegung über x_2^* für die beeinflussten Strömungen bei $Ma_b = 1.5$ und $Re^*_{\tau c} = 800$.

3.6. Turbulente Spannungen

Zunächst werden die turbulenten Spannungen der unbeeinflussten Fälle untersucht im Hinblick auf die Skalierung und charakteristische Merkmale, die auf Reynolds- und Machzahländerungen zurückzuführen sind. Die gemittelte Transportgleichung für die Geschwindigkeit u_1 im turbulenten, kompressiblen Kanal lautet unter Verwendung



(a) $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_1''}$ **(b)** $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_2''}$

Abbildung 3.27: Äußere Skalierung der turbulenten Spannungen $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_1''}$ (a) und $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_2''}$ (b).

der Favre-Mittelung für die Geschwindigkeiten

$$\overline{\mu}\frac{d\tilde{u}_1}{dx_2} - \overline{\rho}\widetilde{u_1''u_2''} = \tau_w\left(1 - \frac{x_2}{h}\right) . \tag{3.57}$$

Im vollturbulenten Bereich folgt unter der Annahme $x_2/h \ll 1$ und Vernachlässigung der viskosen Spannung

$$-\widetilde{u_1''u_2''} \approx \frac{\tau_w}{\overline{\rho}} , \tag{3.58}$$

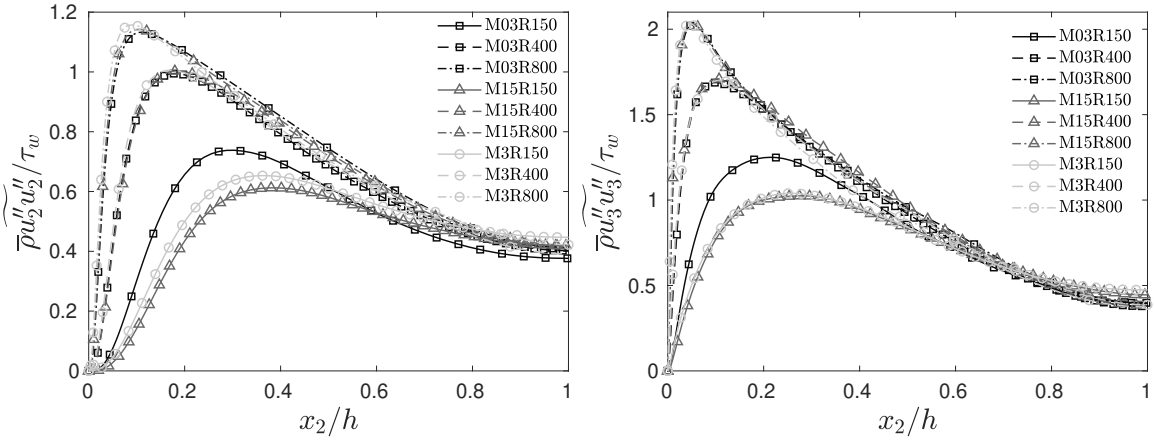
weshalb die turbulenten Spannungen über die verschiedenen Reynolds- und Machzahlen hinweg mit τ_w und der lokal im jeweiligen Wandabstand gemittelten Dichte skalieren [104]. Wegen

$$\overline{\rho}\widetilde{u_1''u_2''} = \overline{\rho u_1''u_2''} \tag{3.59}$$

ist Gleichung 3.58 gleichbedeutend mit

$$-\overline{\rho u_1''u_2''} \approx \tau_w . \tag{3.60}$$

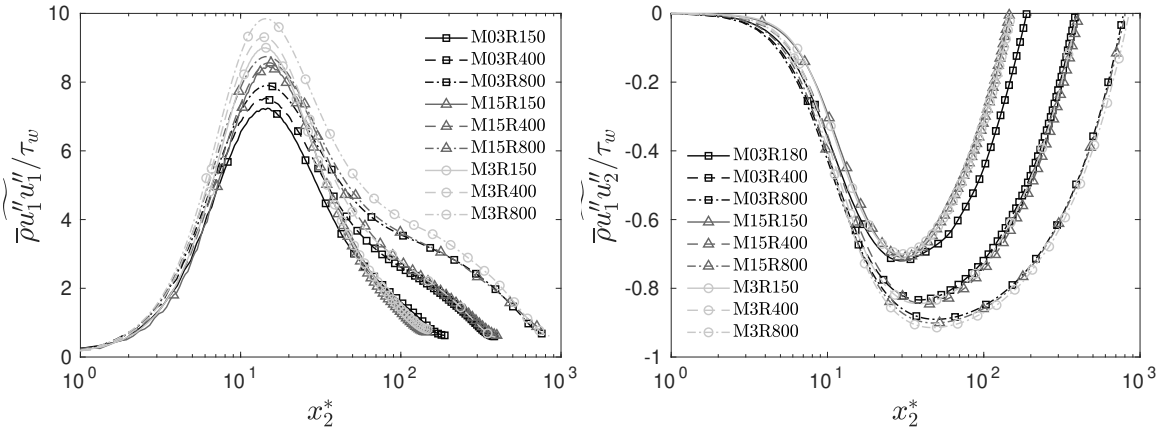
Die Abbildungen 3.27 und 3.28 zeigen die turbulenten Spannungen $\widetilde{\overline{\rho}u_i''u_j''}$ über x_2/h (äußere Skalierung). Durch die gewählte Normierung mit der mittleren Dichte und τ_w wird eine gute Deckung der Kurven im Mittenbereich des Kanals erreicht. Die Vernachlässigung der viskosen Spannung in Gleichung 3.58 ist gültig für $x_2/h > 50/Re_\tau$, sodass der Bereich mit äußerer Skalierung mit steigender Reynoldszahl zunimmt [52]. Die Kurven gleicher Reynoldszahlen gruppieren sich grob zusammen bezüglich der



(a) $\widetilde{\overline{\rho}u_2''u_2''}$ **(b)** $\widetilde{\overline{\rho}u_3''u_3''}$

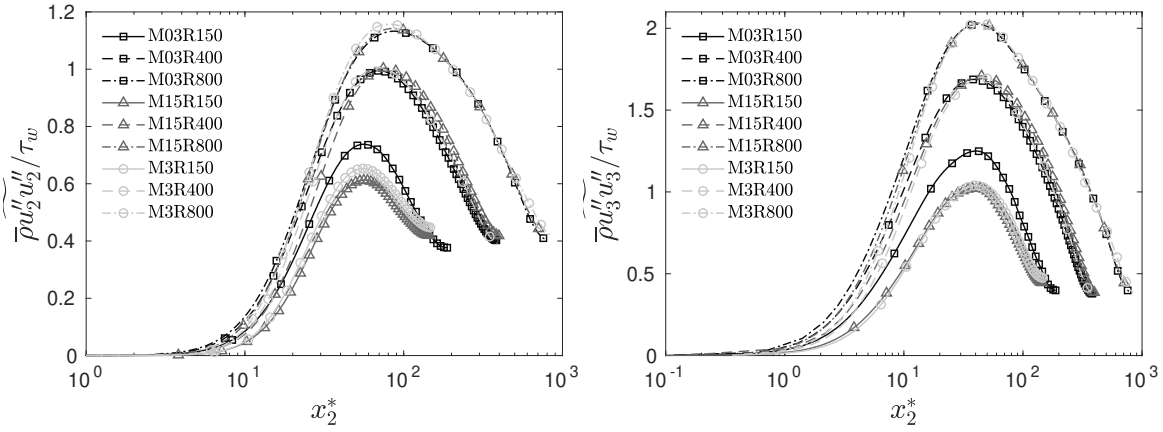
Abbildung 3.28: Äußere Skalierung der turbulenten Spannungen $\widetilde{\overline{\rho}u_2''u_2''}$ (a) und $\widetilde{\overline{\rho}u_3''u_3''}$ (b).

wandnormalen Position der Extrema. Auffallend ist zudem die Zunahme der wandnahen Peaks der Stromabkomponente mit steigender Machzahl (Abbildung 3.28). Die Extrema der wandnormalen und spannweitigen Komponenten dagegen werden mit steigender Machzahl gedämpft, zumindest für die kleinste untersuchte Reynoldszahl. Dieses Verhalten wurde unter anderem von Foysi [52] und Morinishi [106] beobachtet und wurde zuletzt mit intrinsischen Kompressibilitätseffekten in Verbindung gebracht [72]. Eine genauere Betrachtung erfolgt in semilokalen Koordinaten, um den unterschiedlichen Reynoldszahlen und der stark variierenden Dichte und Viskosität Rechnung zu tragen. Hierfür wird statt der im Inkompressiblen üblichen Koordinate x_2^+ basierend auf dem viskosen Längenmaß $\delta_\nu = \nu/u_\tau$ und der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$, die semilokalen Gegenstücke $x_2^* = x_2/\delta_\nu^*$, $\delta_\nu^* = \overline{\nu}/u_\tau^*$ und $u_\tau^* = \sqrt{\tau_w/\overline{\rho}}$ verwendet [74]. Die oben beschriebene Normierung mit der mittleren Dichte und τ_w unter Verwendung der semilokalen Koordinate x_2^* ergibt die innere Skalierung (Abbildungen 3.29 und 3.30), die unter anderem aus der Transformation von Trettel und Larsson [142] resultiert. Die Positionen der Extrema der turbulenten Spannungen stimmen nun unter Verwendung der semi-lokalen Wandkoordinate sehr gut überein und die Unterschiede zwischen den kompressiblen und inkompressiblen Fällen sind weiter reduziert. Deutlich tritt noch der steigende Betrag der Extrema in der Stromabkomponente bei höheren Machzahlen auf (Abbildung 3.29a). Foysi, Sarkar und Friedrich [52] identifizierten unter Nutzung derselben Skalierung Reynolds- und Machzahleffekte. Eine höhere Reynoldszahl äußert sich in generell höheren turbulenten Intensitäten für die inkompressiblen, wie auch für die kompressiblen Fälle. Die höheren Extremwerte in Wandnähe dagegen identifizierten sie durch Vergleich mit einer inkompressiblen Simulation, die an der Position des Extremwerts eine deutlich niedrigere semilokale Reynoldszahl aufweist, als klaren Machzahleffekt.



(a) **(b)**

Abbildung 3.29: Innere Skalierung der turbulenten Spannungen $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_1''}$ (a) und $\widetilde{\overline{\rho}u_1''u_2''}$ (b).



(a) **(b)**

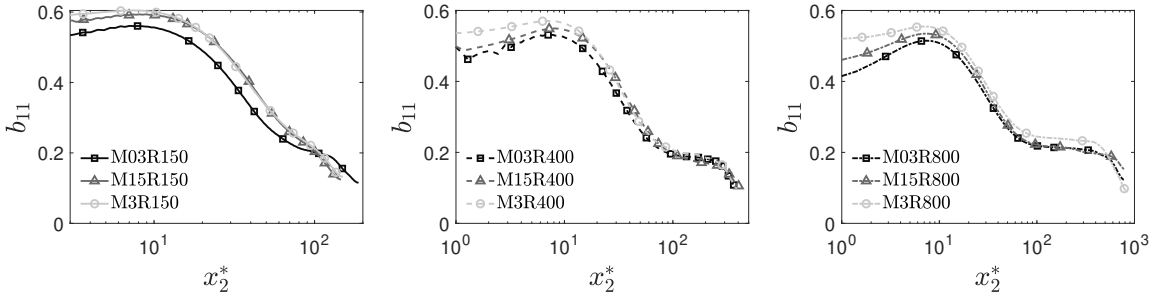
Abbildung 3.30: Innere Skalierung der turbulenten Spannungen $\widetilde{\overline{\rho}u_2''u_2''}$ (a) und $\widetilde{\overline{\rho}u_3''u_3''}$ (b).

Auch hier lässt sich beispielsweise durch Vergleich der Fälle M1R150 und M03R800 zeigen, dass der Extremwert der kompressiblen Konfiguration trotz durchweg wesentlich niedrigerer semilokaler Reynoldszahl (Abbildung 3.7a) höher ist als in der nahezu inkompressiblen Konfiguration und daher kein Reynoldszahleffekt sein kann. Foysi, Sarkar und Friedrich [52] zeigten weiterhin durch einen Vergleich zweier Fälle mit Machzahlen $M_b = 3.0$ und $M_b = 0.3$, die in der Mitte des Kanals in etwa dieselbe semilokale Reynoldszahl $Re_\tau^* = 180$ aufweisen, dass die kompressiblen wandnormalen und spannweitigen turbulenten Intensitäten bis zu einem Wandabstand von $x_2^* \approx 40$ geringer sind als im nahezu inkompressiblen Fall. Da die semilokale Reynoldszahl des kompressiblen Falls im Bereich $0 < x_2^* < 40$ deutlich über der des nahezu inkompressi-

blen Falls liegt, kann es sich hierbei wiederum nur um einen Machzahleffekt handeln. Unglücklicherweise fehlt in den hier vorliegenden Daten ein kompressibler Fall, wo die lokale Reynoldszahl in der Kanalmitte mit der des nahezu inkompressiblen Falls $Ma_b = 0.3$, $Re^*_{\tau c} = 180$ exakt übereinstimmt. Die entsprechenden kompressiblen Fälle weisen mit $Re^*_{\tau c} = 150$ eine um rund 20 % niedrigere Reynoldszahl auf (siehe Abbildung 3.7a). Die lokale Reynoldszahlen der kompressiblen Fälle unterschreiten den Wert 180 bereits bei $x_2^* \approx 4$ bzw. $x_2^* \approx 10$, weshalb die 22- und 33-Komponente der turbulenten Spannungen im gesamten Kanal unter denen des nahezu inkompressiblen Falls liegen (Abbildung 3.30). Der niedrigere Extremwert in den 22- und 33-Komponenten kann hier also nicht rein der höheren Machzahl zugesprochen werden, der Effekt ist aber dennoch sichtbar durch die verhältnismäßig stärkere Abnahme im wandnahen Bereich gegenüber des Mittenbereichs. Der Effekt der gedämpften wandnormalen und spannweitigen turbulenten Spannungen relativiert sich bei den höheren Reynoldszahlen. Morinishi, Tamano und Nakabayashi [106] beobachteten den Effekt ebenfalls für Reynoldszahlen im Bereich 180 und vermuteten einen Low-Reynoldsnumber Effekt, obwohl keine Daten bei höherer Reynoldszahl vorlagen. Antonia et al. [6] untersuchten diesen Effekt und fanden einen großen Einfluss auf die turbulenten Intensitäten, was diese Annahme untermauert. Durch die hier untersuchten Fälle bei $Re^*_{\tau c} = 400$ und $Re^*_{\tau c} = 800$, die für alle Machzahlen die gleiche semilokale Reynoldszahl in der Mitte aufweisen und einen direkten Vergleich untereinander ermöglichen, kann nun gezeigt werden, dass die Dämpfung der 22- und 33-Komponente bei höheren Reynoldszahlen tatsächlich weniger stark ausfällt. Die höheren Extrema der 11-Komponente bei zunehmender Machzahl sind jedoch auch bei höherer Reynoldszahl deutlich sichtbar. Durch die beobachteten Veränderungen bei zunehmender Machzahl im Bereich $x_2^* < 40$, wo die variablen Fluideigenschaften bedeutend sind, lässt sich zusammenfassen, dass sich die Anisotropie der turbulenten Spannungen ändert. Die Stromabkomponente wird erhöht und bei der geringen Reynoldszahl verstärkt sich die Anisotropie zusätzlich durch die Dämpfung der wandnormalen und spannweitigen Komponenten. Für die 12-Komponente lässt sich keine nennenswerte Veränderung mit der Machzahl feststellen. Zur genaueren Untersuchung sind die Komponenten des Anisotropietensors

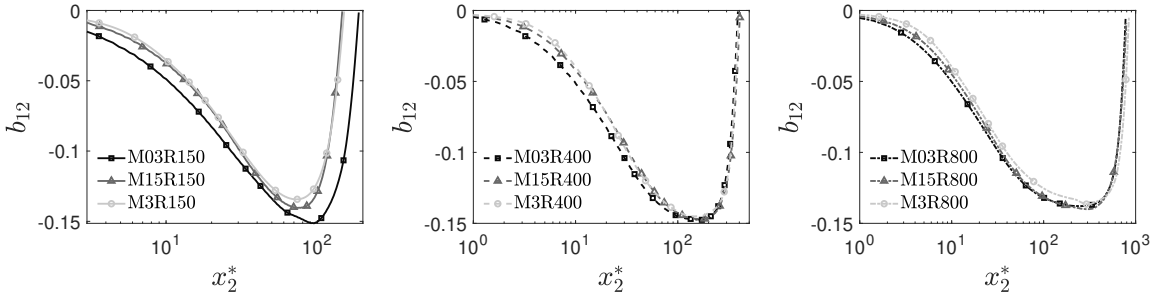
$$b_{ij} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{3.61}$$

in den Abbildungen 3.31 - 3.34 gezeigt. Zur besseren Übersicht sind die Fälle mit gleicher Reynoldszahl in der Kanalmitte einzeln dargestellt. Zunächst lässt sich ein Reynoldszahleffekt feststellen, eine Abnahme der Anisotropie mit steigender Reynoldszahl, gleichermaßen für die inkompressiblen und kompressiblen Fälle. Deutlich ist die Zunahme der Anisotropie in den Normalenkomponenten 11 (Abb. 3.31) und 33 (Abb. 3.34) mit der Machzahl über alle Reynoldszahlen hinweg zu erkennen. Bei der Komponente b_{12} kommt es dagegen zu einer Abnahme. Die Zunahme der Anisotropie der 22-Komponente (Abb. 3.33) ist, wenn überhaupt, nur bei den niedrigeren Reynoldszahlen identifizierbar. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Fälle



(a) $Re^*_{\tau c} \approx 150$ **(b)** $Re^*_{\tau c} = 400$ **(c)** $Re^*_{\tau c} = 800$

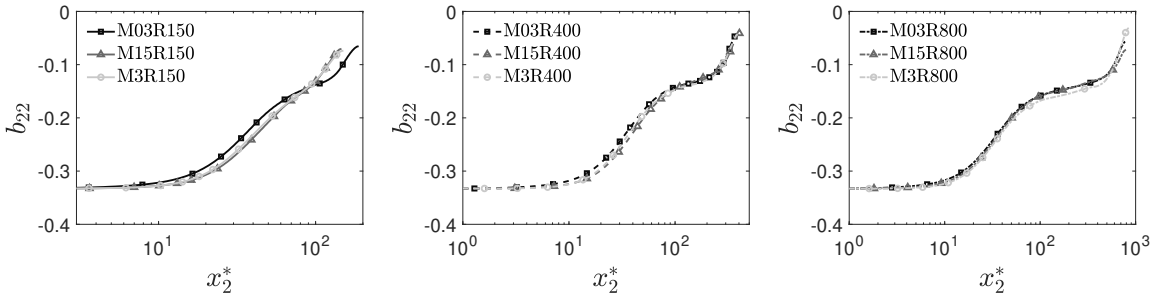
Abbildung 3.31: Komponente b_{11} des Anisotropietensors



(a) $Re^*_{\tau c} \approx 150$ **(b)** $Re^*_{\tau c} = 400$ **(c)** $Re^*_{\tau c} = 800$

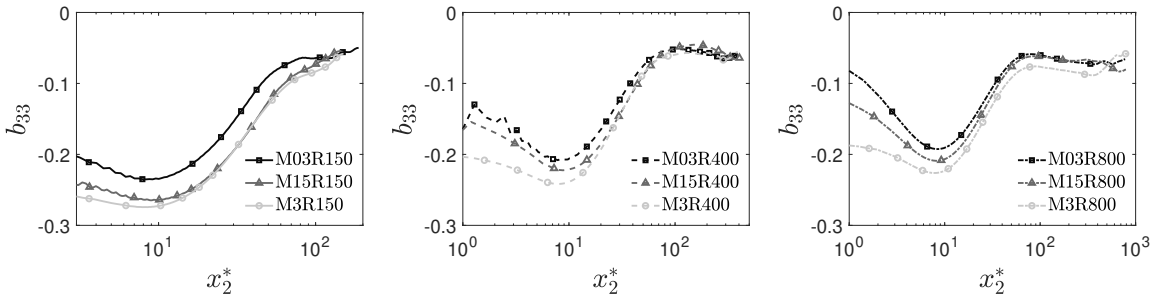
Abbildung 3.32: Komponente b_{12} des Anisotropietensors

mit der niedrigsten Reynoldszahl $Re_{\tau,c} \approx 150$ nur bedingt zum Vergleich taugen, da die lokale Reynoldszahl in Kanalmitte der kompressiblen Fälle mit 150 gegenüber 180 im nahezu inkompressiblen Fall nicht unerheblich abweicht.



(a) $Re^*_{\tau c} \approx 150$ **(b)** $Re^*_{\tau c} = 400$ **(c)** $Re^*_{\tau c} = 800$

Abbildung 3.33: Komponente b_{22} des Anisotropietensors

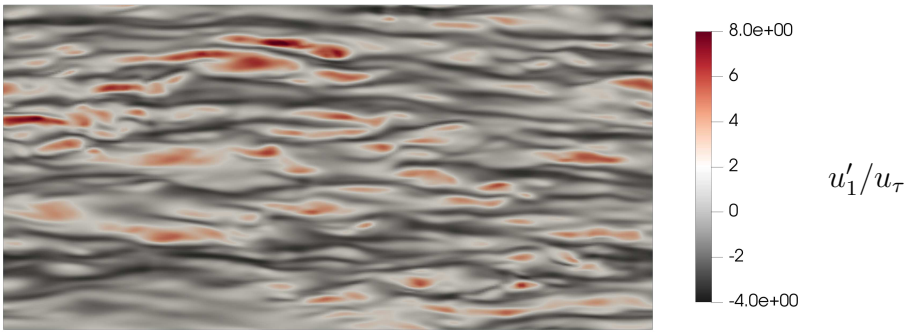


(a) $Re^*_{\tau c} \approx 150$ **(b)** $Re^*_{\tau c} = 400$ **(c)** $Re^*_{\tau c} = 800$

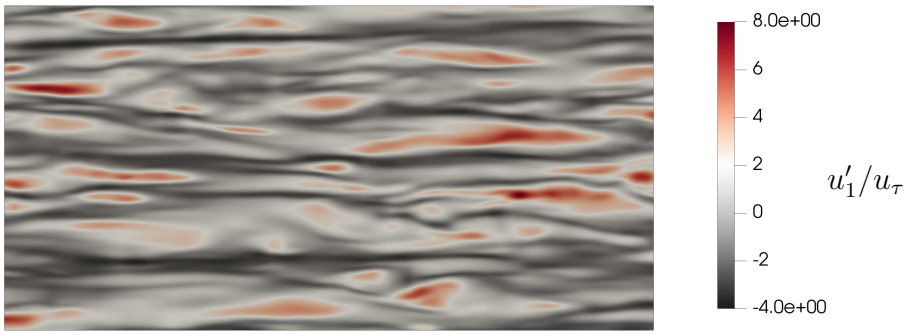
Abbildung 3.34: Komponente b_{33} des Anisotropietensors

3.7. Streaks

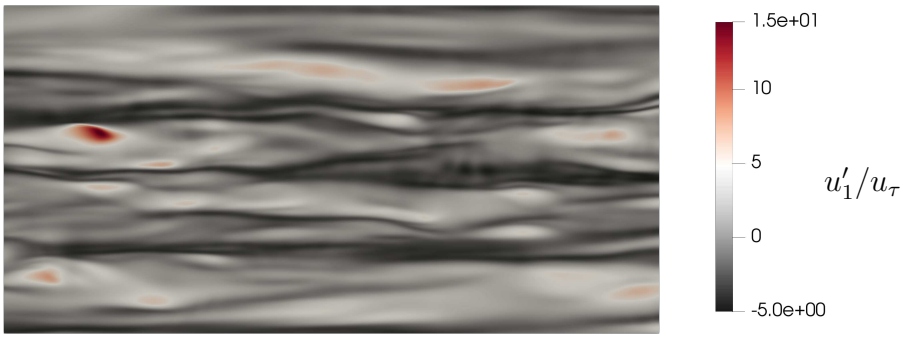
Eine besondere Bedeutung kommt in wandgebundenen Strömungen den Streaks zu, den in Strömungsrichtung ausgerichteten kohärenten Strukturen. In spannweitiger Richtung ergeben sie alternierend Bereiche mit hoher und niedriger Geschwindigkeit. Die Abmessungen sind im Inkompressiblen universell und unabhängig von der Reynoldszahl mit circa 100 Wandeinheiten in spannweitiger Richtung und 700 Wandeinheiten in Strömungsrichtung [42]. Sie befinden sich in der viskosen Unterschicht und Übergangsschicht. Die maximale Stärke erreichen sie in wandnormalem Abstand von circa 15 - 20 Wandeinheiten, analog zum Maximum der turbulenten Spannung in Strömungsrichtung (Abb. 3.29a). Einen Eindruck dieser Strukturen unter den verschiedenen Strömungsbedingungen vermitteln die Konturplots der Geschwindigkeitsfluktuationen bei $x_2^* = 5$ in den Abbildungen 3.35 und 3.36. Weitere prominente Strukturen im wandnahen Bereich sind Wirbel, deren Achsen nahezu in Strömungsrichtung ausgerichtet sind. Sie sind etwas von der Wand weg und leicht in die spannweitige Richtung geneigt [112]. Die Streaks sind eng verbunden mit diesen Wirbeln. Die wandnahe Turbulenz kann sich unabhängig von der äußeren Strömung wie ein Kreislauf selbst aufrecht erhalten durch die Interaktion zwischen Streaks und Wirbeln. Grob geschildert beziehen die Wirbel in Strömungsrichtung Energie aus der mittleren Strömung und formen die alternierenden Streaks. Letztere begünstigen wiederum die Wirbel durch Instabilitäten [81]. Die Instabilitäten und der damit verbundene Austausch von wandnahem Fluid geringer Geschwindigkeit und dem schnellen Fluid aus den äußeren Schichten ist hauptverantwortlich für die Generierung von Wandwiderstand. Deswegen kommt den kohärenten Strukturen eine so große Bedeutung zu im Hinblick auf die Intensität der Turbulenz und den Wandwiderstand. Die Instabilitäten der Streaks weisen jedoch wiederum ein universelles Maß auf. Die dominante Wellenlänge der Instabilitäten ist im Bereich von 400 viskosen Längeneinheiten, sehr ähnlich zu der Abmessung der Streaks in Strömungsrichtung [146]. Die Existenz dieser bevorzugten Wellenlänge ist Grundlage für die Strömungsbeeinflussung durch Wandoszillationen. Dort ergibt sich aus der bevorzugten Wellenlänge



(a)



(b)



(c)

Abbildung 3.35: Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ, bei $x_2^* = 5$ für die unbeeinflussten Fälle M03R400 (a), M15R400 (b) und M3R400 (c). Die Abmessungen betragen in allen Fällen $x_1^* \times x_3^* = 2400 \times 1200$.

der Streaks und der Konvektionsgeschwindigkeit der turbulenten Fluktuationen eine optimale Oszillationsperiode von $T_{opt}^+ = 100 - 125$ [146]. Bei der Wahl dieser Periode wird der Impulsaustausch in wandnormaler Richtung, hervorgerufen durch den selbsterhaltenden Kreislauf der kohärenten Strukturen und Wirbel, bestmöglich unterbunden [146]. Aufgrund der großen Bedeutung der kohärenten Strukturen für den Wandwiderstand, macht es Sinn, diese Strukturen im Hinblick auf ihre Abmessungen

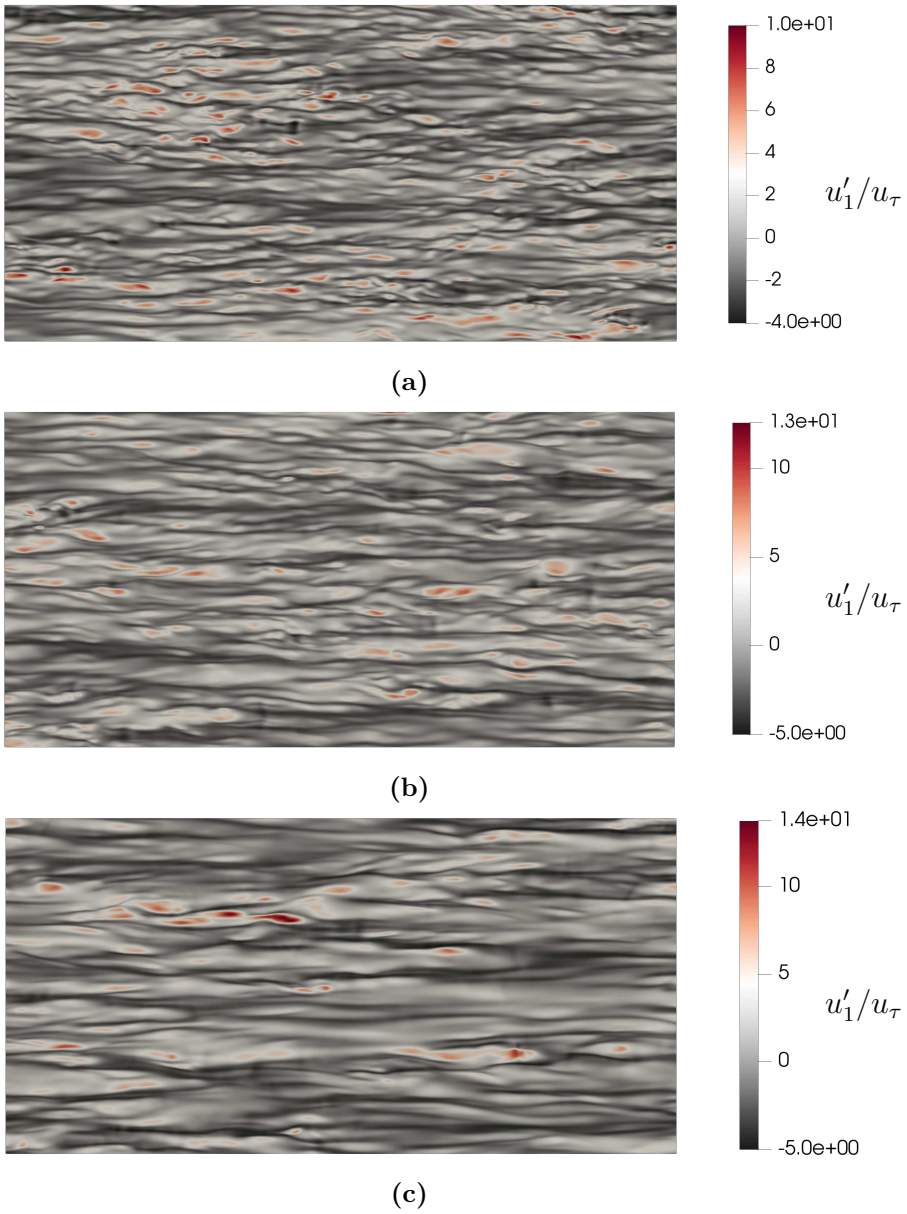


Abbildung 3.36: Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ, bei $x_2^* = 5$ für die unbeeinflussten Fälle M03R800 (a), M15R800 (b) und M3R800 (c). Die Abmessungen betragen in allen Fällen $x_1^* \times x_3^* = 4800 \times 2400$.

und Welligkeit bzw. Stabilität genauer zu untersuchen. Dies geschieht im Folgenden zunächst für die unbeeinflussten Fälle.

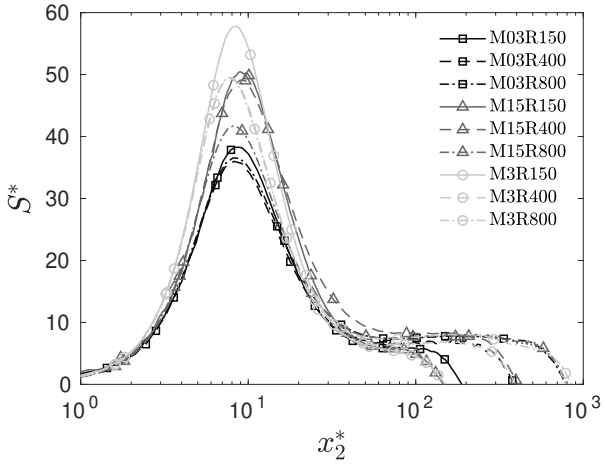
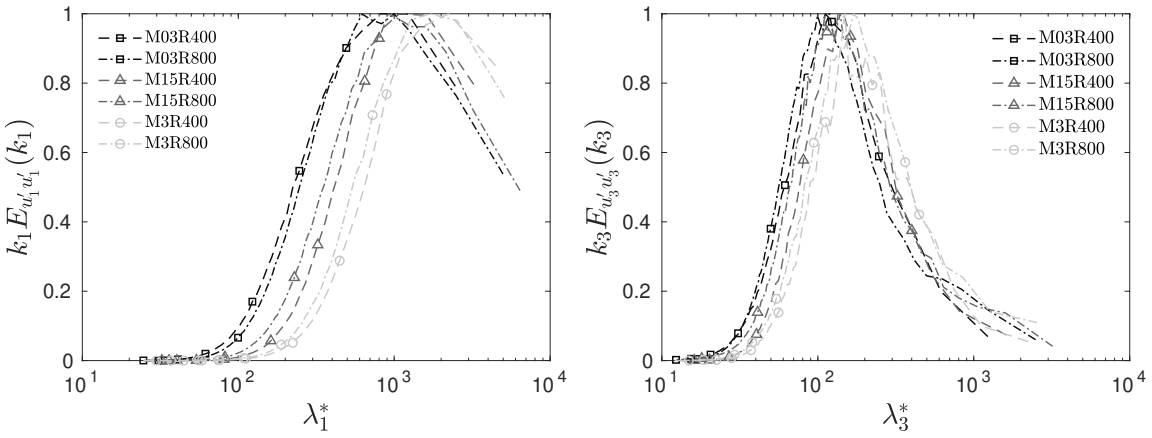


Abbildung 3.37: Parameter der Scherrate $S^* = Sq^2/\epsilon = \overline{\rho}\overline{u_i'u_i'}/(\overline{\mu}\overline{\omega_i'\omega_i'}) \cdot 1/(d\overline{u}_1/dx_2)$.

3.7.1. Unbeeinflusste Fälle

In kompressibler Strömung sind die kohärenten Strukturen zusätzlich durch den Gradienten der Viskosität beeinflusst. Die Abmessungen ändern sich in kompressibler Strömung je nach Vorzeichen von dRe_τ^*/dx_2 [112]. Für gekühlte Wände ($dRe_\tau^*/dx_2 < 0$) ergibt sich beispielsweise eine Verlängerung der Streaks in Strömungsrichtung unter Nutzung der viskosen Wandeinheiten. Die semilokale Skalierung ist in der Lage, zumindest die Änderung der Streaklänge in der Übergangsschicht zu berücksichtigen [112]. Auch die wandnormale Position der dominanten Strukturen ist gleich für die kompressiblen und inkompressiblen Fälle unter Verwendung der semilokalen Skalierung. Unterschiede bestehen weiterhin in der viskosen Unterschicht, wo der Einfluss der variablen Dichte besonders stark ist. Der Einfluss der Machzahl dort wird in den Abbildungen 3.35 und 3.36 sofort deutlich. Die Strömung in der viskosen Unterschicht ist beeinflusst durch die Advektion der dominanten Strukturen in der Übergangsschicht. Patel et al. [112] erklärten das Versagen der semilokalen Skalierung dort mit dem starken nicht-lokalen Einfluss der turbulenten Strukturen in der Übergangsschicht auf die wandnahe Region. Es ergeben sich so Unterschiede zwischen den semilokalen Skalen und den wirklichen turbulenten Skalen in der viskosen Unterschicht. Konkret beobachteten Foysi [51] durch die Zweipunktkorrelationen der u_1'-Fluktuationen und Patel et al. [112] durch spannweitige Spektren einen vergrößerten Streakabstand in der viskosen Unterschicht mit steigender Machzahl. Die geänderten Abmessungen der Streaks gehen mit einer geänderten Neigung der Wirbel in die wandnormale und spannweitige Richtung einher und beeinflussen daher direkt den selbsterhaltenden wandnahen Turbulenzkreislauf und die Umverteilung der turbulenten Energie in die wandnormale und spannweitige Richtung [112]. Foysi [51] beobachtete neben dem größeren Streakabstand in der viskosen Unterschicht eine gesteigerte Kohärenz dieser Strukturen mit steigender Machzahl, sie sind "ge-



(a) **(b)**

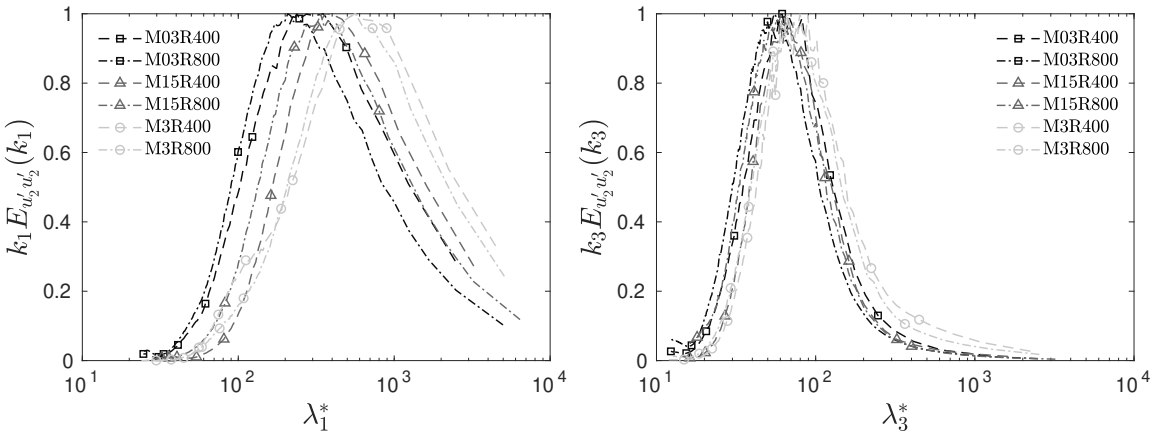
Abbildung 3.38: Eindimensionale Spektren der Stromab-Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_1' u_1'}$ (a) und $k_3 E_{u_1' u_1'}$ (b) in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ in Abhängigkeit der Wellenlängen λ^*.

radliniger". Lee, Kim & Moin [94] zeigten, dass für die Ausbildung der kohärenten Strukturen allein die hohe Scherrate verantwortlich ist und nicht einmal die Existenz einer Wand direkt erforderlich ist. Sie nutzen zur Quantifizierung einen Parameter für die Scherrate $S^* = Sq^2/\epsilon$, das Verhältnis aus einem Zeitmaß der turbulenten Wirbel q^2/ϵ und dem Zeitmaß der mittleren Scherrate $1/S = (d\overline{u}_1/dx_2)^{-1}$. Hierbei ist $q = \overline{u_i' u_i'}^{1/2}$ und für die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ϵ wird hier $\epsilon = \overline{\mu}/\overline{\rho}\overline{\omega_i' \omega_i'}$ genutzt. Die gesteigerte Kohärenz der Strukturen in der viskosen Unterschicht in Foysi [51] stand in direktem Zusammenhang mit einem Anstieg dieser Größe. Sie soll daher auch hier genutzt werden um die Auswirkungen der Mach- und Reynoldszahl auf die Streaks zu untersuchen. Abbildung 3.37 bestätigt die Zunahme des Parameters S^* mit steigender Machzahl teilweise auch über die viskose Unterschicht hinaus und eine Abnahme mit steigender Reynoldszahl. Die Mach- und Reynoldszahleffekte kommen dabei unterschiedlich stark zum tragen, bei den Fällen M3R400 und M3R800 scheinen sie sich gerade aufzuheben.

Um die geänderten Abmessungen der Streaks zu zeigen, wird der Frequenzgehalt mithilfe von vormultiplizierten Energiespektren $E_{u_i' u_j'}$ ausgewertet, wie beispielsweise in Patel et al. [111]. Im zweidimensionalen Fall ergibt sich für die Energiespektren

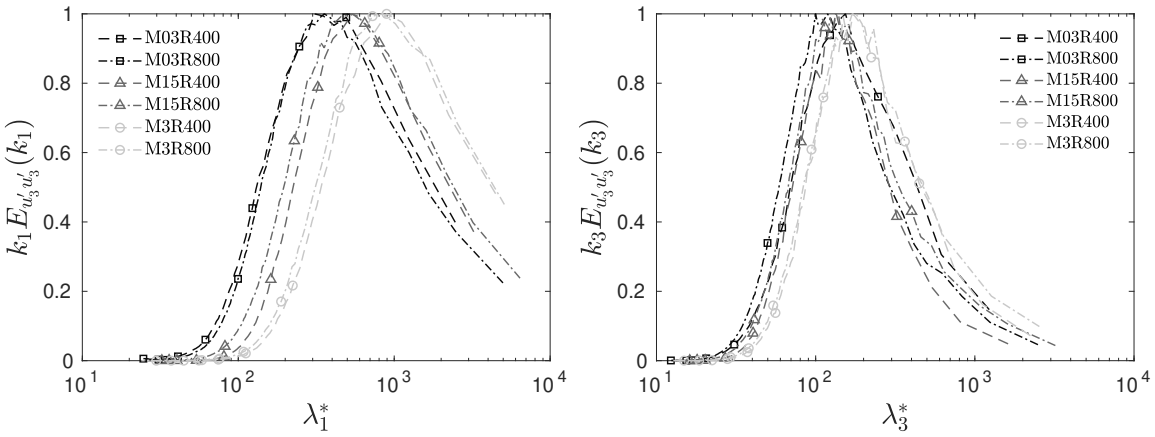
$$E_{u_i' u_j'}(k_1, k_3) = \langle \widehat{u_i'} \widehat{u_j'}^* \rangle \,, \tag{3.62}$$

wobei $\widehat{\cdot}$ die Fourier-Transformierte über die homogenen Richtungen x_1 und x_3 bezeichnet und $\widehat{\cdot}^*$ den konjugiert komplexen Wert. Die Wellenzahlen sind definiert als $k_i = 2\pi f_i$. Zur besseren Interpretation werden die zweidimensionalen Energiespektren gewöhnlich noch mit den jeweiligen Wellenzahlen multipliziert (siehe z.B. del Álamo



(a) **(b)**

Abbildung 3.39: Eindimensionale Spektren der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_2' u_2'}$ (a) und $k_3 E_{u_2' u_2'}$ (b) in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ in Abhängigkeit der Wellenlängen λ^*.



(a) **(b)**

Abbildung 3.40: Eindimensionale Spektren der spannweitigen Geschwindigkeitsfluktuationen $k_1 E_{u_3' u_3'}$ (a) und $k_3 E_{u_3' u_3'}$ (b) in der Ebene mit Wandabstand $x_2^* = 5$ in Abhängigkeit der Wellenlängen λ^*.

und Jiménez [42]) und über dem Wellenlängenvektor $(\lambda_1, \lambda_3) = (2\pi/k_1, 2\pi/k_3)$ aufgetragen:

$$\Phi_{ij}^E = k_1 k_3 E_{u_i' u_j'}(\lambda_x, \lambda_z)\,. \tag{3.63}$$

Die logarithmische Auftragung der Größe Φ_{ij}^E beschreibt, wie viel Energie in Struk-

turen der Länge λ_x und Breite λ_z enthalten ist, aufgrund der Beziehung

$$\langle u_i' u_j' \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_{ij}^E(\lambda_x, \lambda_z)\, \mathrm{d}(\log \lambda_x)\, \mathrm{d}(\log \lambda_z)\,. \tag{3.64}$$

Im eindimensionalen Fall erfolgt die Fourier Transformation in Gl. 3.62 nur über eine Richtung.

Die geänderten Abmessungen werden nun deutlich bei Betrachtung der eindimensionalen Spektren der Geschwindigkeitsfluktuationen. Die größten Änderungen ergeben sich in der viskosen Unterschicht, wo die Variation der lokalen Reynoldszahl besonders stark ist (vgl. Abb. 3.7a). Abbildungen 3.38 - 3.40 zeigen die mit den jeweiligen Wellenzahlen multiplizierten Spektren $E_{u_i' u_i'} = \langle \widehat{u_i'} \widehat{u_i'}^* \rangle$ in Abhängigkeit der Wellenlängen im wandnormalen Abstand $x_2^* = 5$. Mehr noch als die oft beobachtete Vergrößerung des Streakabstandes tritt eine Verlängerung in Stromabrichtung hervor. Der Effekt schwächt sich mit zunehmendem Wandabstand ab und ist bis in den Bereich $x_2^* = 15-20$, wo die 11-Komponente der turbulenten Spannung maximal ist, spürbar. Eine eingehende Betrachtung im Frequenzraum über den gesamten Kanal erfolgt in Abschnitt 3.9.

3.7.2. Beeinflusste Fälle

Die Beeinflussung der kohärenten wandnahen Wirbelstrukturen durch die Oszillationsmethode ist in Abbildung 3.41 anhand von Konturplots instantaner Fluktuationen u_1' an vier verschiedenen wandnormalen Positionen $x_2^* = 5$, $x_2^* = 10$, $x_2^* = 15$ und $x_2^* = 20$ demonstriert. Gezeigt ist jeweils der unbeeinflusste Fall M15R800, sowie der zugehörige beeinflusste Fall mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$. Kleine Strukturen mit starken Extremwerten sind bei der unbeeinflussten Strömung in der von Viskosität dominierten Region ($x_2^* = 5$) zu sehen, gefolgt von einem kontinuierlichen Anwachsen bis hin zur Übergangsschicht ($x_2^* = 20$), wo sie ihre maximale Stärke erreichen. Die beeinflusste Strömung ist in der viskosen Unterschicht völlig von der sinusförmigen Wandgeschwindigkeit dominiert. Die Wirbelstrukturen können sich vor allem in den Stromabpositionen ausbilden, wo der Betrag der spannweitigen Wandgeschwindigkeit geringer ausfällt. Bei $x_2^* = 10$ ist die induzierte spannweitige Geschwindigkeit bereits zu einem Großteil abgefallen und es treten langgezogene Bereiche mit niedrigen Geschwindigkeitsfluktuationen auf. Bis zu einem Wandabstand von $x_2^* = 20$ ist die mittlere spannweitige Geschwindigkeit im Allgemeinen auf Null abgefallen. Wie man sieht, sind die Abmessungen der kohärenten Strukturen auch hier noch nachhaltig verändert aufgrund der Tatsache, dass sie sich in Wandnähe nicht ungehindert ausbilden konnten. Das hier beschriebene Verhalten ist sehr universell und durch alle untersuchten Strömungsbedingungen hinweg ähnlich. Die eingebrachte mittlere spannweitige Geschwindigkeit kommt immer im Bereich $x_2^* \approx 20$ zum Erliegen, sodass das sinusförmige Muster dort nahezu verschwunden ist. Wie nachhaltig die Wirbelstrukturen auch in der Übergangsschicht noch verändert sind

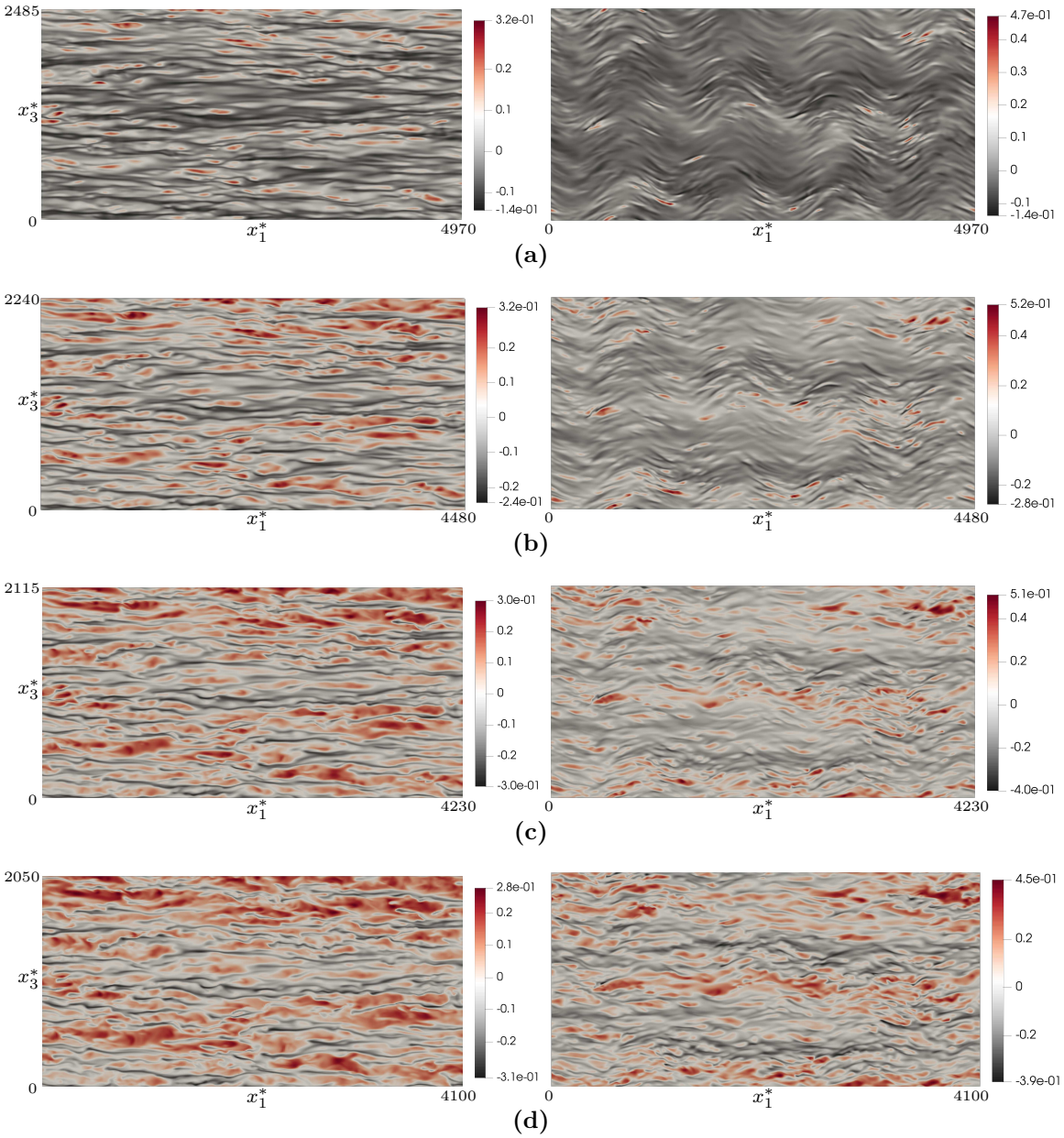


Abbildung 3.41: Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit τ_w, für die unbeeinflusste Strömung M15R800 (links) und den entsprechenden beeinflussten Fall mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$ (rechts). (a) $x_2^* = 5$, (b) $x_2^* = 10$, (c) $x_2^* = 15$, (d) $x_2^* = 20$.

korreliert mit der erzielten Widerstandsreduktion im betrachteten Fall. Da die optimale Wellenlänge der Beeinflussung bei verschiedenen Machzahlen stark variiert, ergeben sich Unterschiede, welche Wellenlängenbereiche besonders stark unterdrückt werden. Zum Vergleich ist in Abbildung 3.42 das Gleiche für den nahezu inkompressiblen Fall M03R800 gezeigt, der eine deutlich kleinere optimale Wellenlänge aufweist.

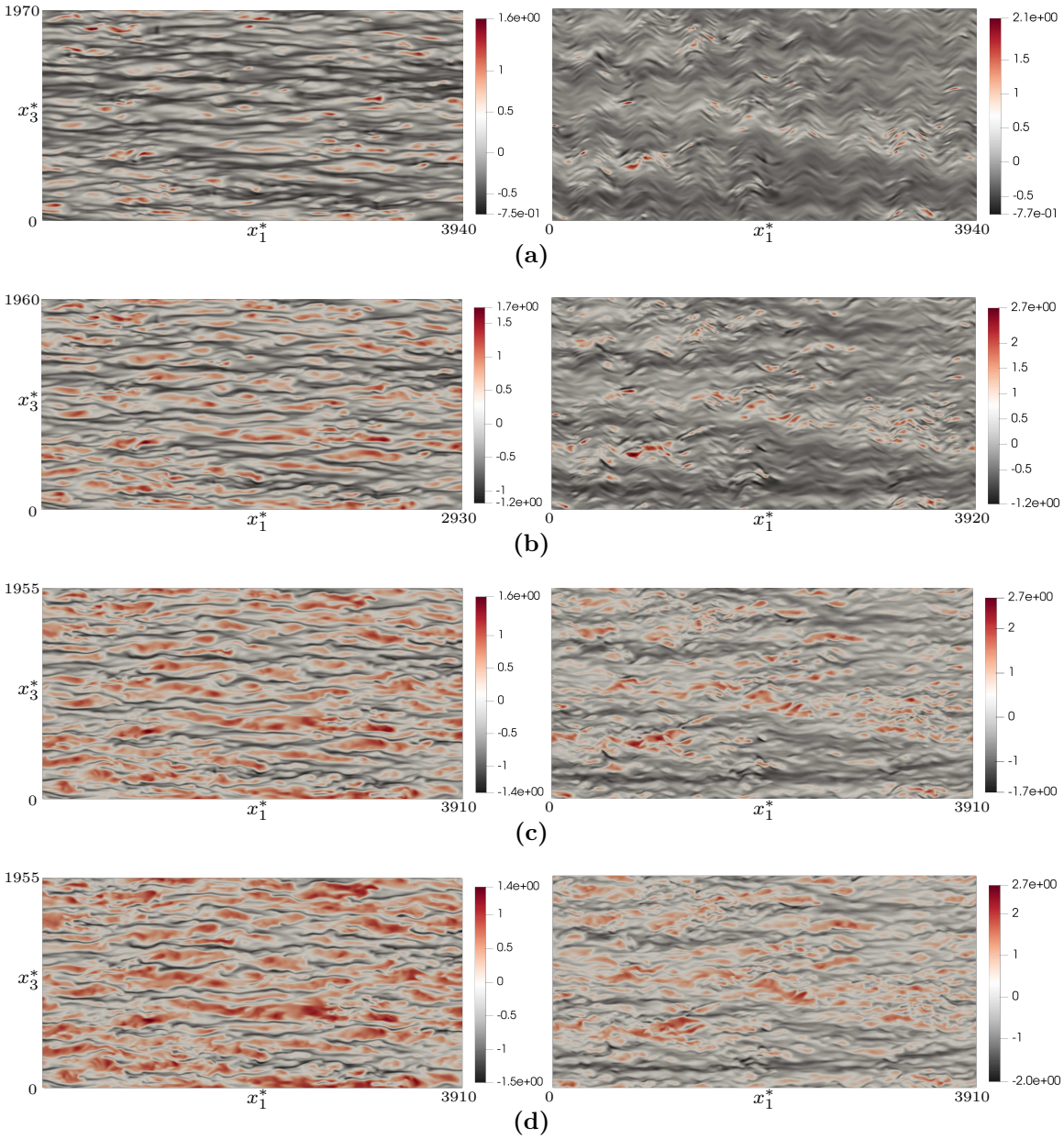


Abbildung 3.42: Konturplots der Fluktuationen von u_1, normiert mit τ_w, für die unbeeinflusste strömung M03R800 (links) und den entsprechenden beeinflussten Fall mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 620$. (a) $x_2^* = 5$, (b) $x_2^* = 10$, (c) $x_2^* = 15$, (d) $x_2^* = 20$.

Besonders deutlich treten im kompressiblen beeinflussten Fall neben den typischen Streaks größere kohärente Strukturen hervor, die die gesamte Kanallänge besetzen. Sie sind bei ausreichend hoher Reynoldszahl normalerweise in den äußeren Schichten ($y \approx h/2$) zu finden und gewinnen hier bereits im wandnahen Bereich Bedeutung, weil die dort üblichen wandnahen Streaks besonders effektiv gedämpft sind. Der Einfluss

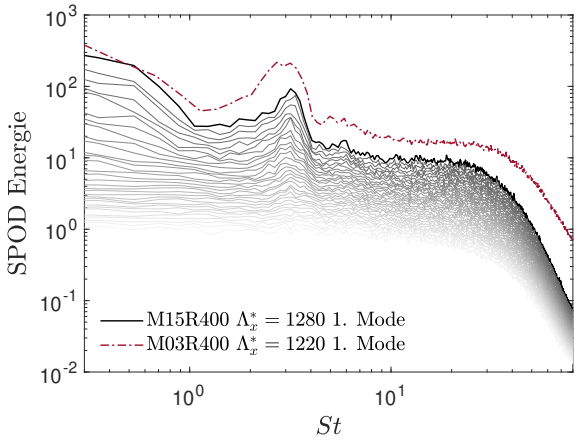


Abbildung 3.43: SPOD Eigenwertspektrum der beeinflussten Konfiguration M15R400 (−). Die obere dicke Linie kennzeichnet den dominanten Eigenwert. Zusätzlich ist zum Vergleich der dominante Eigenwert der beeinflussten Konfiguration M03R400 gezeigt (−·−).

dieser Strukturen wird in Abschnitt 3.10 genauer untersucht.

3.7.3. SPOD

Um die Manipulation der Streaks in beeinflusster Strömung und die Auswirkungen von Kompressibilität besser zu verstehen, wird die SPOD Methode in der wandparallelen Ebene bei $x_2^* = 5$ im unmittelbaren Einflussbereich der Wandbewegungen angewandt. Die in Abschnitt 2.5 vorgestellte Zerlegung liefert Moden, welche kohärent in Raum und Zeit sind und die Strömung im Bezug auf die Energie optimal repräsentieren [131]. Die Konfigurationen M03R400 und M15R400, jeweils mit gleicher Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x^* \approx 1250$, werden untersucht, um Änderungen aufgrund der Kompressibilität zu ermitteln. Ausgangspunkt sind 8000 instantane Felder der Favre-Fluktuation der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung, die unter Nutzung der oberen und unteren Kanalhälfte 16000 wandparallele Schnitte bei $x_2^* = 5$ liefern. Die Abtastfrequenz f_s, ausgedrückt als dimensionslose Strouhalzahl, wurde zu $St_s = f_s h/u_\tau^* \approx 225$ gewählt. Die gesamte Zeitreihe wird gemäß der in Abschnitt 2.5 vorgestellten Vorgehensweise in Blöcke segmentiert (31 im vorliegenden Fall), die als verschiedene Beobachtungen eines Ensembles angesehen werden können. Die SPOD liefert somit 31 Moden für jede diskrete Frequenz. Die zugehörigen Eigenwerte sind sortiert nach absteigender Energie. Der erste (auch führende oder dominante) Eigenwert enthält demnach die meiste Energie und die dazugehörige Mode ist oftmals bezeichnend für den dominanten physikalischen Vorgang [131].

Das komplette SPOD Eigenwertspektrum ist für den Fall M15R400 in Abbildung 3.43 gezeigt, wobei die oberste Kurve das Spektrum der dominanten Mode ist. Wie zu sehen, verhält sich bereits der darunterliegende zweite Eigenwert im Verlauf über

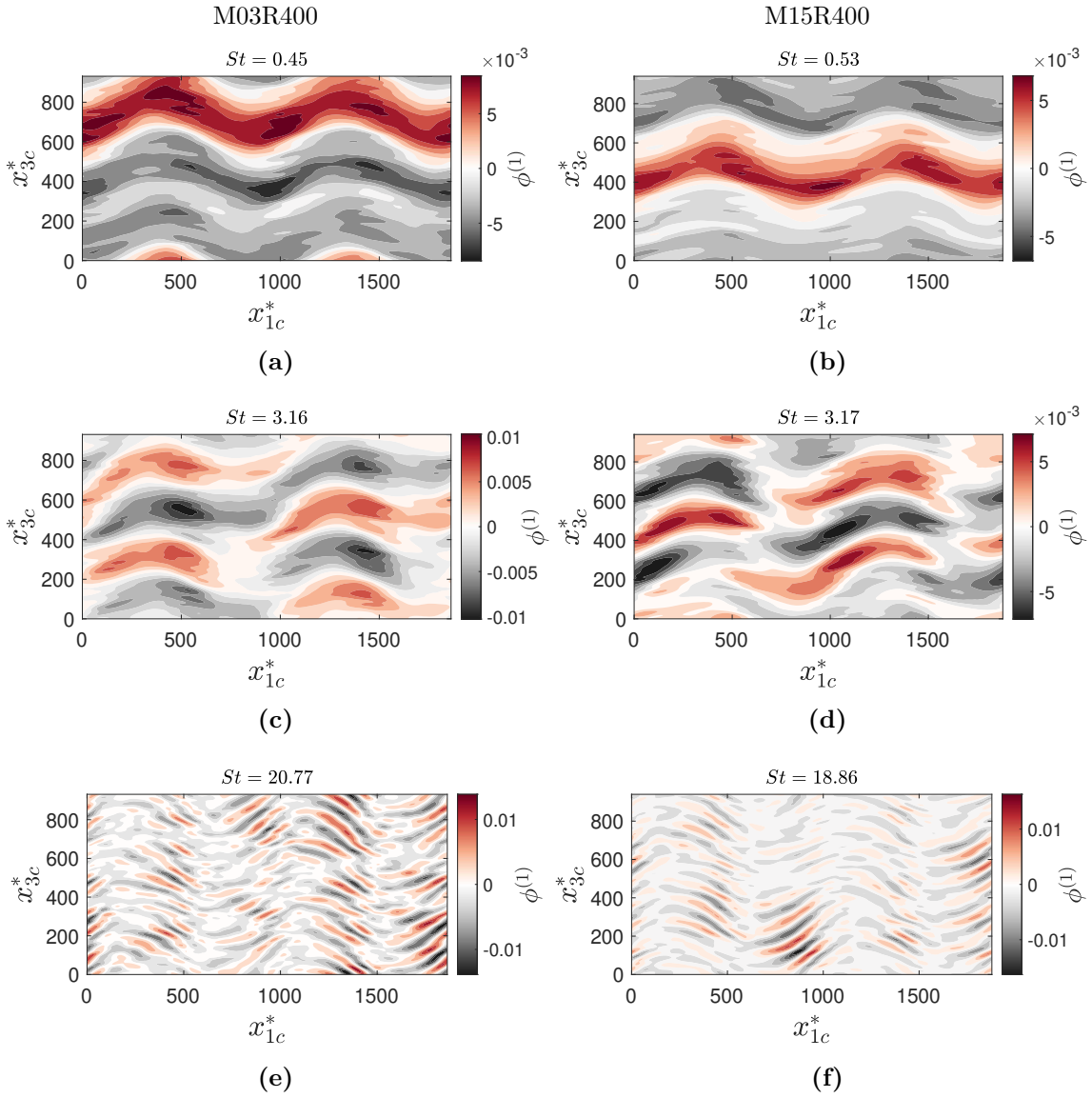
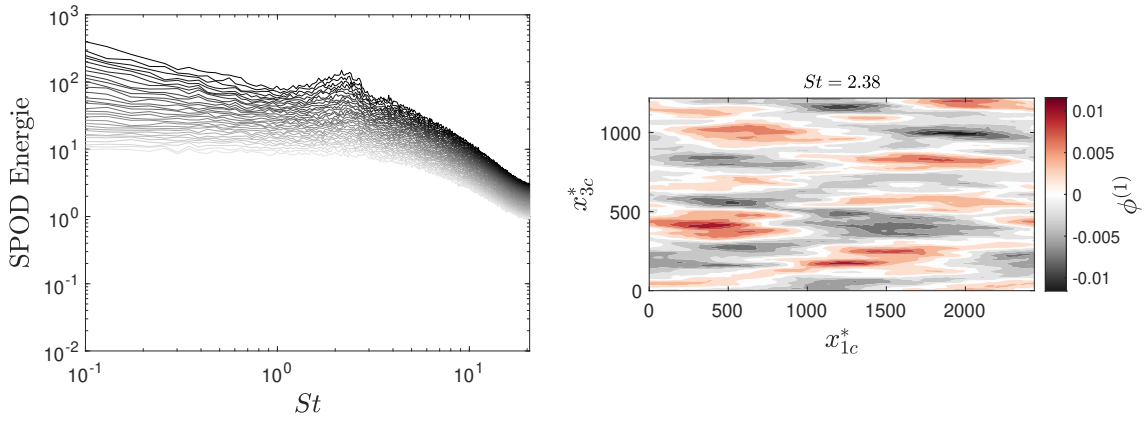


Abbildung 3.44: Dominante SPOD-Moden der Geschwindigkeitsfluktuationen u''/u_τ^* für die beeinflussten Fälle M03R400 $\Lambda_x^* = 1220$ (a,c,e) und M15R400 $\Lambda_x^* = 1280$ (b,d,f) bei ausgewählten Strouhalzahlen $St = fh/u_\tau^*$.

der Strouhalzahl sehr ähnlich, es existiert nirgends eine große Lücke zwischen dem ersten und zweiten Eigenwert. Daher reicht es, die zugehörigen Moden des ersten Eigenwertes zu betrachten. Zusätzlich ist in der Abbildung zum Vergleich das Spektrum der dominanten Mode für den nahezu inkompressiblen Fall M03R400 gezeigt. Die entsprechenden dominanten Moden (zugehörig zu der dicken schwarzen und roten Strichpunktlinie im Spektrum) sind in Abbildung 3.44 für ausgewählte Strouhalzahlen dargestellt. Der Verlauf der Spektren ist für beide Strömungskonfigurationen quali-

tativ ähnlich und setzt sich zusammen aus drei Bereichen. Der Bereich sehr niedriger Strouhalzahlen $St \lesssim 1$ zeichnet sich aus durch langgezogene Bereiche mit jeweils positiven oder negativen Geschwindigkeitsfluktuationen, die das gesamte Gebiet besetzen (Abbildungen 3.44a und 3.44b). Diese Strukturen mit Abmessungen, die mit der halben Kanalhöhe h skalieren, haben ihren Ursprung in der äußeren Schicht bei etwa $x_2 = h/2$. Sie waren schon in dem instantanen Schnitt in Abbildung 3.42a rechts auffällig und können hier durch die Zerlegung isoliert für die tiefe Frequenz dargestellt werden. Derart große Skalen in der äußeren Schicht können die Wandoszillationen mit der für die Wandregion optimierten Beeinflussungswellenlänge nicht direkt manipulieren. Deren Wirkung ist bis hinab zur Wand spürbar, wo den Strukturen innerhalb der spannweitigen Geschwindigkeitsschicht bloß das sinusförmige Muster der Wandbewegungen aufgeprägt wird. Der Peak im SPOD Spektrum bei $St \approx 3$ ist verbunden mit den energiereichsten kohärenten Strukturen innerhalb des wandnahen Turbulenzkreislaufs. Die dazugehörigen Moden (Abbildung 3.44c und 3.44d) weisen ähnliche Dimensionen zu denen in unbeeinflusster Strömung auf, wobei auch hier die Ablenkung in Spannweitenrichtung entsprechend der sinusförmigen Wandbewegungen zu erkennen ist. Das sich anschließende Plateau im Spektrum für Strouhalzahlen $St \gtrsim 5$ ist unmittelbar durch die Manipulation der wandnahen Strömung durch die Wandoszillationen begründet. Die entsprechenden kohärenten Strukturen treten zwischen den Minima der Wandschubspannung $\tau_w(x_1)$ oder gleichbedeutend zwischen den Maxima des spannweitigen Wandgeschwindigkeitsbetrags auf, wo sie am weiteren Wachstum gehindert werden. Diese "Schnittlinien" sind in Abbildung 3.44f gut zu erkennen bei konstanten x_{1c}^* von ca. 200, 700, 1200 und 1700. Recht gute Übereinstimmung der Dimensionen der verschiedenen kohärenten Strukturen zwischen dem supersonischen und subsonischen Fall zeigt sich in Abbildung 3.44 mithilfe der semilokalen Skalierung der Koordinaten x_1 und x_3 basierend auf Werten in der Kanalmitte. Der Vergleich der Spektren der dominanten Moden in Abbildung 3.43 macht deutlich, dass die Energie in den Moden der höheren Strouhalzahlen im kompressiblen Fall gedämpft sind, im Einklang mit der gesteigerten Effizienz der Beeinflussung ($DR = 45\,\%$ gegenüber $41\,\%$ im nahezu inkompressiblen Fall). Zum Vergleich ist in Abbildung 3.45a auch das Spektrum der natürlichen, unbeeinflussten Strömung M03R400 gezeigt, allerdings für eine niedrigere Abtastfrequenz $St_s = 43$. Der Peak im Spektrum ist auch hier zu finden, mit der zugehörigen dominanten Mode, die die Streaks der typischen Abmessungen repräsentiert, auf die die Wandoszillationen abzielen (Abbildung 3.45b). Bereits ab $St \approx 4$ klingen die Eigenwerte mit steigender Frequenz ab, ohne das künstlich erzeugte Plateau in Abbildung 3.43.



(a) (b)

Abbildung 3.45: SPOD des unbeeinflussten Falls M03R400. (a) Eigenwertspektrum; (b) Dominante Mode bei der Peak-Strouhalzahl $St = 2.38$.

3.8. Bilanzen der turbulenten Spannungen

Die Bilanzen der turbulenten Spannungen werden verwendet, um die Ursprünge des geänderten Verhaltens in den turbulenten Spannungen aufgrund unterschiedlicher Mach- und Reynoldszahlen zu analysieren. Außerdem sollen sie zu einem besseren Verständnis der Beeinflussungsmethode, sowie deren unterschiedlichen Effizienz in den jeweiligen Strömungsbedingungen beitragen. Die Bilanzgleichungen für die turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ lauten allgemein:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}_k \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial x_k} = & \\
-\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} & \quad \text{Produktion } P_{ij} \\
+\overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} & \quad \text{Druckscherkorrelation } \Pi_{ij}^u \\
-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{p' u_i'} \delta_{jk} + \overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} - \overline{\tau_{ik}' u_j'} \right) & \quad \text{turbulenter Transport } T_{ij} \\
+\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\tau_{ik}' u_j'} + \overline{\tau_{jk}' u_i'} \right) & \quad \text{viskoser Transport } D_{ij} \\
+\overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} & \quad \text{Dissipation } \epsilon_{ij} \\
-\overline{u_i''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \overline{u_j''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i''} \frac{\partial \overline{\tau}_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u_j''} \frac{\partial \overline{\tau}_{ik}}{\partial x_k} & \quad \text{turbulenter Massenfluss } M_{ij}
\end{aligned}
$$

In vollentwickelter turbulenter Kanalströmung verschwinden die Ableitungen mittlerer Größen in den homogenen Richtungen x_1 und x_3 und die allgemeinen Bilanzgleichungen vereinfachen sich zu folgender komponentenweiser Darstellung:

$\overline{\rho u_1'' u_1''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{d\tilde{u}_1}{dx_2} - \frac{d}{dx_2}\left(\overline{\rho u_1'' u_1'' u_2''}/2 - \overline{u_1' \tau_{12}'}\right) \\ &+ \overline{u_1''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial x_2}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} - \overline{\tau_{1j}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.65}$$

$\overline{\rho u_2'' u_2''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \frac{d}{dx_2}\left(\overline{\rho u_2'' u_2'' u_2''}/2 - \overline{u_2' \tau_{22}'} + \overline{u_2' p'}\right) \\ &+ \overline{u_2''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}}{\partial x_2}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \overline{\tau_{2j}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.66}$$

$\overline{\rho u_3'' u_3''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \frac{d}{dx_2}\left(\overline{\rho u_3'' u_3'' u_2''}/2 - \overline{u_3' \tau_{23}'}\right) \\ &+ \overline{u_3''}\left(\frac{\partial \overline{\tau}_{23}}{\partial x_2}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \overline{\tau_{3j}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.67}$$

$\overline{\rho u_1'' u_2''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \overline{\rho u_2'' u_2''} \frac{d\tilde{u}_1}{dx_2} - \frac{d}{dx_2}\left(\overline{p' u_1'} + \overline{\rho u_1'' u_2'' u_2''} - \overline{u_2' \tau_{12}'} - \overline{u_1' \tau_{22}'}\right) \\ &+ \overline{u_1''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}}{\partial x_2}\right) + \overline{u_2''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial x_2}\right) \\ &+ \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_2}} + \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}} - \overline{\tau_{1j}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_j}} - \overline{\tau_{2j}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.68}$$

Zur Bestimmung der Verläufe über der wandnormalen Richtung werden ca. 150 3D-Felder benutzt, die im zeitlichen Abstand von $T_{int}/4$ gespeichert werden, mit dem integralen Zeitmaß $T_{int} = h/u_\tau$. In jedem instantanen Feld werden anhand der Basisgrößen Druck, Dichte und Geschwindigkeit benötigte abgeleitete Größen und Gradienten bestimmt. In wandnormalen Ebenen erfolgt die Bestimmung von Mittelwerten und Fluktuationen, sodass die jeweiligen Terme über die Ebene gemittelt werden können. Anschließend wird noch eine etwaige Ableitung nach der verbleibenden

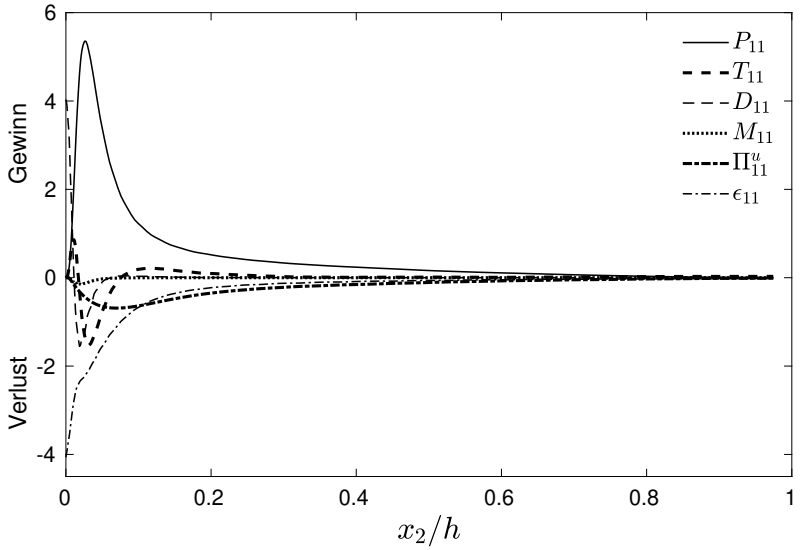


Abbildung 3.46: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

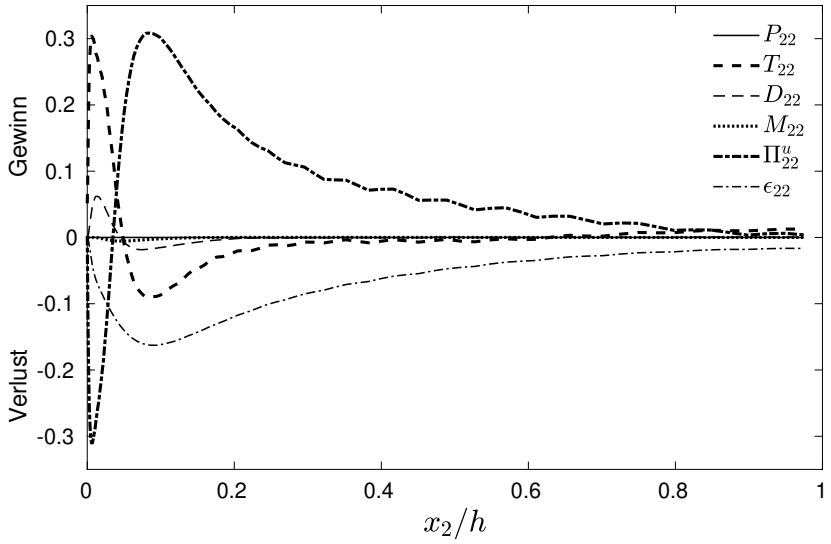


Abbildung 3.47: Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

wandnormalen Richtung durchgeführt und über alle instantanen Zeiten gemittelt. Abbildungen 3.46 - 3.49 zeigen die resultierenden Bilanzen der turbulenten Spannungen beispielhaft für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b \tau_w / h$. Die gewählte Normierung mit $u_b \tau_w / h$ wurde ebenfalls von Huang *et al.* [74] verwendet. Sie folgt aus dem Gleichgewicht zwischen dem Wärmefluss in die Wand $-q_w$

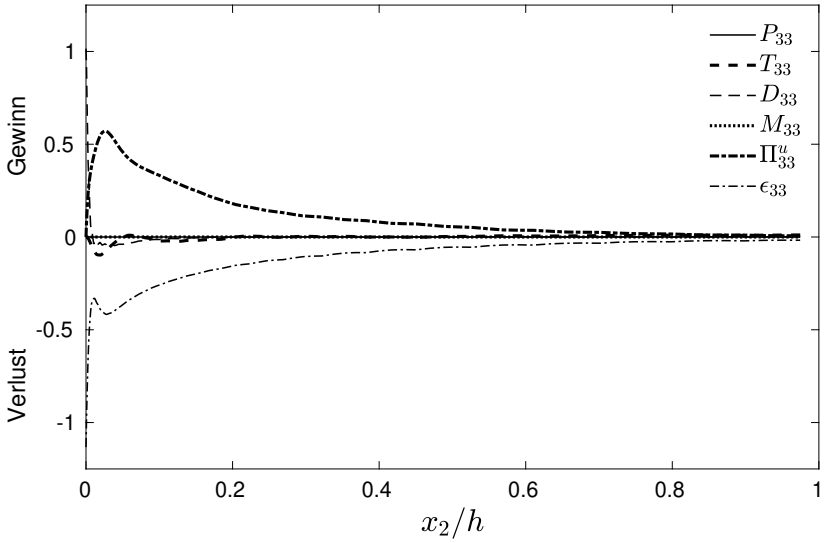


Abbildung 3.48: Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

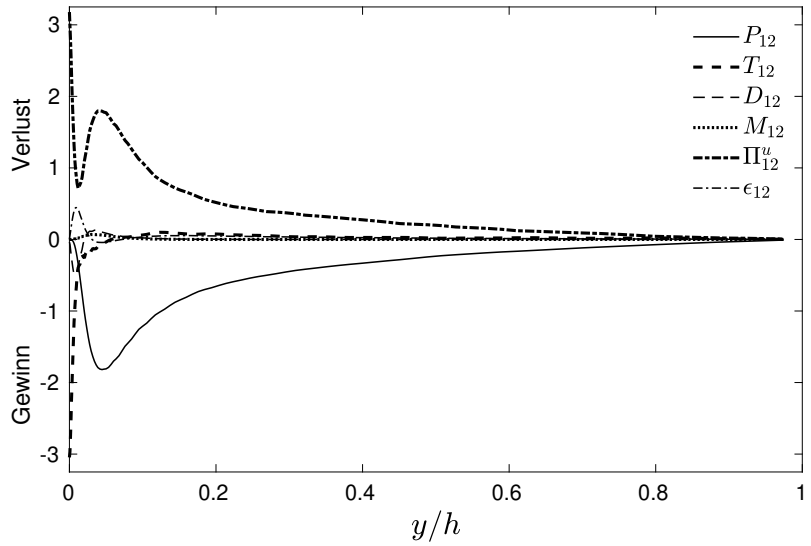


Abbildung 3.49: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den unbeeinflussten Fall M15R400, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

und der von der Volumenkraft geleisteten Arbeit [51]. Foysi [51] bestätigte die Korrektheit dieser äußeren Skalierung basierend auf den Bilanzgleichungen der totalen Enthalpie und inneren Energie, die nach Integration über eine Kanalhälfte die Abschätzung $-q_w \approx \tau_w u_b$ für den Wärmefluss liefern. Unter der weiteren Annahme von lokaler Isotropie in der Kanalmitte konnte gezeigt werden, dass $\tau_w u_b / h$ die ge-

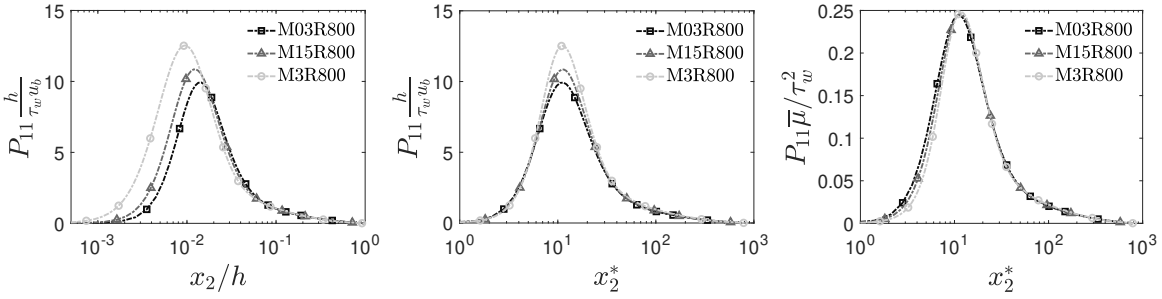


Abbildung 3.50: Unterschiedliche Skalierungen am Beispiel der Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Bilanz und $Re_{\tau c}^* = 800$. (a) $\tau_w u_b/h$ und x_2/h (b) $\tau_w u_b/h$ und x_2^* (c) $\tau_w^2/\overline{\mu}$ und x_2^*

eignete Normierung der verschiedenen Bilanzterme in der Kanalmitte, unabhängig von der Mach- und Reynoldszahl, darstellt [51]. Ein Vergleich der kompressiblen und inkompressiblen Fälle lieferte in äußerer Skalierung (Normierung mit $u_b\tau_w/h$ und Auftragung über x_2/h) hervorragende Übereinstimmung im Bereich $x_2/h > 0.5$. Um zusätzlich die Abweichung in Wandnähe, hervorgerufen durch die variable Dichte und Viskosität, zu reduzieren, ist die Auftragung über der semilokalen Wandkoordinate erforderlich, analog zu den turbulenten Spannungen in Kapitel 3.6. Für die innere Skalierung normierten Foysi *et al.* [52] und Morinishi *et al.* [106] die Terme mit $\tau_w^2/\overline{\mu}$ über y_2^*, statt der im Inkompressiblen üblichen Größen y_2^+ und $\rho_w u_\tau^4/\nu_w$. Das folgt aus $-\overline{\rho}R_{12} = \tau_w(1-x_2/h)$ (Gleichung 3.57 unter Vernachlässigung der viskosen Spannung). Am Beispiel der Produktion und Annäherung der mittleren Scherung $\partial\tilde{u}_1/\partial x_2$ durch $u_\tau^*/\kappa x_2$ ergibt sich $P = (\tau_w^2/\overline{\mu}\kappa)(1/x_2^* - 1/h^*)$, eine Funktion der mit $\tau_w^2/\overline{\mu}$ normierten Produktion von der semilokalen Koordinate x_2^*. Abbildung 3.50 zeigt die verschiedenen Möglichkeiten der Skalierung am Beispiel der Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Bilanz für die Reynoldszahl $Re_{\tau c}^* = 800$. Die äußere Skalierung (Abb. 3.50a) bestätigt die gute Übereinstimmung für $x_2/h > 0.5$. Unter Verwendung der semilokalen Koordinate x_2^* stimmen zusätzlich die Positionen der Maxima für alle Machzahlen überein (Abb. 3.50b). Die eben erwähnte innere Skalierung basierend auf $\tau_w^2/\overline{\mu}$ und x_2^* (Abb. 3.50c) liefert exzellente Übereinstimmung auch bezüglich des Betrages der Maxima durch die Berücksichtigung der lokalen Viskosität. Sie wird daher im Folgenden für den Vergleich der einzelnen Bilanzterme unter den verschiedenen Mach- und Reynoldszahlen der unbeeinflussten Kanalströmungen verwendet. Lediglich im Bereich der viskosen Unterschicht kommt es zu geringen Abweichungen, resultierend aus der zugrundeliegenden Annahme der Vernachlässigbarkeit der viskosen Spannung. Foysi [51] führte einen Vergleich durch für zwei Fälle bei $Ma_b = 0.3$ und $Ma_b = 3$ und jeweils mit $Re_{\tau c} \approx 180$. An der Stelle $x_2^* = 20$, wo beide Fälle die gleiche lokale Reynoldszahl aufweisen, stieg die Produktion P_{11} mit der Machzahl, was die steigende turbulente Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ erklärte. Damit ging eine gesteigerte Dissipation einher. Die sinkende Druckscherkorrelation Π_{11}^u führte zu geringerem Energietransfer in die

x_2- und x_3-Richtung und wiederum zu geringeren Druckscherkorrelationen in diesen Richtungen. Da Letztere Quellterme in den entsprechenden Bilanzen sind, kommt es zu einer Abnahme der wandnormalen und spannweitigen turbulenten Spannungen.

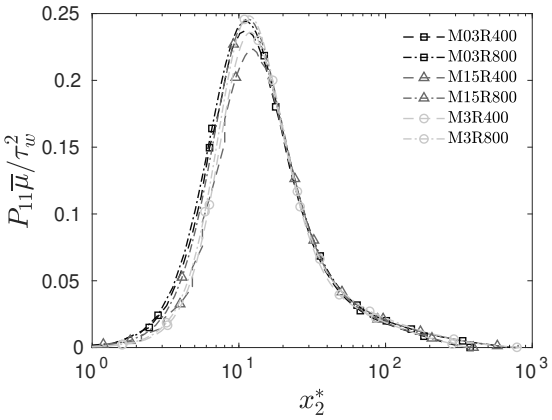


Abbildung 3.51: Vergleich der Produktion P_{11}

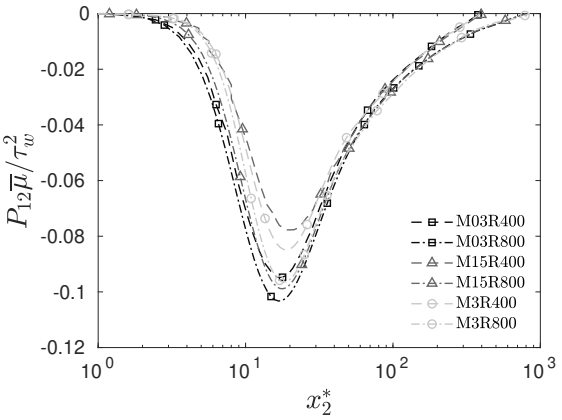


Abbildung 3.52: Vergleich der Produktion P_{12}

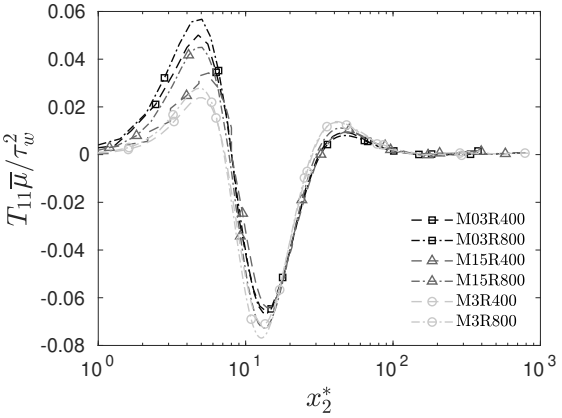


Abbildung 3.53: Vergleich des turbulenten Transports T_{11}

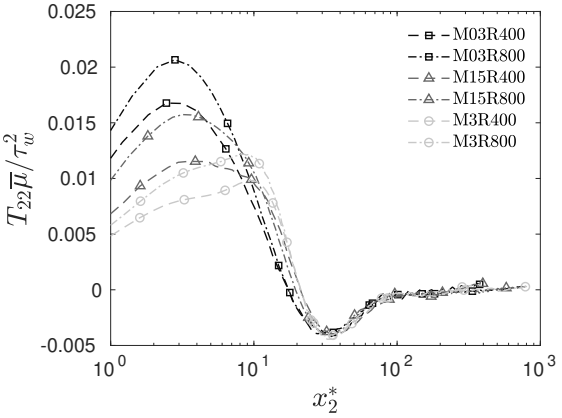


Abbildung 3.54: Vergleich des turbulenten Transports T_{22}

Vergleiche einzelner Terme für die hier untersuchten unbeeinflussten Fälle bei den höheren Reynoldszahlen $Re^*_{\tau c} = 400$ und $Re^*_{\tau c} = 800$ sind in den Abbildungen 3.51-3.68 dargestellt. Bei der 11-Komponente der Produktion (Abbildung 3.51) ist kein systematischer Anstieg mit der Machzahl zu erkennen und die steigende turbulente Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ über diesen Term nicht erklärbar. Die Produktion P_{12} zeigt wiederum eine Abnahme mit der Machzahl und liefert damit einen Beitrag zur sinkenden turbulenten Scherspannung in Wandnähe. Der turbulente Transport T_{11}, T_{22} und T_{33} (Abbildungen 3.53-3.55) ist in der Wandregion ebenfalls für die höheren Machzahlen

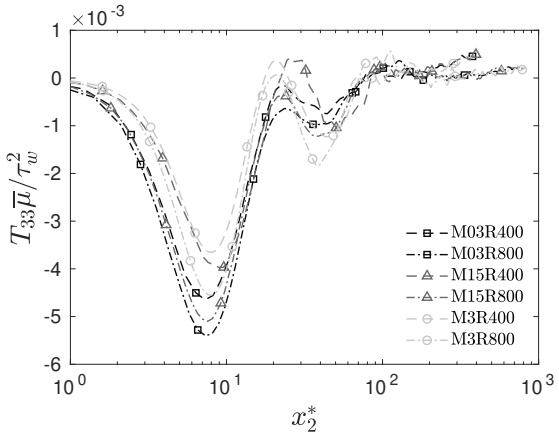


Abbildung 3.55: Vergleich des turbulenten Transports T_{33}

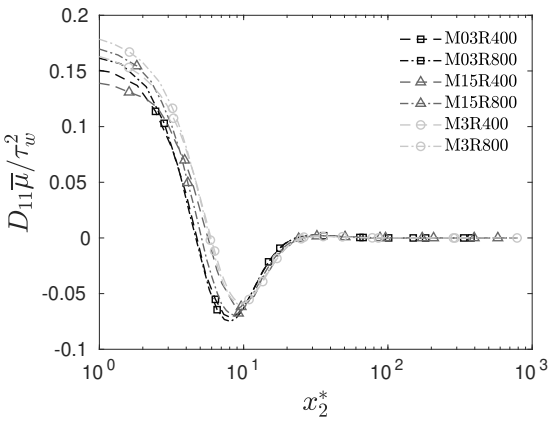


Abbildung 3.56: Vergleich des viskosen Transports D_{11}

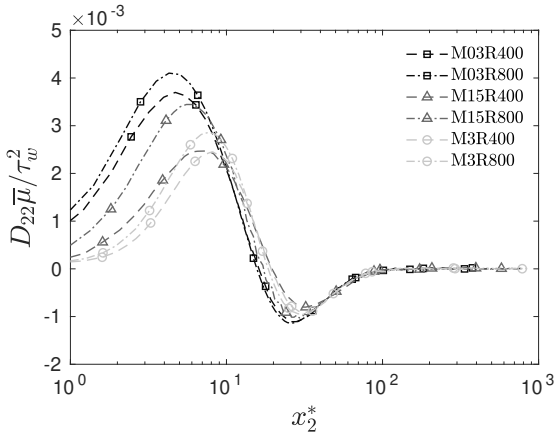


Abbildung 3.57: Vergleich des viskosen Transports D_{22}

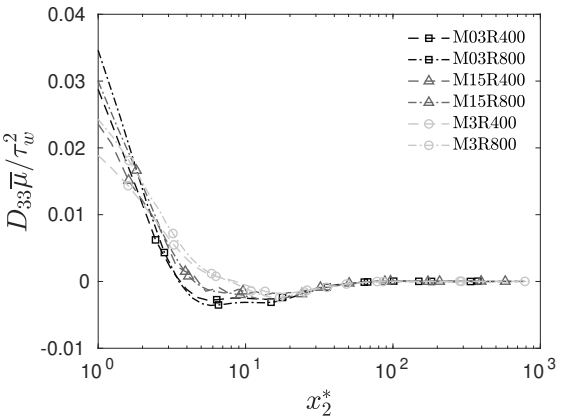


Abbildung 3.58: Vergleich des viskosen Transports D_{33}

abgeschwächt. Gleiches gilt für die 22-, 33- und 12-Komponenten des viskosen Transports (Abbildungen 3.57-3.59). Der turbulente Massenfluss (Abbildungen 3.60-3.62), wenn auch vernachlässigbar gegenüber den anderen Termen, steigt mit der Mach- und Reynoldszahl an, was einen Verlust in den entsprechenden Bilanzen darstellt. Das von Foysi [51] beobachtete Verhalten in den Druckscherkorrelationen als Schlüssel für die Zunahme der Anisotropie bei steigender Machzahl kann auch für die hier verwendeten höheren Reynoldszahlen bestätigt werden. Das Absinken der Druckscherkorrelation mit steigender Machzahl ist bei der 11-, 22- und 33-Komponente sichtbar (Abbildungen 3.63 - 3.65) und für die 11- und 33-Komponente besonders deutlich ausgeprägt. Weniger Verlust in der 11-Komponente bei höherer Machzahl bedeutet in diesem Zusammenhang eine Zunahme der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$. Die turbulenten Spannungen in 2- und 3-Richtung sinken bei größerer Machzahl aufgrund der

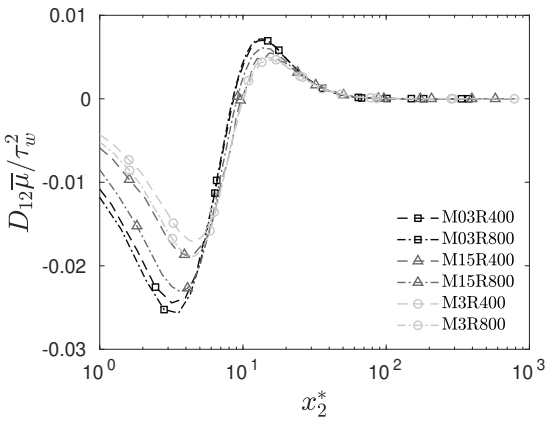


Abbildung 3.59: Vergleich des viskosen Transports D_{12}

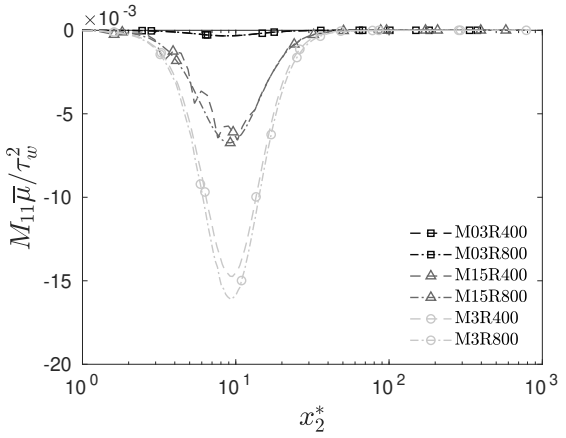


Abbildung 3.60: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{11}

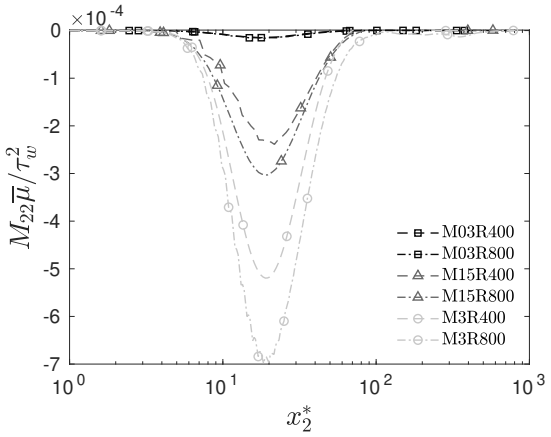


Abbildung 3.61: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{22}

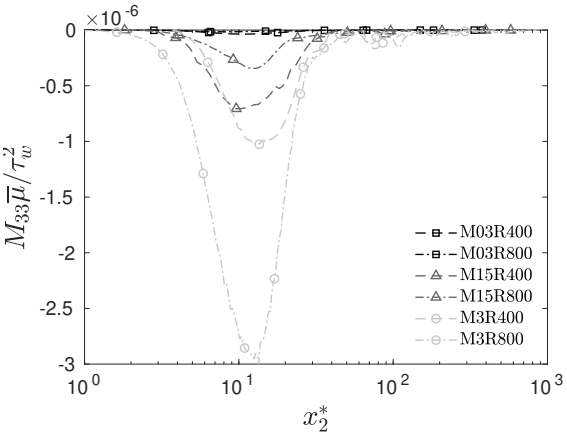


Abbildung 3.62: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{33}

verringerten Druckscherkorrelationen, jeweils Quellterme, in diesen Richtungen. Die Dissipation ϵ_{11} (Abbildung 3.66) zeigt analog zur Produktion keine systematischen Abhängigkeit von der Mach- und Reynoldszahl. In der 22-Komponente weniger und mehr in der 33-Komponente kommt es zu einer Abnahme der Dissipation bei den höheren Machzahlen, einhergehend mit den verringerten Druckscherkorrelationen. Bei den Vergleichen fällt auf, dass der Unterschied in den Verläufen zwischen den Fällen unterschiedlicher Reynoldszahlen (und gleicher Machzahl) bei höherer Machzahl größer ausfällt und damit die Abnahme der Isotropie mit der Machzahl bei höherer Reynoldszahl $Re_{\tau c}^*$ weniger stark zum Tragen kommt.

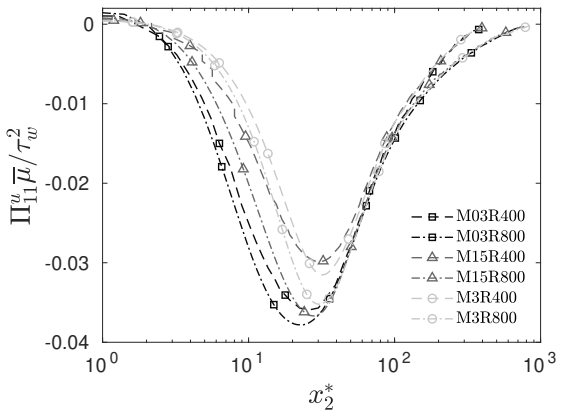


Abbildung 3.63: Vergleich der Druckscherkorrelation Π^u_{11}

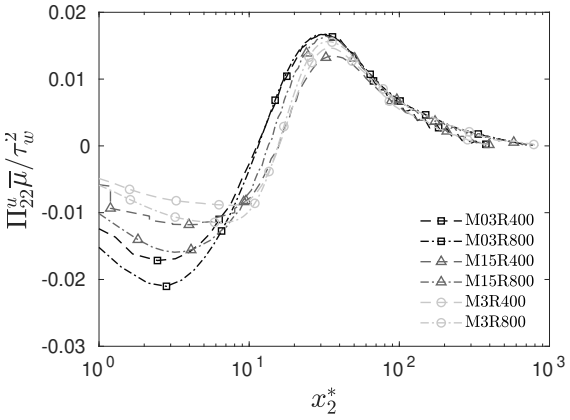


Abbildung 3.64: Vergleich der Druckscherkorrelation Π^u_{22}

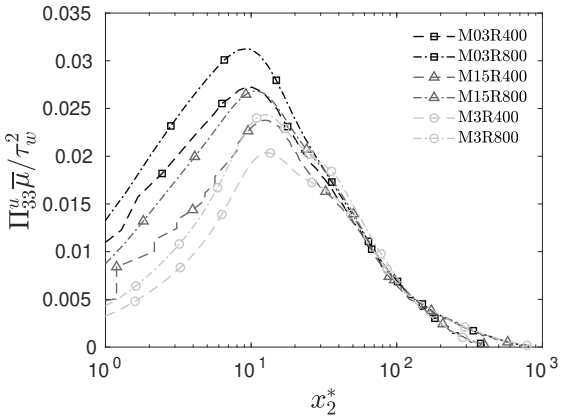


Abbildung 3.65: Vergleich der Druckscherkorrelation Π^u_{33}

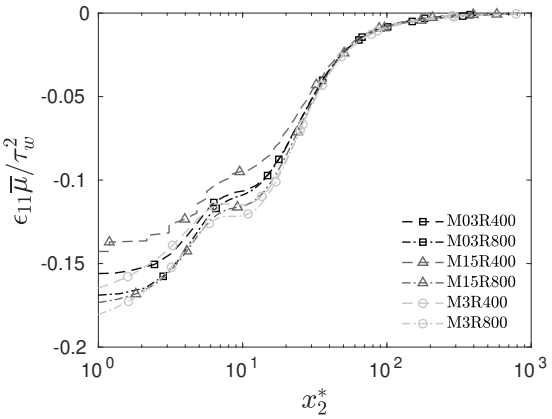


Abbildung 3.66: Vergleich der Dissipation ϵ_{11}

3.8.1. Beeinflusste Fälle

Im beeinflussten Fall kann die x_1-Richtung nicht mehr grundsätzlich als homogen angenommen werden, aufgrund der x_1-Abhängigkeit der aufgeprägten Geschwindigkeit an der Wand. Dies ist speziell für die 33-Komponente in der wandnahen Region von Bedeutung, die unmittelbar von der Strömungsbeeinflussung manipuliert wird und Geschwindigkeitsfluktuationen u_3'' in Richtung der von außen aufgeprägten mittleren Geschwindigkeit in Spannweitenrichtung enthält. Für die Bilanzgleichungen des beeinflussten Falls erhält man unter Berücksichtigung der Änderungen in die x_1-Richtung (rote Terme) folgende Darstellung:

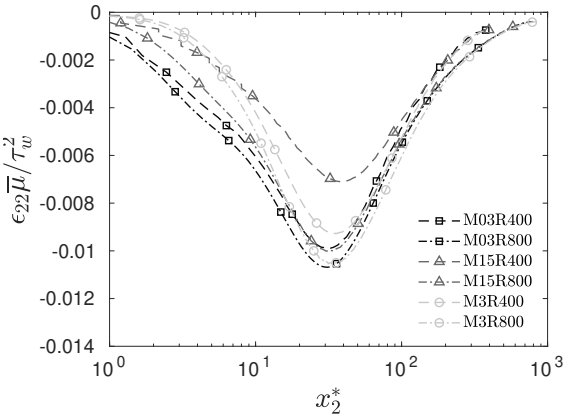


Abbildung 3.67: Vergleich der Dissipation ϵ_{22}

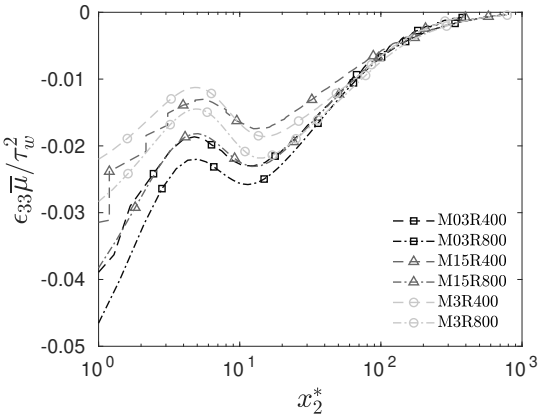


Abbildung 3.68: Vergleich der Dissipation ϵ_{33}

$\overline{\rho u_1'' u_1''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \overline{\rho u_1'' u_2''}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} - \overline{\rho u_1'' u_1''}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overline{\rho u_1'' u_1'' u_2''}/2 - \overline{u_1' \tau_{12}'}\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{p' u_1'} + \overline{\rho u_1'' u_1'' u_1''}/2 - \overline{u_1' \tau_{11}'}\right) \\ &+ \overline{u_1''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial x_2}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} - \overline{\tau_{1j}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.69}$$

$\overline{\rho u_2'' u_2''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overline{\rho u_2'' u_2'' u_2''}/2 - \overline{u_2' \tau_{22}'} + \overline{u_2' p'}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{\rho u_2'' u_2'' u_1''}/2 - \overline{u_2' \tau_{21}'}\right) \\ &+ \overline{u_2''}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{21}}{\partial x_1}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \overline{\tau_{2j}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.70}$$

$\overline{\rho u_3'' u_3''}$ - Bilanz :

$$\begin{aligned} 0 = &- \overline{\rho u_3'' u_1''}\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} - \overline{\rho u_3'' u_2''}\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overline{\rho u_3'' u_3'' u_2''}/2 - \overline{u_3' \tau_{23}'}\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{\rho u_3'' u_3'' u_1''}/2 - \overline{u_3' \tau_{31}'}\right) \\ &+ \overline{u_3''}\left(\frac{\partial \overline{\tau}_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{31}}{\partial x_1}\right) + \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \overline{\tau_{3j}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_j}} \end{aligned} \tag{3.71}$$

$\overline{\rho u_1'' u_2''}$ - Bilanz :

$$
\begin{aligned}
0 = &- \overline{\rho u_2'' u_1''} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - \overline{\rho u_2'' u_2''} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \\
&- \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{p' u_1'} + \overline{\rho u_1'' u_2'' u_2''} - \overline{u_2' \tau_{12}'} - \overline{u_1' \tau_{22}'} \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\overline{p' u_2'} + \overline{\rho u_1'' u_2'' u_1''} - \overline{u_2' \tau_{11}'} - \overline{u_1' \tau_{21}'} \right) \\
&+ \overline{u_1''} \left(- \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{\tau}_{21}}{\partial x_1} \right) + \overline{u_2''} \left(- \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial x_2} \right) \\
&+ \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_2}} + \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}} - \overline{\tau_{1j}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_j}} - \overline{\tau_{2j}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_j}}
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Da eine Mittelung über die x_1-Richtung wegen der fehlenden Homogenität nicht mehr zulässig ist, erfolgt die Mittelung an acht verschiedenen x_1-Positionen pro Wellenlänge allein über die x_3-Richtung. Auffallend ist die Existenz einer Produktion der 33-Komponente im beeinflussten Fall, die ausschließlich auf die Strömungsbeeinflussung zurückzuführen ist, weil in unbeeinflusster Strömung keine mittlere Geschwindigkeit $\tilde{u}_3$ in Spannweitenrichtung existiert:

$$
P_{33} = P_{331} + P_{332} = - \overline{\rho u_3'' u_1''} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} - \overline{\rho u_3'' u_2''} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} \,. \tag{3.73}
$$

Der Anteil P_{331} aufgrund der Änderung der mittleren Geschwindigkeit $\tilde{u}_3$ in x_1-Richtung tritt nur bei der hier verwendeten ortsabhängigen Oszillationsmethode auf, wie Skote in einem Vergleich mit zeitabhängigen Wandoszillationen im Inkompressiblen diskutiert [135]. Der Beitrag P_{331} ist negativ und mindert somit den Teil der Produktion, der sich aus der Änderung $\partial \tilde{u}_3 / \partial x_2$ ergibt (Abbildung 3.69).

Die zusätzliche Produktion P_{111} in der 11-Komponente enthält die Änderung der Favre-gemittelten Geschwindigkeit $\tilde{u}_1$ in x_1-Richtung, die im Wandbereich wahrnehmbar ist (Abbildung 3.70 links). Ein Vergleich mit der Hauptkomponente P_{112} aufgrund der dominanten Scherung und damit verbundenen Geschwindigkeitsänderung $\partial \tilde{u}_1 / \partial x_2$ (Abbildung 3.70 rechts) zeigt jedoch die geringe Bedeutung dieser zusätzlichen Produktion. Gleiches gilt für die zusätzlichen Komponenten T_{ij1}, D_{ij1} und M_{ij1} des turbulenten und viskosen Transports und des turbulenten Massenflusses, wie die beispielhafte Auswertung für die 11- und 33-Bilanz zeigt (Abbildung 3.71). Es wird daher im Weiteren nur die Produktion der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente von den in rot dargestellten zusätzlichen Termen in Gleichung 3.72 berücksichtigt. Sie ist von der gleichen Größenordnung des turbulenten Transports. Die auf diese Weise erlangten kompletten Bilanzen der turbulenten Spannungen sind in Abbildungen 3.72 - 3.75 beispielhaft für den beeinflussten Fall M15R400 mit Parameter $\Lambda_x = \pi h$ dargestellt.

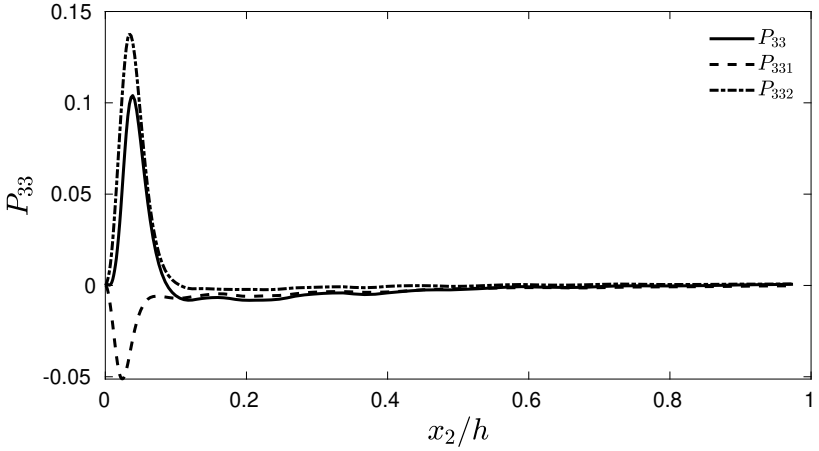


Abbildung 3.69: Produktion der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

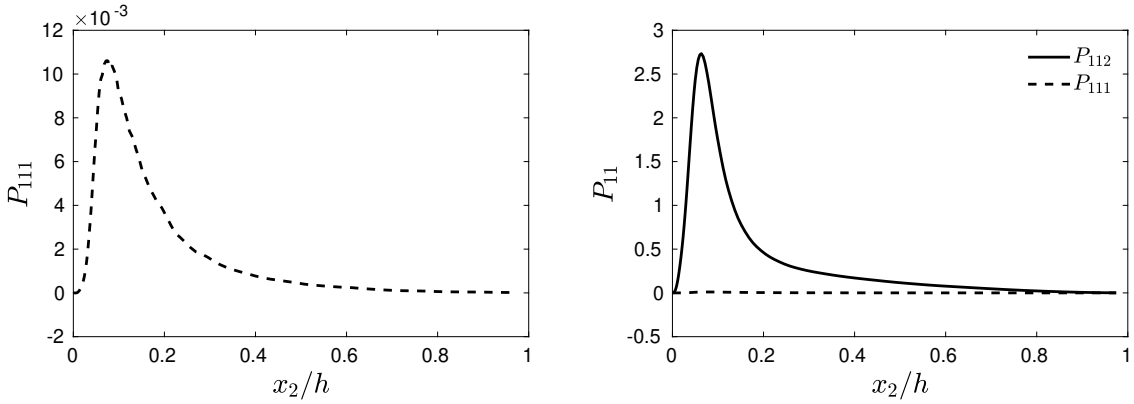


Abbildung 3.70: Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$. Links: P_{111}, rechts: P_{111} im Vergleich mit der Hauptkomponente P_{112}.

Die Wirkung der Strömungsbeeinflussung auf die verschiedenen Bilanzterme wird in den Abbildungen 3.76 - 3.79 beispielhaft für den Fall M03R400 mit Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1220$ durch Vergleich mit dem entsprechenden unbeeinflussten Fall gezeigt. Für die Normierung wird auch hier $u_b \tau_w / h$ verwendet, da nur Konfigurationen mit gleicher Mach- und Reynoldszahl verglichen werden und um die Änderung bezüglich der globalen Strömungsgrößen zum Ausdruck zu bringen. Über den gesamten Kanal hinweg ist für den Großteil der Terme im beeinflussten Fall eine Dämpfung zu beobachten. Das gilt insbesondere für die Extremwerte, bis auf die der Druckscherkorrelationen der 11- und 33-Komponenten (Abbildungen 3.76, 3.78). Deren Maxima ändern sich nur geringfügig. Eine leichte Verschiebung der Extremwerte in positive wandnormale Richtung ist auffällig z.B. bei den Produktionen P_{11}, P_{33} und P_{12} (Abbildungen

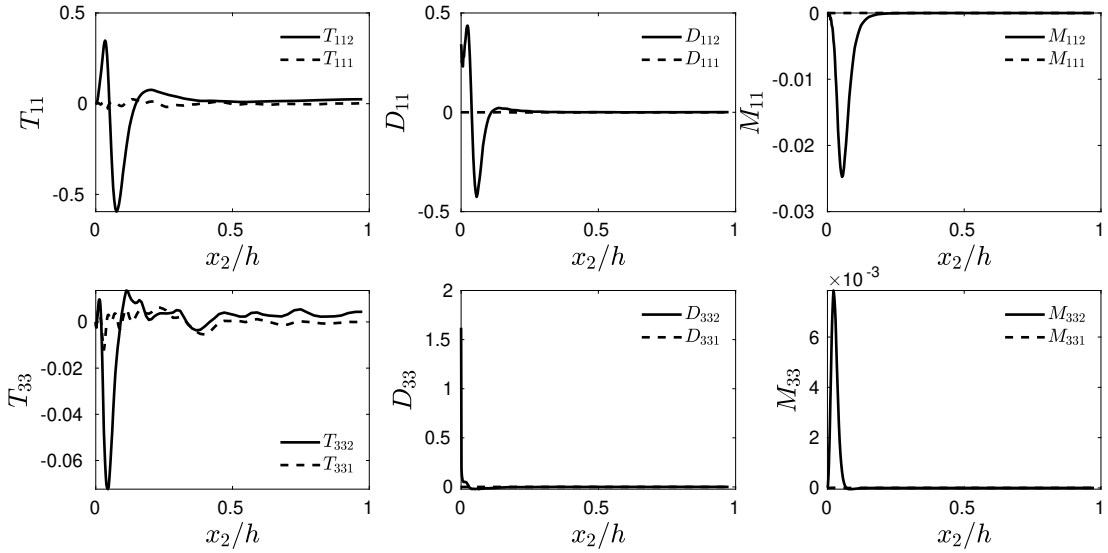


Abbildung 3.71: Vergleich der zusätzlichen Komponenten T_{ij1}, D_{ij1} und M_{ij1} mit den jeweiligen Hauptkomponenten T_{ij2}, D_{ij2} und M_{ij2} für die 11- und 33-Bilanz des beeinflussten Falls M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, jeweils normiert mit $u_b \tau_w / h$.

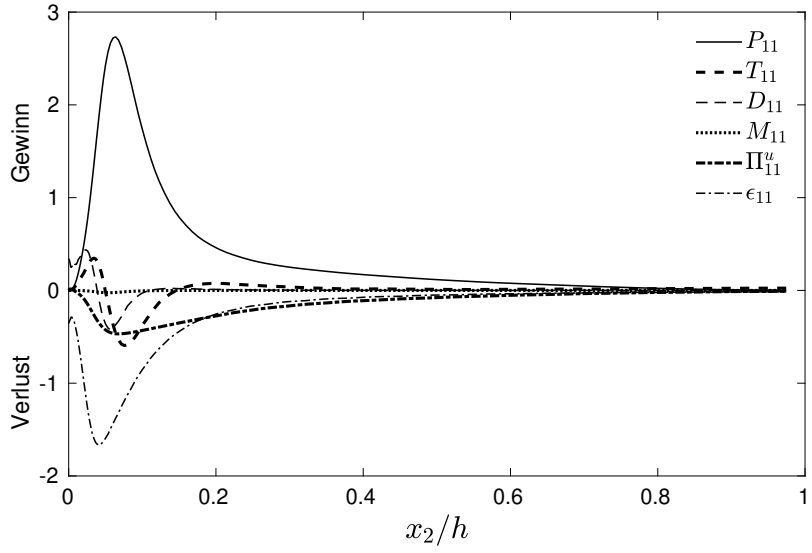


Abbildung 3.72: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

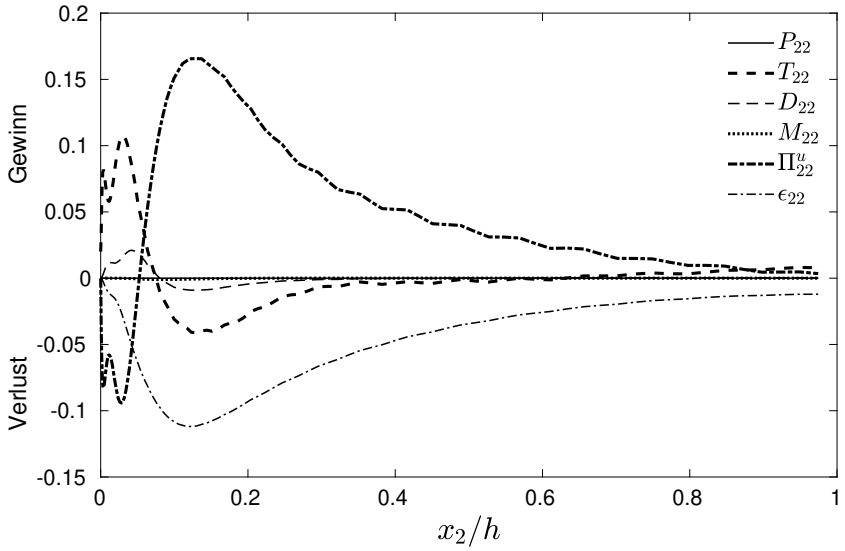


Abbildung 3.73: Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

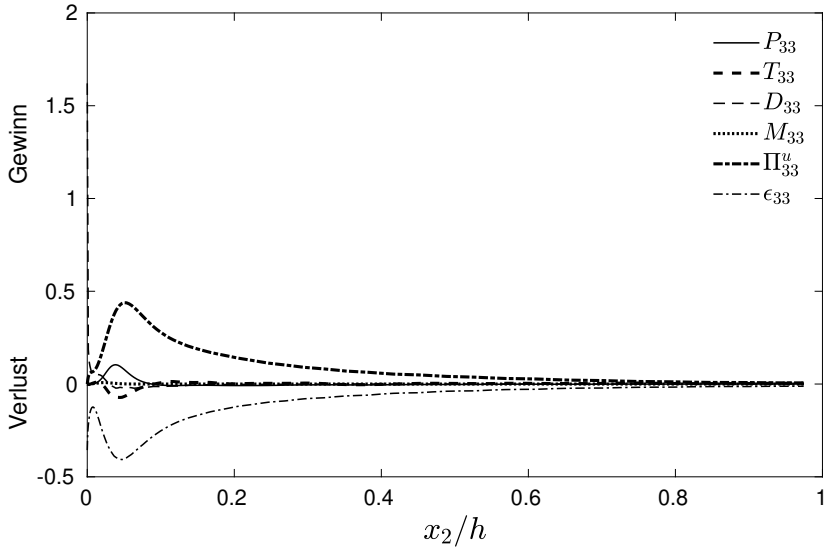


Abbildung 3.74: Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

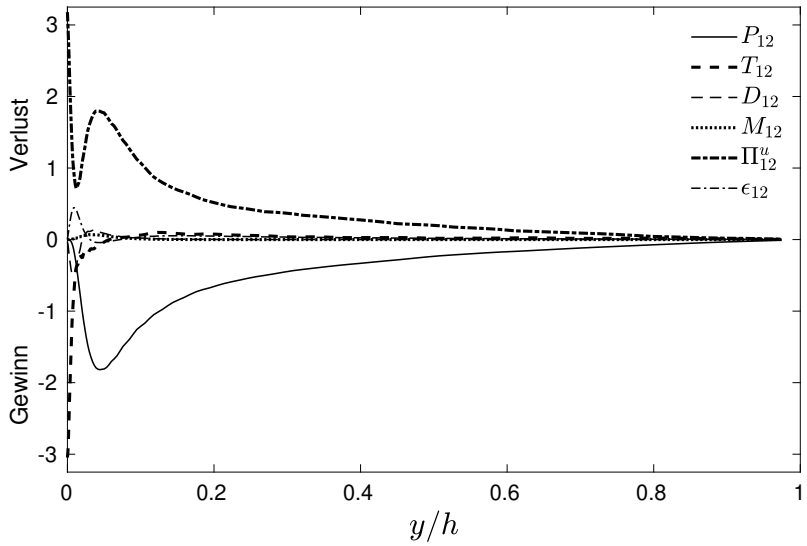


Abbildung 3.75: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M15R400 mit $\Lambda_x = \pi h$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

3.76, 3.78, 3.79). Andere Terme zeigen einen gegenüber der unbeeinflussten Strömung komplett veränderten Verlauf, wie beispielsweise die Dissipation ϵ_{11} (Abbildung 3.76). Ihr Beitrag nahe der Wand wird durch die Wandgeschwindigkeit überproportional gedämpft, sodass sich das Maximum nun bei $x_2^* \approx 13$ statt direkt an der Wand befindet. Der turbulente Transport T_{12} (Abbildung 3.79) bildet in der Übergangsschicht bei $x_2^* \approx 25$ ein neues, schwaches Maximum aus. Interessant ist noch die Betrachtung der 33-Komponente, da in diese Richtung die aufgeprägte Wandgeschwindigkeit wirkt. Auch hier zeigt sich ein neues lokales Maximum beim turbulenten Transport in der viskosen Unterschicht aufgrund der veränderten Strömungsverhältnisse dort. Ein neuer positiver turbulenter Massenfluss entsteht in Wandnähe von geringer Größenordnung.

Um die unterschiedliche Wirkweise der Strömungsbeeinflussung bei verschiedenen Machzahlen zu untersuchen, sind in Abbildung 3.80 für die Reynoldszahl $Re_{\tau c}^* = 400$ ausgewählte Bilanzterme gezeigt, die ein deutlich verändertes Verhalten des beeinflussten Falls gegenüber dem unbeeinflussten Fall bei variierender Machzahl aufweisen. Für den Vergleich wurde eine annähernd gleiche Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x^* \approx 1250$ gewählt. Insbesondere die 11- und 33-Komponente der Druckscherkorrelation erfahren bei steigender Machzahl eine stärkere Dämpfung in der wandnahen Region, was sich in einer veränderten Umverteilung der Energie in der Strömung und einer veränderten Anisotropie der turbulenten Spannungen äußert. Eine Abschwächung ist auch in der 12-Komponente zu sehen, die hier nicht gezeigt ist. Die bei höherer Machzahl stärker verringerte Produktion P_{12} resultiert unmittelbar in einer stärkeren Reduzierung des Anteils des Wandwiderstandes aus turbulenten Fluktua-

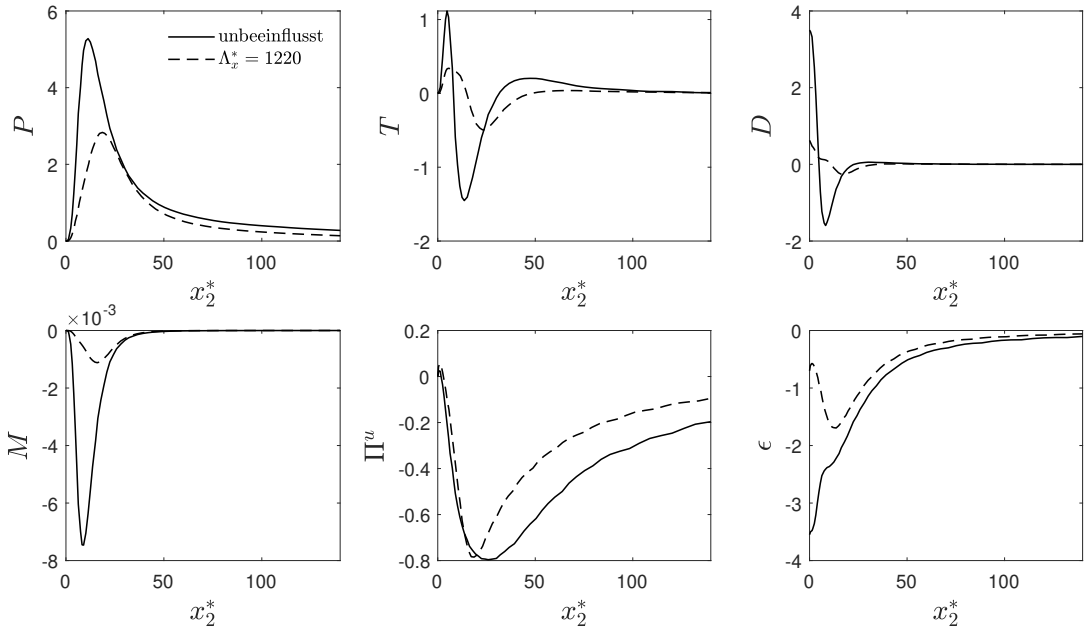


Abbildung 3.76: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

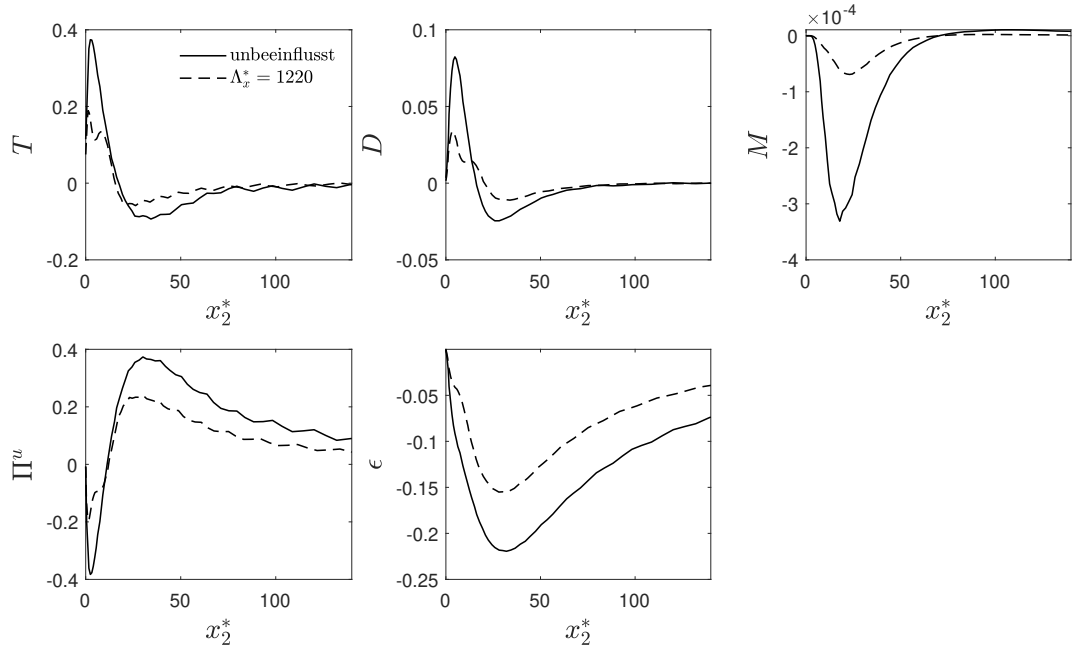


Abbildung 3.77: Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

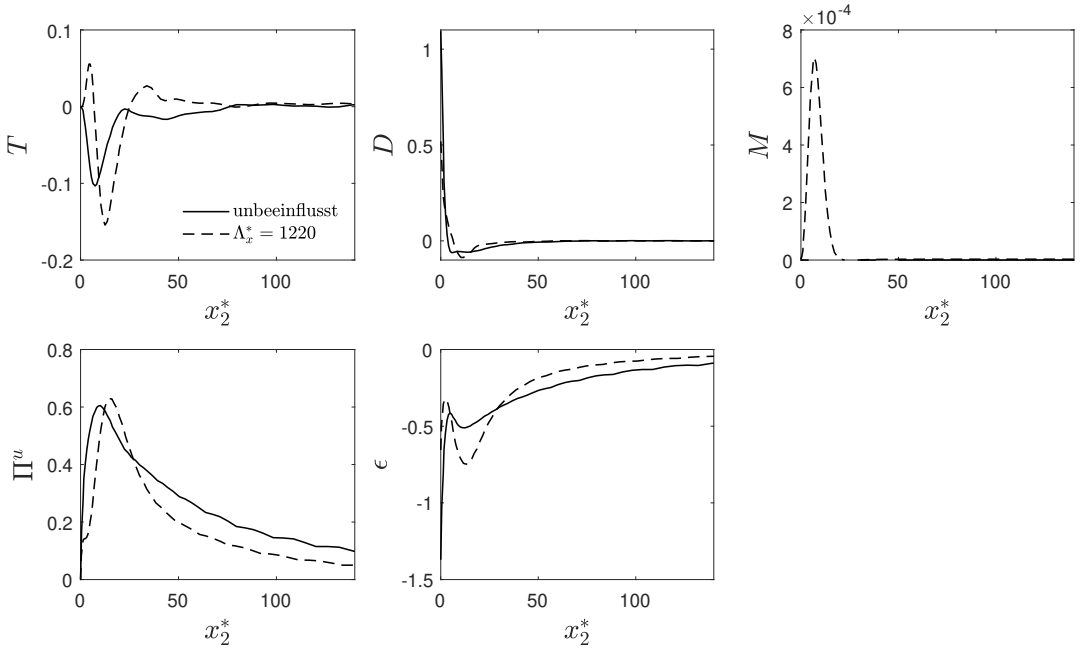


Abbildung 3.78: Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

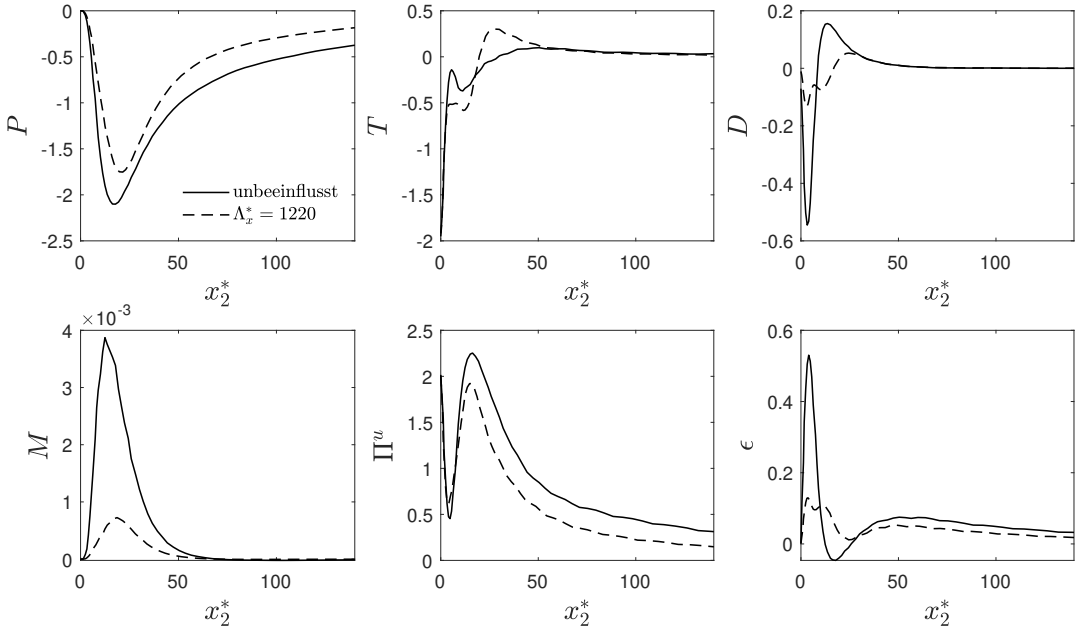


Abbildung 3.79: Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$-Komponente der turbulenten Spannungen für den beeinflussten Fall M03R400 mit $\Lambda_x^* = 1220$ und den zugehörigen unbeeinflussten Fall, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

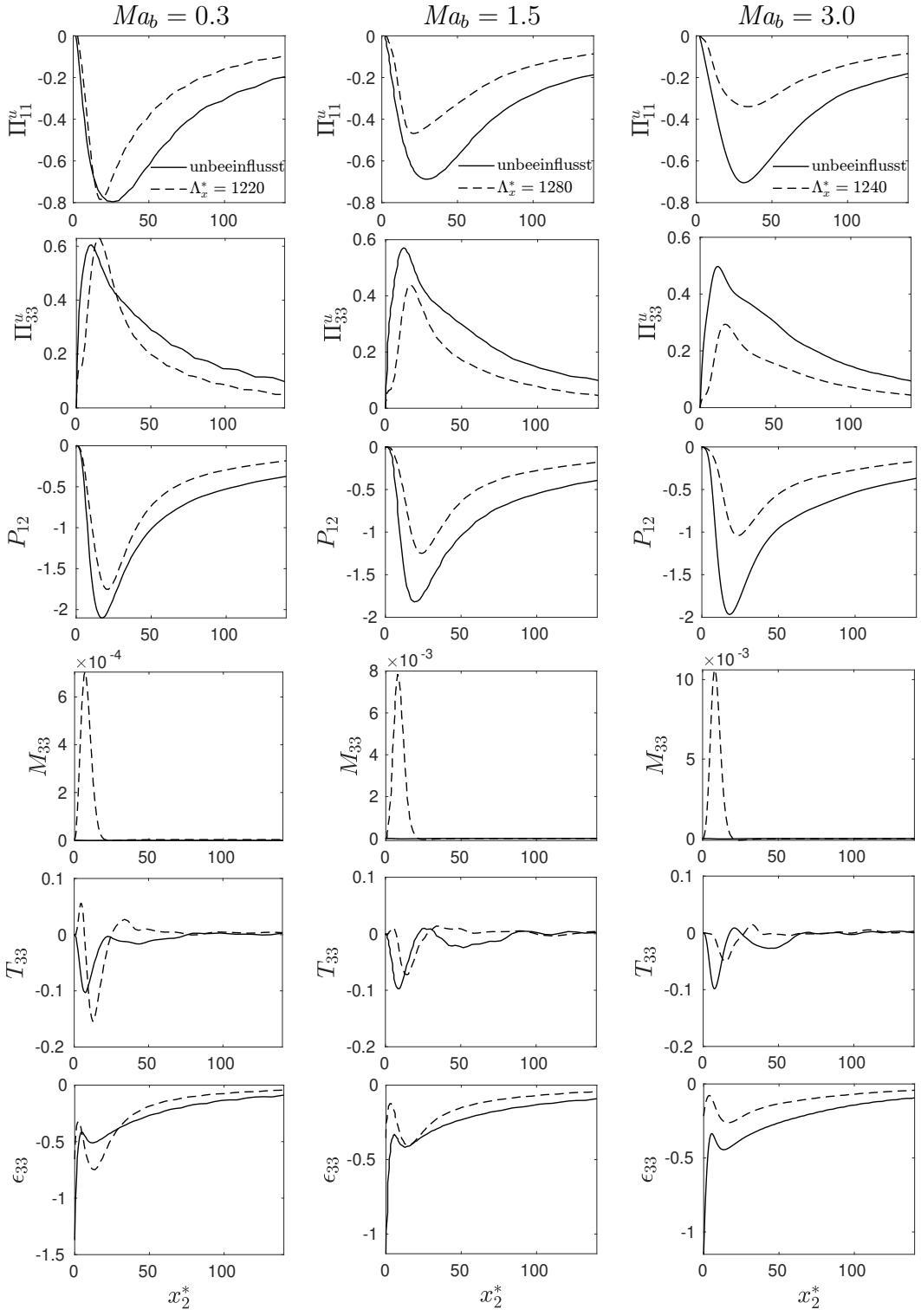


Abbildung 3.80: Ausgewählte Bilanzterme der turbulenten Spannungen für die Konfigurationen M03R400 (linke Spalte), M15R400 (mittlere Spalte) und M3R400 (rechte Spalte) jeweils für die unbeeinflusste Strömung und den zugehörigen beeinflussten Fall mit Wellenlänge $\Lambda^*_x \approx 1250$, normiert mit $u_b \tau_w / h$.

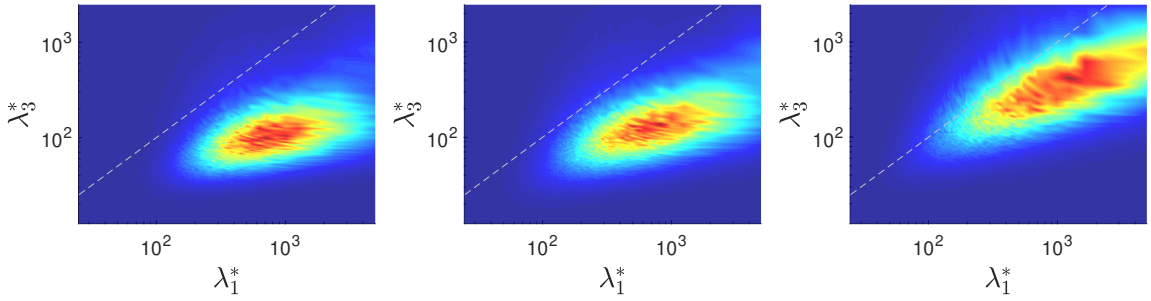
tionen, analog zur höheren Widerstandsreduktionsrate $1 - C_f/C_{f0}$ von 45 % in den beiden supersonischen Fällen gegenüber 41 % im nahezu inkompressiblen Fall. Die meisten Auffälligkeiten zeigen sich in der spannweitigen 33-Richtung, in der die Strömungsbeeinflussung wirkt. Neben der absinkenden Druckscherkorrelation Π_{33} kommt es zu einer Zunahme des von der Beeinflussung hervorgerufenen turbulenten Massenflusses bei höherer Machzahl. Die Größenordnung bleibt aber gegenüber den anderen Termen immer noch sehr klein. Weiterhin ist bei zunehmender Machzahl ein gegenüber dem unbeeinflussten Fall geschwächter turbulenter Transport zu beobachten und es kommt zu weniger Dissipation in der Spannweitenrichtung.

3.9. Energiespektren in den wandnahen Schichten

Die in Kapitel 3.7 mit den Gleichungen 3.62 - 3.64 eingeführten Energiespektren wurden bereits genutzt, um den Einfluss der Kompressibilität auf die Verteilung der räumlichen Wellenlängen in der viskosen Unterschicht und damit die geänderten Abmessungen der Streaks in den unbeeinflussten Strömungen zu zeigen. In diesem Abschnitt wird darüber hinaus auch die Abhängigkeit der eindimensionalen Spektren von der wandnormalen Koordinate mit einbezogen, sowie zweidimensionale Spektren in verschiedenen Wandabständen präsentiert, jeweils auch für die beeinflussten Fälle. Bei der logarithmischen Auftragung der mit den Wellenlängen $\lambda_i = 2\pi/k_i$ vormultiplizierten Energiespektren entspricht die Fläche unter der Kurve dem Energiegehalt in Strukturen mit den Abmessungen λ_i, weshalb diese leicht interpretierbare Art der Darstellung gerne dazu verwendet wird um die Längenskalen bestimmter Strukturen zu zeigen (siehe z.B. [112, 42, 155]). Die kleinen Wirbel werden durch den Anteil hoher Wellenzahlen bzw. kleiner Wellenlängen in E_{ij} repräsentiert und die großen Wirbel durch den Anteil kleiner Wellenzahlen bzw. großer Wellenlängen. Durch Vergleich dieser Größe für die unterschiedlichen Mach- und Reynoldszahlen sowie die beeinflussten Fälle können Unterschiede im Frequenzbereich sichtbar gemacht werden. Wie in Davidson [40] angemerkt, ist jedoch zu berücksichtigen, dass Turbulenz aus kompakten Wirbelstrukturen und nicht aus diskreten Wellen besteht. Solch ein Wirbel ist daher als Verteilung in einem Wellenzahlbereich von $E(k)$ zu verstehen und nicht als scharfer Peak.

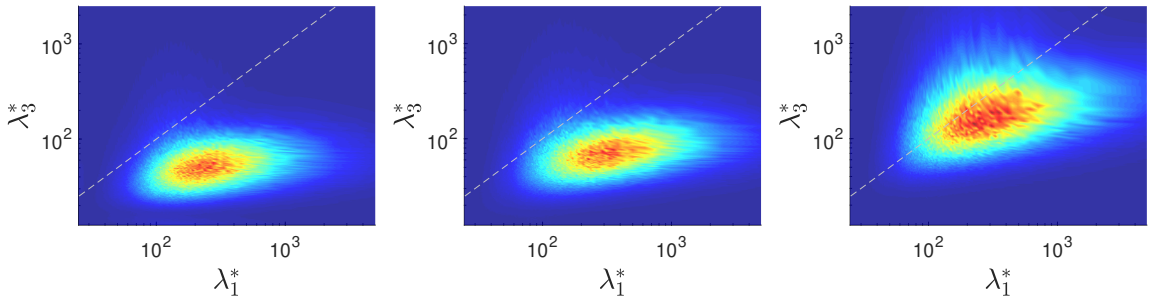
3.9.1. Unbeeinflusste Fälle

Abbildungen 3.81 - 3.83 zeigen die mit den Wellenzahlen k_1 und k_3 vormultiplizierten Energiespektren der Geschwindigkeitskomponenten 1 bis 3 jeweils in den Wandabständen $x_2^* = 5$, $x_2^* = 20$ und $x_2^* = 90$ für die unbeeinflussten Fälle. Übereinstimmend mit den Beobachtungen von del Álamo und Jiménez [42] liegt das Maximum der Stromabkomponente in der Wandregion bei $\lambda_1^* \approx 700$, $\lambda_3^* \approx 100$ (Abbildung 3.81b), was den charakteristischen Maßen für Abstand und Länge der Streaks entspricht.



(a) $x_2^* = 5$ **(b)** $x_2^* = 20$ **(c)** $x_2^* = 90$

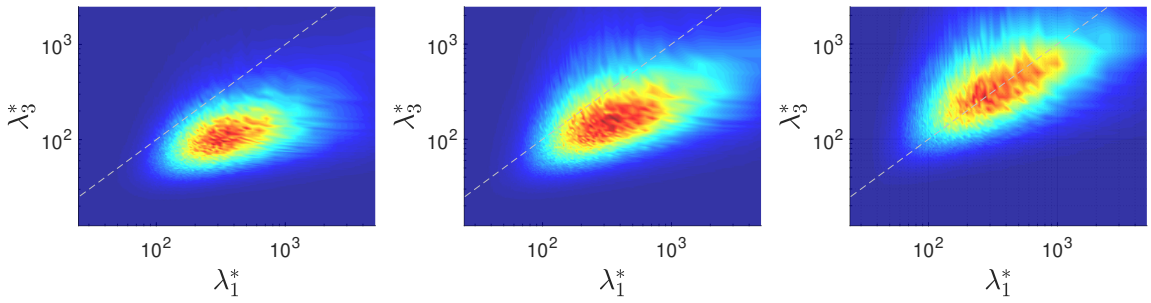
Abbildung 3.81: Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 als Funktion von λ_1 und λ_3 an den wandnormalen Positionen $x_2^* = 5$ (a), $x_2^* = 20$ (b) und $x_2^* = 90$ (c). $- - -$ $\lambda_1^* = \lambda_3^*$.



(a) $x_2^* = 5$ **(b)** $x_2^* = 20$ **(c)** $x_2^* = 90$

Abbildung 3.82: Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 als Funktion von λ_1 und λ_3 an den wandnormalen Positionen $x_2^* = 5$ (a), $x_2^* = 20$ (b) und $x_2^* = 90$ (c). $- - -$ $\lambda_1^* = \lambda_3^*$.

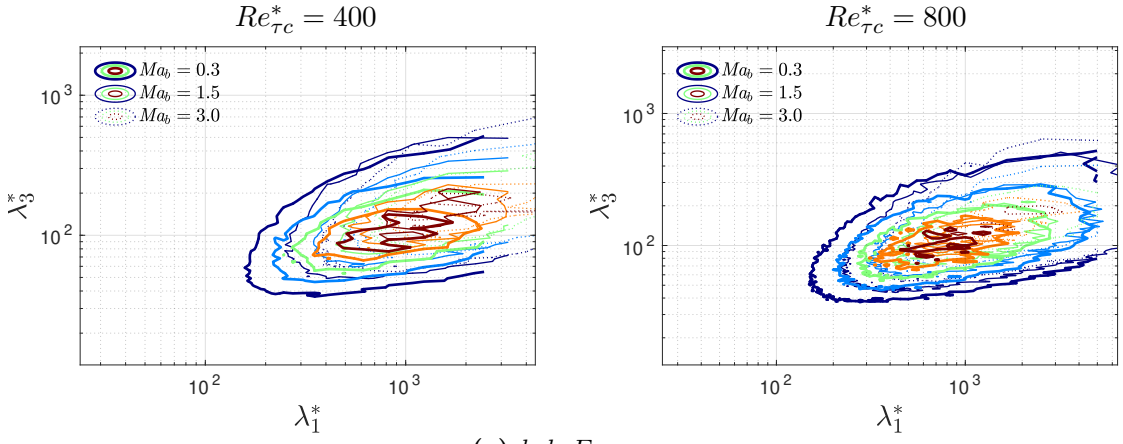
Die Spektren der beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten sind bei $\lambda_1^* \approx 250$, $\lambda_3^* \approx 50 - 100$ maximal (Abbildungen 3.82b, 3.83b), was ungefähr den Dimensionen eines Systems von entgegengesetzt rotierenden Wirbeln in Stromabrichtung entspricht [42]. Die graue Line $\lambda_1 = \lambda_3$ in den Abbildungen 3.81 - 3.83 kennzeichnet die zweidimensionalen isotropen Strukturen. Die Ausrichtung des Spektrums der Stromabkomponente (Abbildung 3.81) ist in Wandnähe stark anisotrop und kann durch $\lambda_x^* \sim (\lambda_z^*)^3$ beschrieben werden [42]. Mit zunehmendem Wandabstand nähert sich das Spektrum mehr der Linie zweidimensionaler Isotropie an. Da die Scherung durch die mittlere Stromabgeschwindigkeit in der 12-Ebene stattfindet, weist die spannweitige Richtung eine höhere Isotropie in der 13-Ebene auf (Abbildung 3.83). Das Spektrum der wandnormalen Geschwindigkeitskomponente (Abbildung 3.82) ist sehr anisotrop in Wandnähe, aber entwickelt mit zunehmendem Wandabstand eine zweite isotrope Komponente, deren relative Intensität mit dem Wandabstand zunimmt und nahe der Kanalmitte dominant wird [42].



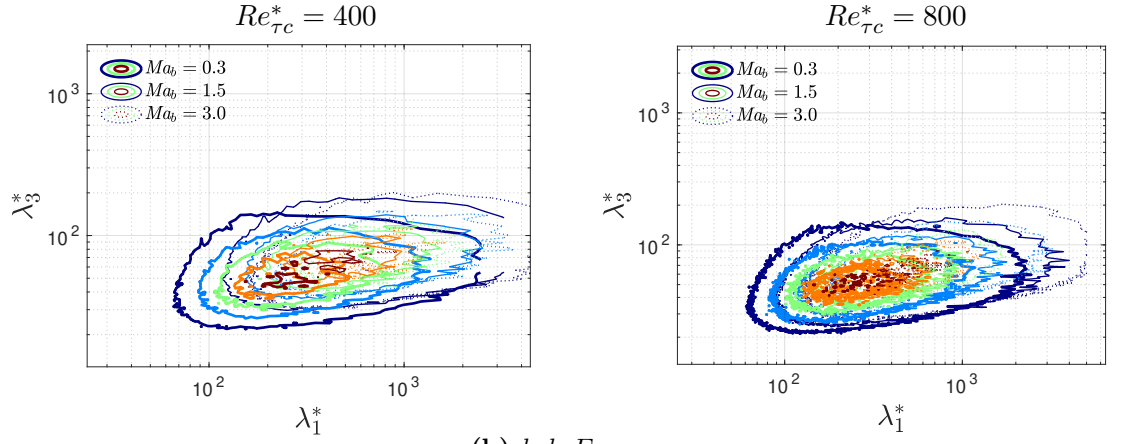
(a) $x_2^* = 5$ **(b)** $x_2^* = 20$ **(c)** $x_2^* = 90$

Abbildung 3.83: Zweidimensionale Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$ des unbeeinflussten Falls M03R800 als Funktion von λ_1 und λ_3 an den wandnormalen Positionen $x_2^* = 5$ (a), $x_2^* = 20$ (b) und $x_2^* = 90$ (c). $- - -$ $\lambda_1^* = \lambda_3^*$.

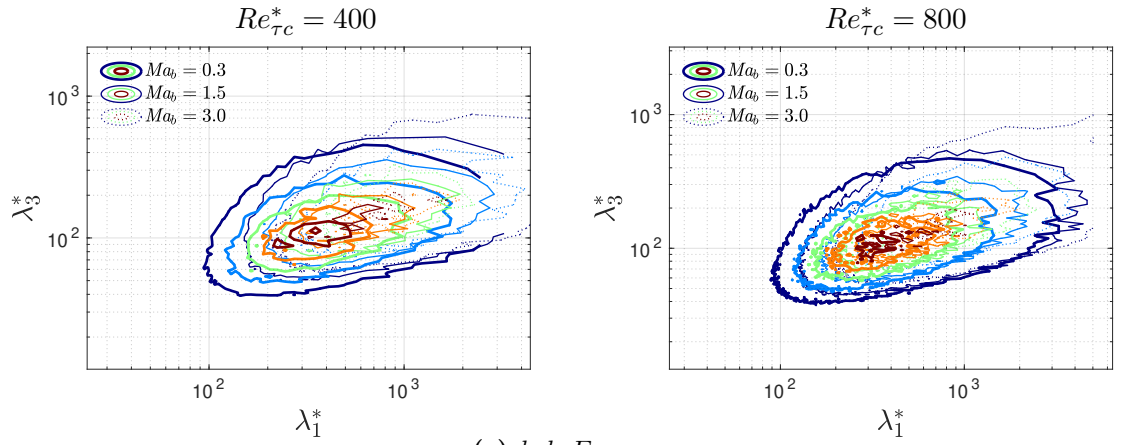
Um den Einfluss der Machzahl auf die Verteilung der räumlichen Wellenlängen zu demonstrieren, sind in Abbildungen 3.84 und 3.85 die zweidimensionalen Energiespektren für die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten dargestellt. Gezeigt sind jeweils alle untersuchten Machzahlen bei $Re_{\tau c}^* = 400$ und $Re_{\tau c}^* = 800$ für die Wandabstände $x_2^* = 5$ (Abbildung 3.84) und $x_2^* = 20$ (Abbildung 3.85) unter Verwendung der semilokal skalierten Wellenlängen λ_1^* und λ_3^*. Deutlich ist die Verschiebung der Konturlinien mit der Machzahl zu größeren Wellenlängen in allen Komponenten zu sehen, wie schon in Kapitel 3.7 anhand der eindimensionalen Spektren im Wandabstand $x_2^* = 5$ gezeigt. In der Übergangsschicht bei $x_2^* = 20$ ist der Effekt weniger stark ausgeprägt, eine weitere Abschwächung des Effekts geht mit der Erhöhung der Reynoldszahl einher. Die Ausrichtung der Spektren bezüglich der Ortskurve zweidimensionaler Isotropie $\lambda_1^* = \lambda_3^*$ und deren Form ändert sich mit der Machzahl nicht erkennbar im dargestellten Wellenlängenbereich. Lediglich die Form der Spektren $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$ im Wandabstand $x_2^* = 5$, deren Konturlinien bei der gewählten Gebietsgröße nahezu komplett aufgelöst werden können, variiert mit der Machzahl (Abbildung 3.84b). Für die höheren Machzahlen ist die angesprochene Aufteilung in einen isotropen und anisotropen Ast, wobei sich der isotrope Anteil bei zunehmendem Wandabstand verstärkt, im Gegensatz zum nahezu inkompressiblen Fall nicht vorhanden. Genauer gesagt ist die Verteilung bezüglich λ_3^* bei den höheren Machzahlen für alle λ_1^* ähnlich breit, wohingegen das Spektrum im Fall $Ma_b = 0.3$ bei kleinen λ_1^* eine große Bandbreite an Wellenlängen λ_3^* besitzt, die mit zunehmendem λ_1^* abnimmt. Ein direkter Vergleich der unbeeinflussten Fälle mit gleicher Machzahl und unterschiedlichen Reynoldszahlen in Abbildung 3.86 zeigt, dass sich die Spektren bei den höheren Machzahlen mit einer Erhöhung der Reynoldszahl in der Tat wieder zu kleineren Wellenlängen hin verschieben und damit die Abweichung vom nahezu inkompressiblen Fall weniger stark ausgeprägt ist.Um die Abhängigkeit von der wandnormalen Koordinate mit einzubeziehen, sind die eindimensionalen Spektren $k_1 E_{u_i' u_i'}(x_2^*)$ in Abbildungen 3.87 und 3.88 für die Reynoldszahlen $Re_{\tau c}^* = 400$ und $Re_{\tau c}^* = 800$ aufgetragen, jeweils über der



(a) $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$

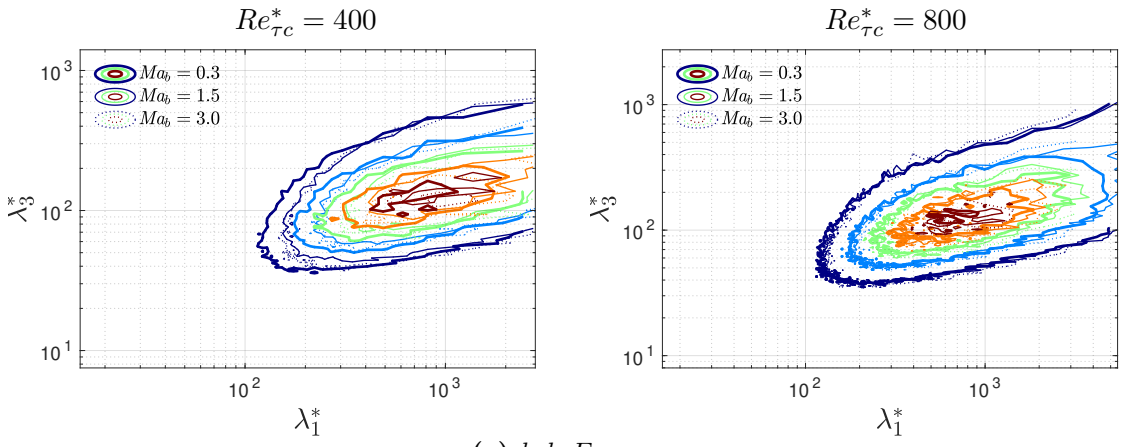


(b) $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$

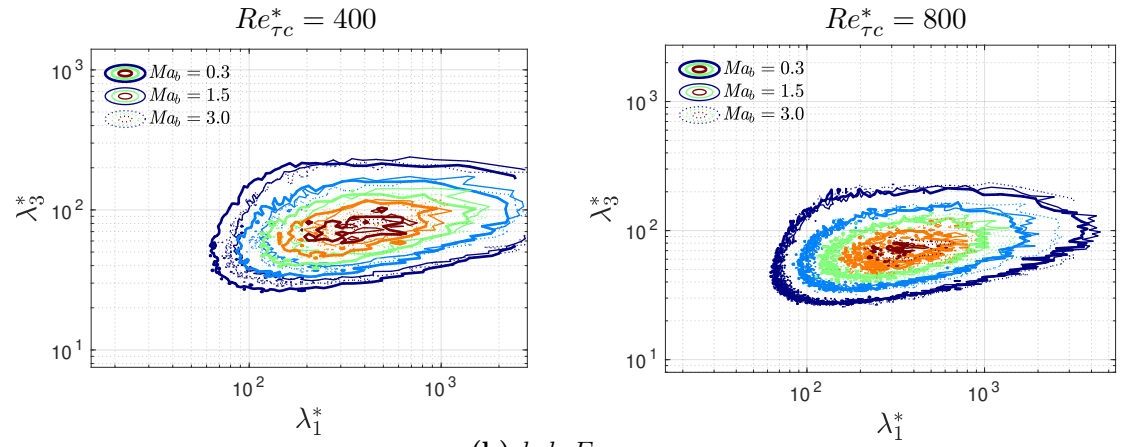


(c) $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$

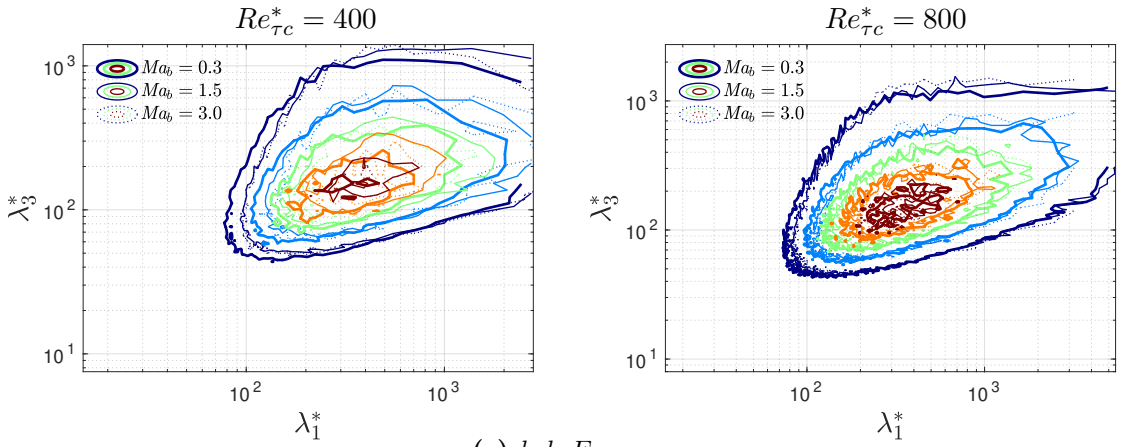
Abbildung 3.84: Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$ (a), $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$ (b), $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$ (c) als Funktion von λ_1^* und λ_3^* bei Wandabstand $x_2^* = 5$ (▮, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$). Variation der Machzahl bei $Re^*_{\tau c} = 400$ (links) und $Re^*_{\tau c} = 800$ (rechts).



(a) $k_1 k_3 E_{u'_1 u'_1}$

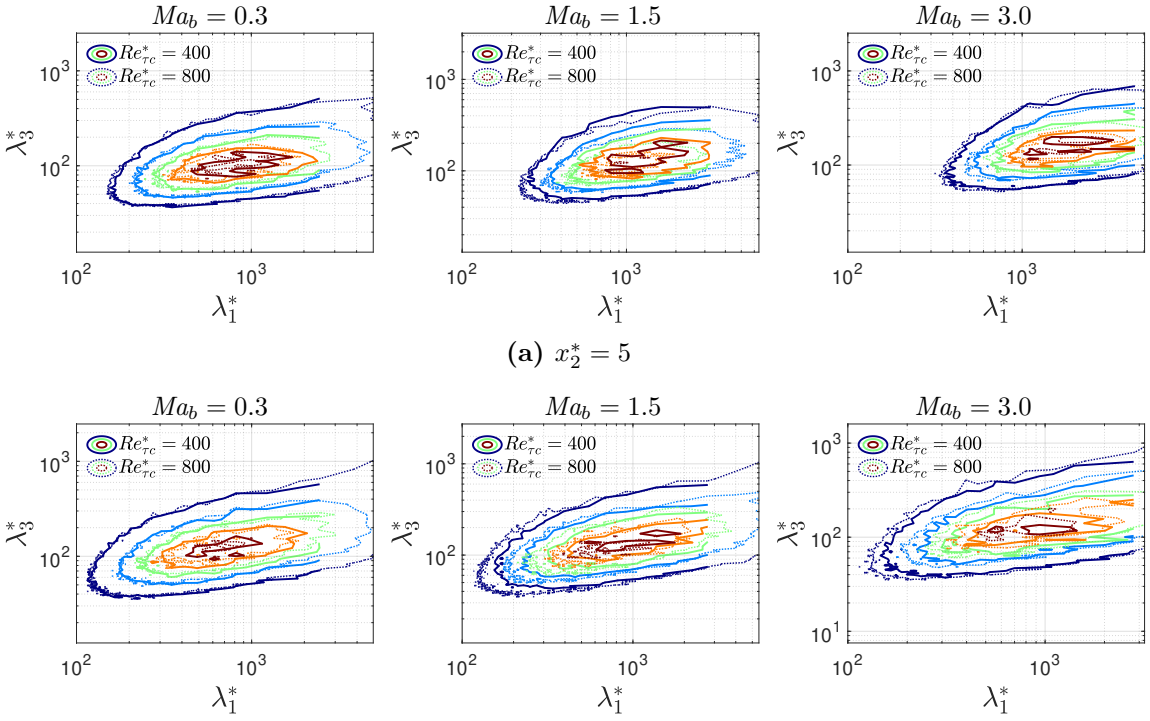


(b) $k_1 k_3 E_{u'_2 u'_2}$



(c) $k_1 k_3 E_{u'_3 u'_3}$

Abbildung 3.85: Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren $k_1 k_3 E_{u'_1 u'_1}$ (a), $k_1 k_3 E_{u'_2 u'_2}$ (b), $k_1 k_3 E_{u'_3 u'_3}$ (c) als Funktion von λ^*_1 und λ^*_3 bei Wandabstand $x^*_2 = 20$ (▮, $0.17 < \Phi^E_{ij}/\|\Phi^E_{ij}\|_\infty < 0.84$). Variation der Machzahl bei $Re^*_{\tau c} = 400$ (links) und $Re^*_{\tau c} = 800$ (rechts).

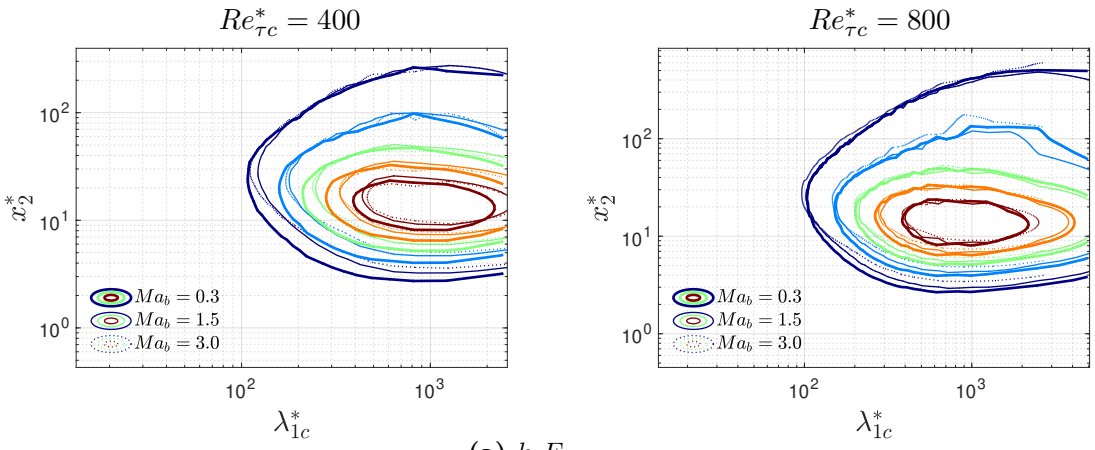


(a) $x_2^* = 5$

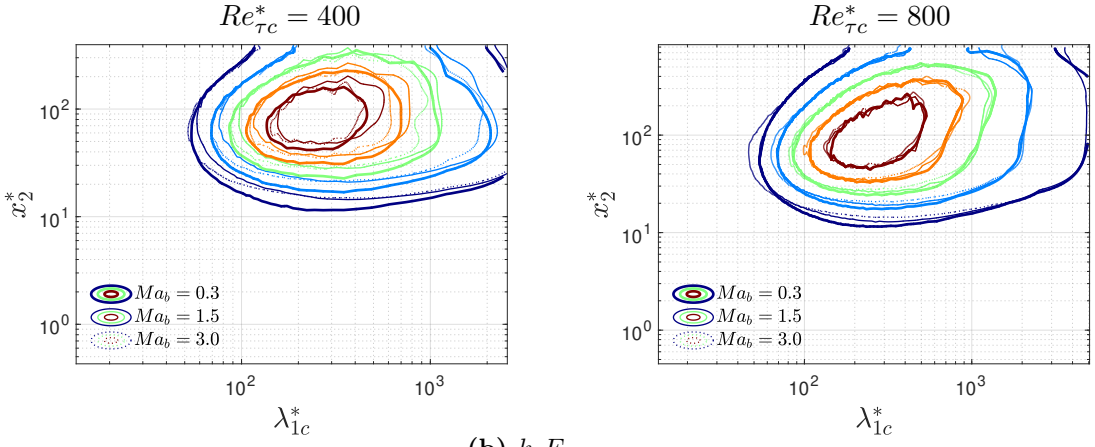
(b) $x_2^* = 20$

Abbildung 3.86: Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten zweidimensionalen Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$ als Funktion von λ_1^* und λ_3^* bei Wandabstand $x_2^* = 5$ (a) und $x_2^* = 20$ (b) (, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$). Variation der Reynoldszahl bei $Ma_b = 0.3$ (links), $Ma_b = 1.5$ (Mitte) und $Ma_b = 3.0$ (rechts).

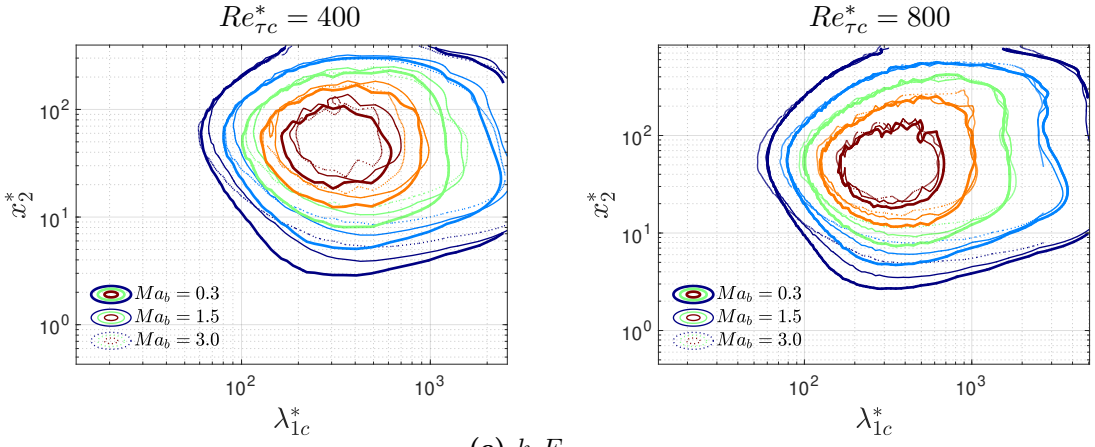
semilokal skalierten Wellenlänge λ_{1c}^* unter Verwendung der Dichte- und Viskositätswerte in der Kanalmitte. Durch die zusätzliche Mittelung in der Spannweitenrichtung ist ein präziserer Vergleich unter den verschiedenen Strömungskennzahlen möglich. Betrachtet man die Variation der Machzahl innerhalb der Plots in Abbildung 3.87, so fällt die Verschiebung der Konturlinien aller Komponenten zu höheren Werten vorwiegend im wandnormalen Bereich $x_2^* \leq 15$ auf. Die Abschwächung des Effekts mit zunehmender Reynoldszahl wird in Abbildung 3.88 deutlich, wo die verschiedenen Reynoldszahlen für feste Machzahlen direkt verglichen werden. Während bei der höheren Reynoldszahl die Bandbreite an Skalen zunimmt und die Wirbelstrukturen im Mittenbereich des Kanals an Bedeutung gewinnen, ist im zuvor thematisierten wandnahen Bereich für die höheren Machzahlen systematisch eine Verschiebung der Konturlinien zurück zu kleineren Wellenlängen mit der Erhöhung der Reynoldszahl verbunden.



(a) $k_1 E_{u_1' u_1'}$

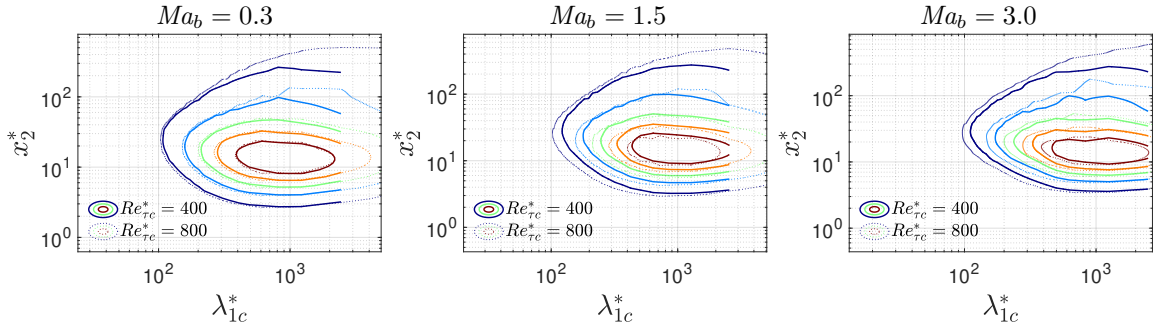


(b) $k_1 E_{u_2' u_2'}$

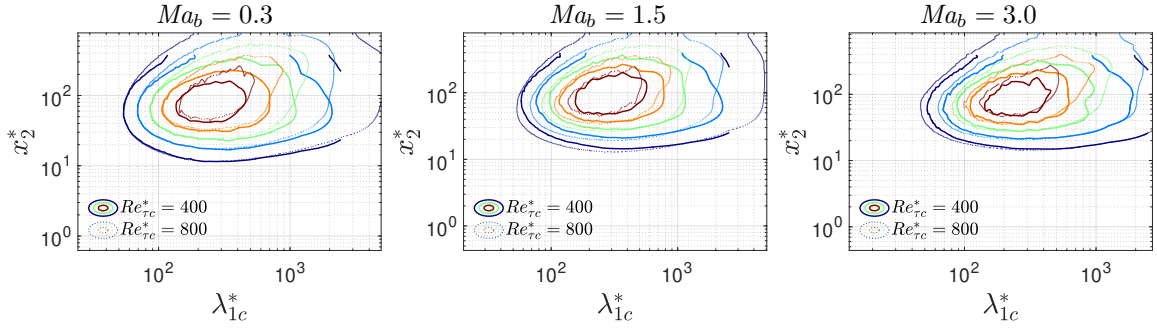


(c) $k_1 E_{u_3' u_3'}$

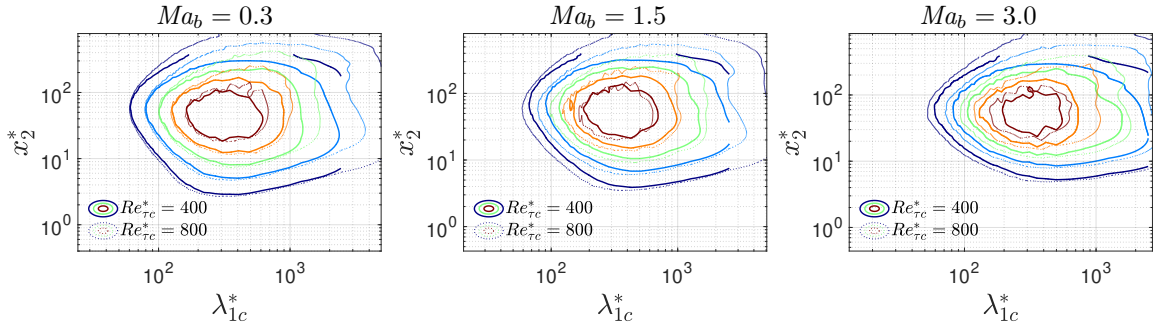
Abbildung 3.87: Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten eindimensionalen Energiespektren $k_1 E_{u_1' u_1'}$ (a), $k_1 E_{u_2' u_2'}$ (b), $k_1 E_{u_3' u_3'}$ (c) als Funktion von λ_{1c}^* und x_2^* (, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$). Variation der Machzahl bei $Re^*_{\tau c} = 400$ (links) und $Re^*_{\tau c} = 800$ (rechts).



(a) $k_1 E_{u_1' u_1'}$



(b) $k_1 E_{u_2' u_2'}$



(c) $k_1 E_{u_3' u_3'}$

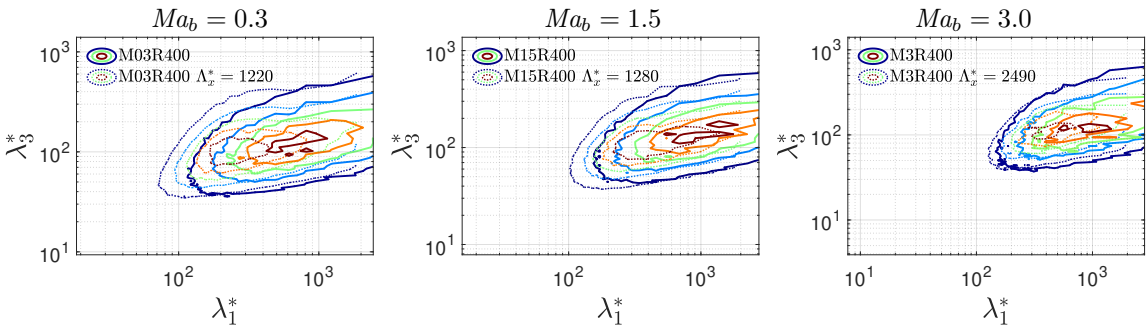
Abbildung 3.88: Abstandsgleiche Konturlinien der unbeeinflussten eindimensionalen Energiespektren $k_1 E_{u_1' u_1'}$ als Funktion von λ_{1c}^* und x_2^* (, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$). Variation der Reynoldszahl bei $Ma_b = 0.3$ (links), $Ma_b = 1.5$ (Mitte) und $Ma_b = 3.0$ (rechts).

3.9.2. Beeinflusste Fälle

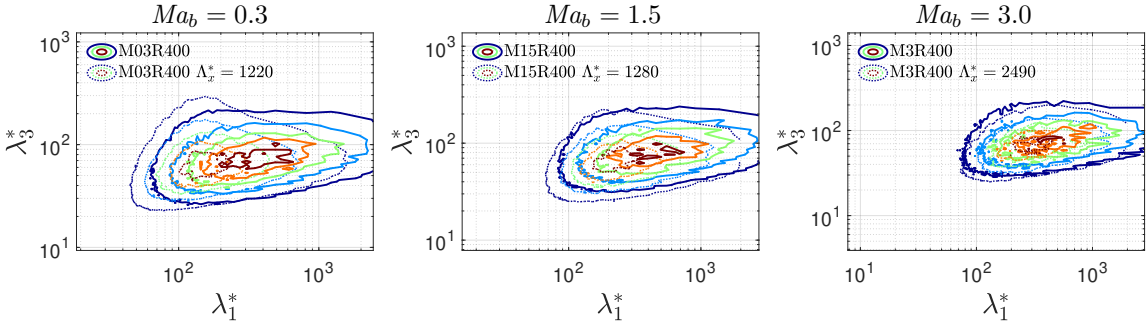
Der Einfluss der Wandoszillationen auf die Verteilung im Frequenzbereich wird im Folgenden am Beispiel der Konfigurationen M03R400, M15R400 und M3R400 demonstriert. Die Wellenlängen der zugehörigen betrachteten beeinflussten Fälle betragen $\Lambda_x^* = [1220\ 1280\ 2490]$ oder in äußeren Einheiten $\Lambda_x = [\pi\ \pi\ 2\pi]h$, was zugleich die optimalen Parameter bezüglich der Widerstandsreduktion sind. Der Quotient C_f/C_{f0}

aus dem Reibungskoeffizient der beeinflussten und unbeeinflussten Strömung beträgt 0.59, 0.55 und 0.53 in der Reihenfolge aufsteigender Machzahlen.

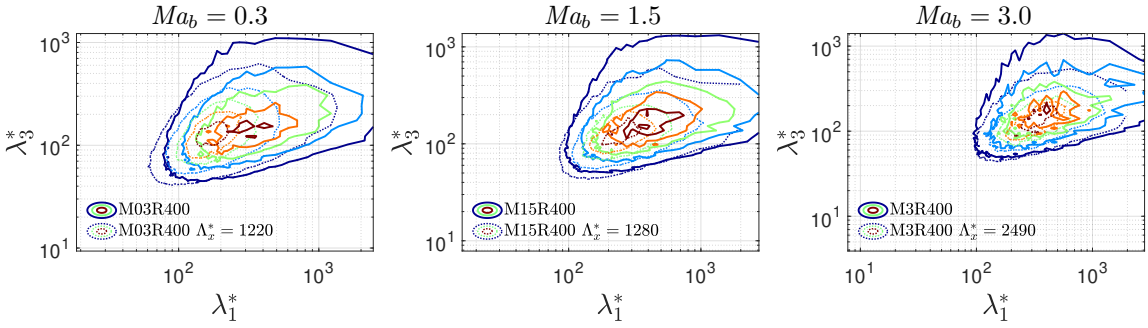
Abbildung 3.89 vergleicht die zweidimensionalen Energiespektren im Wandabstand $x_2^* = 20$. In der Stromabkomponente bewirkt die Wandoszillation eine Verschiebung hin zu kleineren Wellenlängen und damit eine Manipulation der energiereichen Streaks bis in die Übergangschicht. Für die Machzahlen $Ma_b = 0.3$ und $Ma_b = 1.5$ (Abbildung 3.89a links und Mitte) ist die verwendete Beeinflussungswellenlänge Λ_x^* in etwa gleich. In beiden beeinflussten Fällen ist die Verschiebung zu kleineren Wellenlängen deutlich ausgeprägt, wobei für die Machzahl 0.3 weiterhin ein definierter Peak existiert, der sich lediglich bei niedrigerer Wellenlänge befindet. Im Fall $Ma_b = 1.5$ erstrecken sich bereits die höchsten Konturlinien über einen weiten Wellenlängenbereich. Diese Aufweichung des sonst üblichen charakteristischen Peaks bei $\lambda_1^* \approx 700$, $\lambda_3^* \approx 100$ [42] deutet auf eine noch effektivere Abschwächung der Widerstandsgenerierung im Wandbereich hin, im Einklang mit dem niedrigeren Reibungskoeffizienten bei der höheren Machzahl. Es erfolgt eine Ausdehnung der ursprünglichen Konturlinien in den Bereich kleinerer Wellenlängen. Der Fall M3R400 (Abbildung 3.89a rechts) nutzt mit $\Lambda_x^* = 2490$ gegenüber $\Lambda_x^* = 1280$ ($Ma_b = 1.5$) und $\Lambda_x^* = 1220$ ($Ma_b = 0.3$) eine wesentlich größere Wellenlänge zur Erreichung der maximalen Widerstandsreduktion, dementsprechend fällt die Verschiebung hin zu kleineren Wellenlängen weniger deutlich aus. Bei der wandnormalen und spannweitigen Komponente (Abbildung 3.89b und 3.89c) ist ebenfalls eine Verschiebung der Konturlinien bezüglich λ_1^* zu beobachten, die bei der höchsten Machzahl weniger stark vorhanden ist. Zusätzlich variiert die Form der beeinflussten Spektren mit der Machzahl. Die wandnormale Komponente weist bei der Machzahl 0.3 einen ausgeprägten Anteil zweidimensionaler Isotropie auf, der sich mit steigender Machzahl auflöst, ähnlich wie schon für die unbeeinflussten Fälle im Wandabstand $x_2^* = 5$ gesehen (Abbildung 3.84b). Bei der spannweitigen Komponente kommt es zu einer Dämpfung im hohen Wellenlängenbereich durch die aufgeprägte Wandgeschwindigkeit, deren Einfluss im betrachteten Wandabstand $x_2^* = 20$ noch schwach spürbar ist. Die Wandgeschwindigkeit ist in x_3-Richtung konstant und wechselt das Vorzeichen in Abständen $\Delta x_1 = \Lambda_x/2$. Spannweitige Strukturen mit großen Abmessungen in den homogenen Richtungen x_1 und x_3 können sich daher in Wandnähe nur schwer ausbilden und die beeinflussten Spektren sind gegenüber den unbeeinflussten Fällen im Ausmaß kompakter.



(a) $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$



(b) $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$



(c) $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$

Abbildung 3.89: Abstandsgleiche Konturlinien der beeinflussten $(\cdots)$ und unbeeinflussten $(-)$ zweidimensionalen Energiespektren $k_1 k_3 E_{u_1' u_1'}$ (a), $k_1 k_3 E_{u_2' u_2'}$ (b), $k_1 k_3 E_{u_3' u_3'}$ (c) als Funktion von λ_1^* und λ_2^* im Wandabstand $x_2^* = 20$ (, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$).

3.10. Very large anisotropic scales

In wandgebundenen Strömungen kann bei ausreichend hoher Reynoldszahl separiert werden zwischen den in Abschnitt 3.7 diskutierten wandnahen Streaks und den um ein Vielfaches größeren äußeren kohärenten Wirbelstrukturen, die mit den äußeren Einheiten (hier die halbe Kanalhöhe h) skalieren. Letztere werden üblicherweise als Very Large Anisotropic Scales (VLAS) bezeichnet [42]. Sie ähneln in ihrem Ausse-

hen den Streaks in der Übergangsschicht und wachsen mit dem Wandabstand. In der Kanalströmung erreichen sie ihre maximale Intensität etwa bei $x_2 = h/2$ bei einer Länge von $2 - 5h$ in der Stromabrichtung und einer Breite in Spannweitenrichtung von der Ordnung der Kanalhöhe [42]. Der Begriff der Anisotropie bezieht sich in diesem Zusammenhang auf die ungleichen Abmessungen in Stromab- und Spannweitenrichtung bei festem Wandabstand, hervorgerufen durch die Scherung, analog zu den Streaks in der Übergangsschicht. Die VLAS sind charakterisiert durch geringe Geschwindigkeitsfluktuationen im Vergleich zur mittleren Scherung und können daher als quasi-linear betrachtet werden [82]. Abbildung 3.90 vermittelt einen Eindruck von der Gestalt der VLAS im Kanal.

Den wandnahen Wirbelstrukturen wurde bislang sehr viel mehr Aufmerksamkeit zuteil, weil dort die Produktion der turbulenten kinetischen Energie und die turbulente Intensität ihr Maximum haben. Die Existenz der großen Skalen wurde zunächst von Townsend [141] beschrieben und im Rahmen seiner Attached Eddy Hypothese als inaktiv, d.h. keine Reynoldsspannung hervorrufend, betrachtet. Diese Einschätzung neben der Tatsache, dass direkte numerische Simulationen noch kaum leistbar waren, führte zeitweise zu einer Vernachlässigung dieser Strömungsstrukturen. Um die Jahrtausendwende konnte durch Experimente z.B. von Kim & Adrian [89] mit turbulenter Rohrströmung und Sammlung von numerischen und experimentellen Daten durch Jiménez [82] jedoch gezeigt werden, dass die VLAS einen bedeutenden Anteil zu den Reynoldsspannungen beitragen. Die Analyse der Wechselwirkungen zwischen den äußeren und wandnahen Strukturen mithilfe des Attached Eddy Systems ist bis heute Gegenstand der Forschung (z.B. Deshpande et al. [44]). Die zugehörigen numerischen Simulationen sind dabei höchst aufwändig. Im Gegensatz zu den kohärenten Strukturen in Wandnähe existieren die VLAS sehr lange, da sie weniger von Viskosität beeinflusst sind. Eine entsprechend lange Mittelungsdauer ist notwendig um die Statistiken hinreichend genau zu erfassen. Zudem sind sehr große Rechengebiete erforderlich um die großen Abmessungen der VLAS vollständig abzubilden. Die Bedeutung der VLAS im Bezug auf den Anteil an den Reynoldsspannungen wächst mit der Reynoldszahl. Del Álamo & Jiménez [42] nutzten beispielsweise einen Kanal mit Reynoldszahl $Re_\tau = 550$ und Abmessungen $8\pi \times 4\pi$ in den homogenen Richtungen x_1 und x_3 zur Charakterisierung der Größe und des Ursprungs der VLAS. Noch höhere Reynoldszahlen erleichtern die Untersuchungen, da mit zunehmender Stärke der VLAS die Interaktionen mit der wandnahen Schicht stärker hervortreten. Hwang & Sung [78] zeigten in diesem Zusammenhang einen modulierenden Effekt, bei dem die großen kohärenten Strukturen in der äußeren Schicht den Wandwiderstand lokal beeinflussen. Sie nutzten dazu eine sich räumlich entwickelnde Grenzschicht mit der Reynoldszahl basierend auf der Impulsverlustdicke $Re_\theta = 109 - 3240$. Es stellte sich heraus, dass die wandnahen Wirbel im Bereich von darüberliegenden großskaligen Bereichen mit positiven Geschwindigkeitsfluktuationen intensiviert sind und im Bereich negativer großskaliger Geschwindigkeitsfluktuationen schwächer ausfallen. Nach einer geeigneten Aufspaltung des Wandwiderstandskoeffizienten zeigte

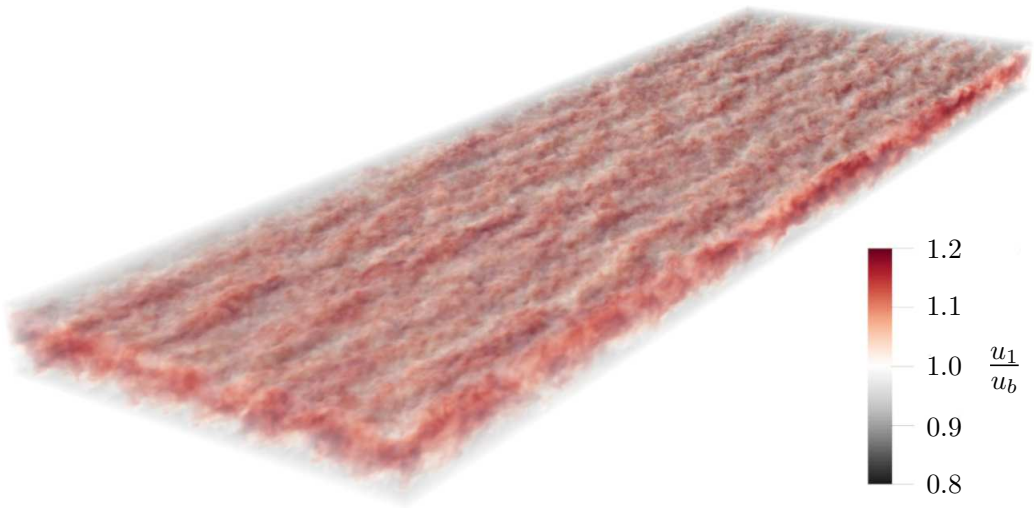


Abbildung 3.90: Volumendarstellung der Stromabgeschwindigkeit u_1, normiert mit der bulk Geschwindigkeit u_b, für das gesamte Strömungsgebiet der Konfiguration M03R800L.

sich, dass 15 % des dominanten Terms (Geschwindigkeits-Wirbelstärke Korrelation $\langle -w\omega_2 \rangle$) auf großskalige Geschwindigkeitsfluktuationen in Stromabrichtung ($u_l^+ > 2$) zurückgehen, die in Wandnähe kleinskalige Wirbelstrukturen anregen. Kasagi et al. [84] gingen dem Ursprung der großen Skalen auf den Grund. Ein Zusatzterm in deren Simulation verhinderte die Energieübertragung der mittleren Strömung auf die großskaligen Strukturen. Letztere verschwanden daraufhin komplett und ebenso die vielfach beobachtete Gruppierung der wandnahen Wirbel bevorzugt im Bereich großskaliger Strukturen mit niedriger Geschwindigkeit aufgrund der Advektion der großen Strukturen. Der direkte Energietransfer der mittleren Strömung auf die großskaligen Strukturen ist daher unerlässlich für deren Aufrechterhaltung [84]. Nutzt man den modulierenden Effekt der äußeren Strukturen zur Beschreibung der Wandregion, können mathematische Modelle entwickelt werden, die Statistiken der Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnähe voraussagen, rein anhand von Geschwindigkeitsmessungen in der logarithmischen Schicht [101]. Chandran et al. [27] sagten mithilfe dieser Modelle einen steigenden Beitrag der äußeren Strukturen auf die Intensität der Wandspannung $\overline{\tau_w^2}$ mit $\ln(Re_\tau)$ voraus, während der Beitrag der Strukturen, die mit inneren Wandgrößen skalieren, Re-invariant sind. Der Beitrag der Strukturen, die von Trägheitseffekten dominiert sind und mit äußeren Größen wie der halben Kanalhöhe h skalieren, steigt gemäß der verwendeten Modelle von 8 % bei $Re_\tau \approx 10^3$ auf ungefähr 35 % bei $Re_\tau \approx 10^6$ an. In Bezug auf Strömungsbeeinflussung stellt sich die Frage, inwiefern wandbasierte Verfahren bei hohen Reynoldszahlen noch in der Lage sind, den Widerstand zu reduzieren, wenn die Wandregion gegenüber den äußeren Strukturen fortlaufend an Bedeutung verliert. Einige Arbeiten zielen daher darauf

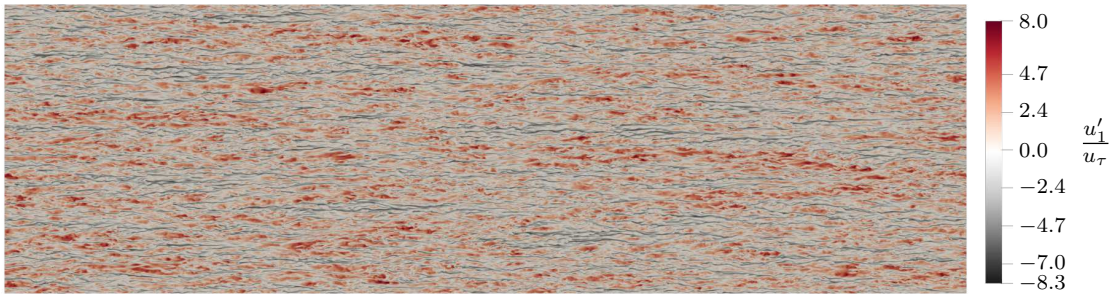
ab, die größeren äußeren Strukturen zu beeinflussen (z.B. [1, 5, 27, 44]), aber auch die Beeinflussung der wandnahen Strukturen macht bei sehr hohen Reynoldszahlen weiterhin Sinn. Kasagi et al. [84] leiteten dazu eine Beziehung zwischen der Widerstandsreduktionsrate und der Reynoldszahl der unbeeinflussten Strömung ab, unter der idealisierten Annahme, dass die Geschwindigkeitsfluktuationen in einer wandnahen Dämpfungsschicht komplett eliminiert werden. Sie nutzten als einzige empirische Formel

$$\frac{u_b}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln Re_\tau + F \tag{3.74}$$

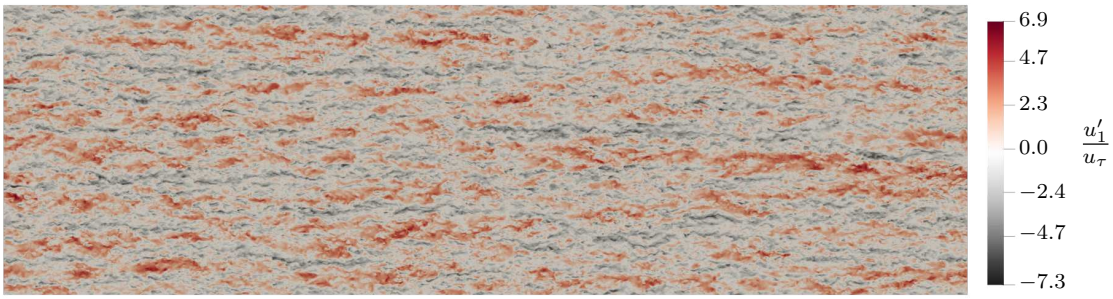
für die Abhängigkeit der bulk Geschwindigkeit von der Reynoldszahl. Es zeigte sich auf diese Weise nur eine schwache Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Für eine Dicke der Dämpfungsschicht von $y_d^+ = 10$ und eine Widerstandsreduktionsrate von 43 % bei $Re_\tau = 10^3$ ist bei einer Reynoldszahl von $Re_\tau = 10^5$ noch eine Rate von 35% zu erwarten [84]. Auch Gatti und Quadrio [60] kamen zu dem Schluss, dass die großen Strukturen, die durch Produktion von Reynoldsspannung in der äußeren Schicht zum turbulenten Reibungswiderstand beitragen, die Widerstandsreduktion durch wandbasierte Verfahren nicht direkt gefährden. Die Fokussierung auf die wandnahe Region als Ziel der Beeinflussung ist also auch bei sehr hohen realitätsnahen Reynoldszahlen weiterhin legitim. Bei den hier untersuchten Reynoldszahlen kommt es erst bei dem höchsten Wert $Re_{\tau c}^* = 800$ zu einem zweiten, äußeren Peak in dem Integranden von C_{f2}/C_f, dem Anteil am Wandreibungswiderstand aufgrund der turbulenten Fluktuationen (Abbildung 3.25). Dies deutet auf eine ausreichende Trennung der Skalen zwischen der wandnahen und äußeren Schicht hin. Daher soll der Einfluss der VLAS bei dieser Reynoldszahl unter Nutzung eines größeren Simulationsgebiets untersucht werden. In kompressibler Strömung kommt neben den zuvor erwähnten hohen Anforderungen bezüglich Gebietsgröße, Simulationsdauer und Reynoldszahl erschwerend hinzu, dass die lokale Reynoldszahl in Wandnähe im Vergleich zur entsprechenden Re_τ des inkompressiblen Pendants stark zunimmt und in gleicher Weise die Anforderungen an die Auflösung. Der Rechenaufwand ist in diesem Rahmen nur bei der Machzahl $Ma_b = 1.5$ vertretbar. Weiterhin wird ein Vergleichsfall bei der geringen Machzahl $Ma_b = 0.3$ benötigt, um mögliche Abweichungen aufgrund der Kompressibilität erkennen zu können. Die Parameter der unbeeinflussten Strömungen für die Fälle M03R800L und M15R800L unter Nutzung großer Rechengebiete sind in den Tabellen 3.1 und 3.2 aufgeführt. Zusätzlich wird für beide Machzahlen jeweils eine Simulation mit Strömungsbeeinflussung unter optimaler Beeinflussungswellenlänge durchgeführt, um die Auswirkungen der Wandoszillationen zu analysieren. Bei der nahezu inkompressiblen Strömung bei $Ma_b = 0.3$ kommen implizite Large-Eddy Simulationen zum Einsatz, deren Eignung für inkompressible Strömungen in Abschnitt 2.3.4 eingehend diskutiert wurde. Bei der höheren Machzahl $Ma_b = 1.5$ wird davon jedoch aus Stabilitätsgründen und der zusätzlichen Einflussnahme auf die thermodynamischen Größen durch die verringerte Auflösung abgesehen. Die Auflösung wurde in dem Fall M15R800L von der Simulation mit kleinerem Rechengebiet übernom-



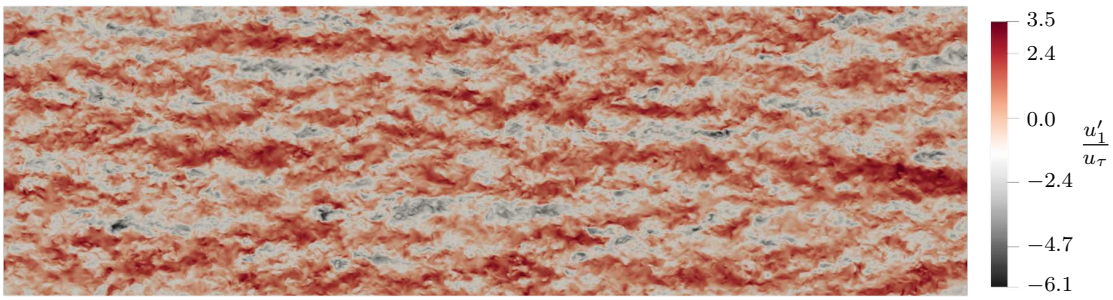
(a)



(b)



(c)

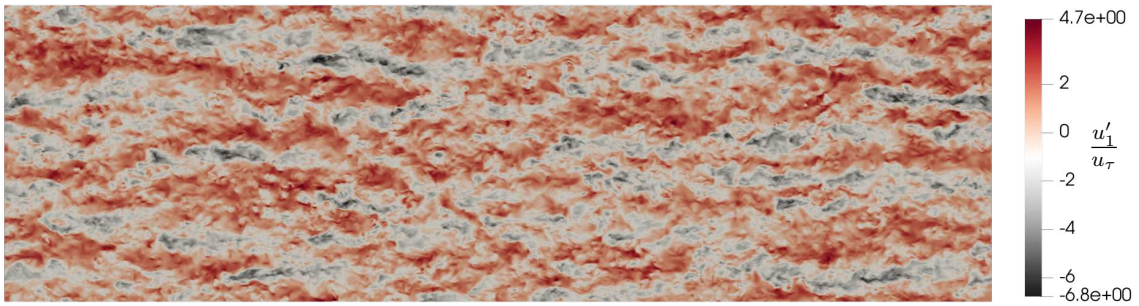


(d)

Abbildung 3.91: Instantane Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ, für die unbeeinflusste Strömung M15R800L im vergrößertem Rechengebiet $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [10\pi h, 3\pi h]$. (a) $x_2^* = 5$, (b) $x_2^* = 20$, (c) $x_2^* = 90$, (d) $x_2 = h/2$.



(a)



(b)

Abbildung 3.92: (a) Visualisierung der Wirbelstrukturen in der wandparallelen Ebene bei $x_2^* = 5$ mithilfe der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors Q; (b) Instantane Fluktuationen von u_1, normiert mit u_τ bei $x_2 = h/2$ für den beeinflussten Fall M15R800L mit $\Lambda_x^* = 1265$.

men und die Gebietsgröße mit $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [10\pi h, 3\pi h]$ stattdessen etwas kleiner als bei der Machzahl $Ma_b = 0.3$ ($[L_{x_1}, L_{x_3}] = [12\pi h, 4\pi h]$) gewählt. Anhand der supersonischen unbeeinflussten Strömung M15R800L wird in Abbildung 3.91 mithilfe von Schnitten in verschiedenen Wandabständen die Bandbreite an Skalen bei dieser Reynoldszahl demonstriert. Die Abmessungen der Streaks wachsen mit zunehmendem Wandabstand kontinuierlich an. Wie schon in Abschnitt 3.7.2 für die regulären Gebietsgrößen gesehen, ist die wandnahe Strömung besonders im beeinflussten Fall stark von den darüberliegenden großen Skalen geprägt. Diese werden im vergrößerten Rechengebiet nun vollständig erfasst. Abbildung 3.92a visualisiert die kleinen wandnahen Wirbelstrukturen des Falls M15R800L mit Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x^* = 1265$ mithilfe der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors Q. Die Wirbel gruppieren sich zusammen und formen größere Cluster. Durch Vergleich mit den Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung an der äußeren Position $x_2 = h/2$ (Abbildung 3.92b) lässt sich eine gute Übereinstimmung der Abmessungen dieser Cluster mit den äußeren Bereichen positiver und negativer Geschwindigkeitsfluktuationen erkennen. Um Änderungen in den äußeren Strukturen unter den verschiedenen Strömungsbedingungen aufzudecken wird erneut der Para-

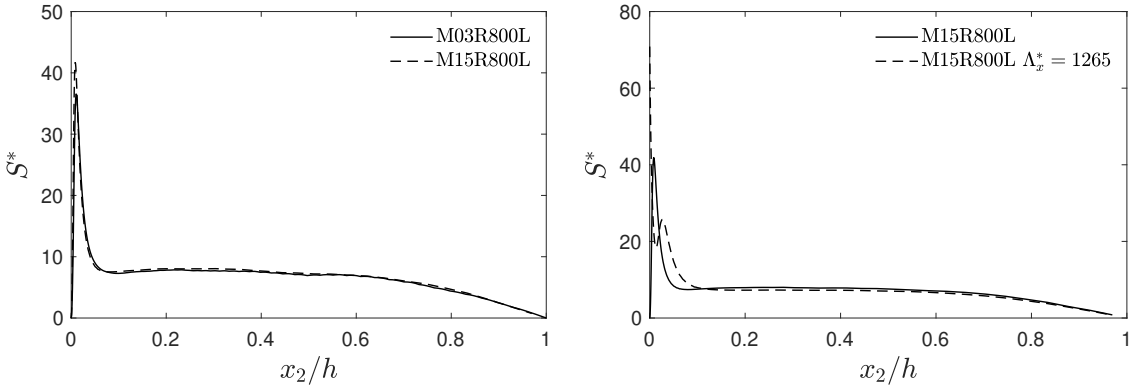


Abbildung 3.93: Parameter der Scherrate S^* über der wandnormalen Koordinate. (a) Vergleich der unbeeinflussten Strömungen M03R800L und M15R800L; (b) Vergleich der beeinflussten und unbeeinflussten Strömungen der Konfiguration M15R800L.

meter der Scherrate aus Abschnitt 3.7 benutzt. Im Gegensatz zum unmittelbaren Wandbereich kommt es zu keinem nennenswerten Unterschied im äußeren Bereich zwischen den Kurven der unbeeinflussten Strömungen bei $Ma_b = 0.3$ und $Ma_b = 1.5$ (Abbildung 3.93a). Yao & Hussain [155] führten ebenfalls numerische Simulationen in kompressibler Kanalströmung bis zu einer Machzahl von $Ma_b = 1.5$ durch, deren Reynoldszahl $Re^*_{\tau c} = 1266$ und Gebietsgröße $L_x \times L_y \times L_z = 6\pi h \times 2h \times 2\pi h$ die Untersuchung der äußeren Strukturen erlaubten. Auch dort zeigte sich gute Übereinstimmung bezüglich deren Längenskalen in kompressibler und inkompressibler Strömung. In Abbildung 3.93b wird die beeinflusste Strömung mit der unbeeinflussten Strömung verglichen. Durch die Beeinflussung ergeben sich hohe Werte des Scherratenparameters in der viskosen Unterschicht, wo die Kohärenz der Wirbelstrukturen durch das aufgeprägte sinusförmige Muster der Wandbewegungen stark erhöht wird. Ab ungefähr $x_2^* = 10$ nimmt die Kurve der beeinflussten Strömung wieder den von der unbeeinflussten Strömung bekannten Verlauf an, der durch die Aufdickung der viskosen Schicht in der Übergangsschicht nach außen verschoben ist. Auch durch die Beeinflussung kommt es also zu keinem veränderten Verhältnis der Zeitmaße der turbulenten Wirbel und der mittleren Scherrate im äußeren Bereich, sodass sich an den grundlegenden Eigenschaften der Wirbelstrukturen dort nichts ändert. Vielmehr ändert sich deren relativer Energiegehalt, wie eine Analyse der Energiespektren nachfolgend zeigen wird.

Die eindimensionalen Energiespektren $k_1 E_{u'_1 u'_1}(\lambda^*_{1c}, x_2^*)$ und $k_1 |E_{u'_1 u'_2}|(\lambda^*_{1c}, x_2^*)$ sind in Abbildung 3.94 über der Stromabwellenlänge und dem Wandabstand aufgetragen, um einen Eindruck von den Dimensionen der verschiedenen Strukturen innerhalb des Kanals zu bekommen. Gute Übereinstimmung in den Konturlinien der unbeeinflussten kompressiblen und der nahezu inkompressiblen Strömung bestätigen die Ergeb-

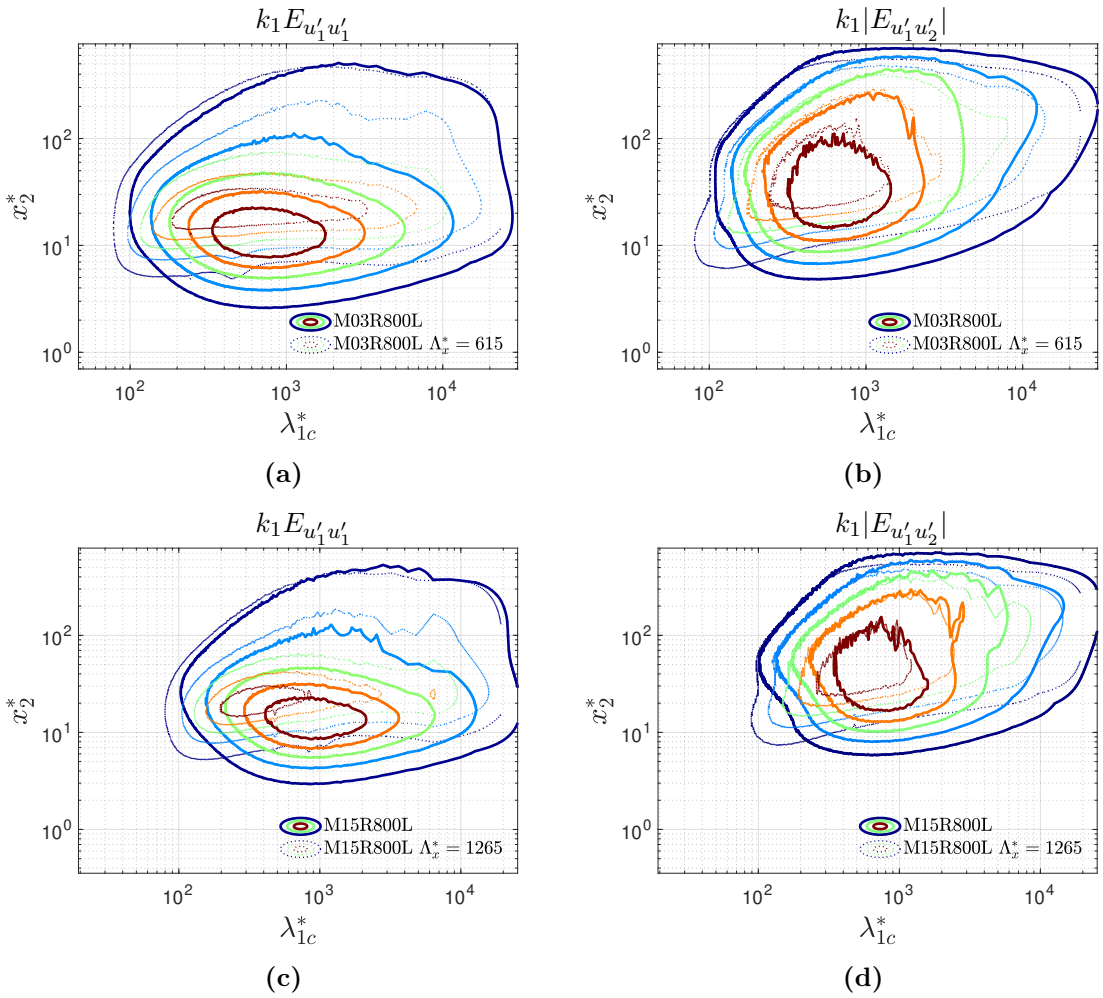


Abbildung 3.94: Linear verteilte Konturlinien der eindimensionalen Energiespektren $k_1 E_{u_1' u_1'}(\lambda_{1c}^*, x_2^*)$ (a,c) und $k_1 |E_{u_1' u_2'}|(\lambda_{1c}^*, x_2^*)$ (b,d) der Konfigurationen M03R800L (a,b) und M15R800L (c,d) jeweils für die beeinflusste und unbeeinflusste Strömung (, $0.17 < \Phi_{ij}^E / \|\Phi_{ij}^E\|_\infty < 0.84$).

nisse basierend auf dem Scherratenparameter und der Literatur (Yao und Hussain [155]), dass die äußeren Strukturen im untersuchten Mach- und Reynoldszahlbereich nicht durch Kompressibilität modifiziert werden. Gleiches gilt auch für den Einfluss der Wandoszillationen auf die Normalenspektren $k_1 E_{u_1' u_1'}$ (Abbildungen 3.94a und 3.94c). Dort sind die dunkelblauen, niedrigsten Konturlinien für große Wandabstände deckungsgleich. Die äußeren Wirbelstrukturen setzen sich somit aus dem gleichen Wellenlängenbereich zusammen. Der Einfluss der Wandoszillationen ist erwartungsgemäß in unmittelbarer Wandnähe am stärksten, wo die Geschwindigkeitsfluktuationen vollständig eliminiert werden. Die Konturlinien aller gezeigter Spektren sind daher im Wandbereich stark nach oben verschoben und abgeflacht. Zudem erfahren sie eine

Ausdehnung hin zu kleineren Wellenlängen. Die Verschiebung zu größeren Wandabständen hält bei den Normalenspektren bis in die logarithmische Schicht an. In dem Normalensprektrum der Machzahl $Ma_b = 0.3$ (Abbildung 3.94a) zeigt sich bereits in der höchsten Konturebene (dunkelrot) ein deutlich vergrößerter Wellenlängenbereich gegenüber der unbeeinflussten Strömung. Der typische Peak bei $\lambda_{1c}^* \approx 700$, der die Länge der Streaks kennzeichnet [42] ist deutlich aufgeweicht, was auf eine effektive Manipulation der turbulenzgenerierenden Mechanismen hindeutet. Die Konfiguration M15R800L besitzt eine optimale Beeinflussungswellenlänge, die gegenüber der Strömung mit Machzahl $Ma_b = 0.3$ rund doppelt so groß ist und reduziert den Widerstand mit 41 % gegenüber 38 % im Fall $Ma_b = 0.3$ noch effektiver. Größere Wellenlängen werden im Normalenspektrum dementsprechend stärker gedämpft (Abbildung 3.94c), sodass sich die energiereichsten Streaks bei $x_2^* \approx 20$ verglichen mit dem unbeeinflussten Fall aus kleineren Wellenlängen zusammensetzen. Die Strukturen werden durch die Wandoszillationen am weiteren Wachstum gehindert. Bereits in der zweithöchsten Konturlinie (orange) machen sich die VLAS bemerkbar mit einem Peak bei $\lambda_{1c}^* \approx 6000$. Bei den Kospektren (Abbildungen 3.94b und 3.94d) sind die Unterschiede aufgrund verschiedener Beeinflussungswellenlängen weitaus weniger stark. Das Kospektrum steht in Zusammenhang mit der Produktion turbulenter kinetischer Energie, da das Integral die Reynoldsspannung $\overline{u_1' u_2'}$ liefert. Die Konturlinien der beeinflussten und unbeeinflussten Fälle zeigen bessere Übereinstimmung als in den Normalenspektren mit nur einer kleinen Ausdehnung der beeinflussten mittleren Konturlinien in den Bereich größerer Wellenlängen. Die äußeren Strukturen tragen daher in der beeinflussten Strömung nicht verhältnismäßig viel stärker zur Reynoldsscherspannung bei. In Wandnähe tragen vermehrt kleinere Wirbel zur Reynoldsspannung bei, die in der unbeeinflussten Strömung aufgrund der Dominanz der energiereichen Streaks in der Übergangsschicht untergehen.

Ein klareres Bild bezüglich Frequenz- und Energiegehalt liefert die Auftragung der beeinflussten und unbeeinflussten Spektren in Stromabrichtung bei verschiedenen Wandabständen in Abbildung 3.95. Die Spektren sind sowohl mit der jeweiligen Fläche unter der Kurve normiert (a,c), um den relativen Beitrag verschiedener Frequenzen herauszustellen, als auch mit der Fläche der unbeeinflussten Strömung (b,d), um den Energieverlust der Wirbelstrukturen im beeinflussten Fall sichtbar zu machen. In den Kurven der beeinflussten Strömungen bei $x_2^* = 5$ sind Peaks auffällig, die von der Beeinflussungswellenlänge und deren Hälfte stammen (Abbildungen 3.95a und 3.95c). Bei der supersonischen Strömung (Abbildung 3.95c) sind die Peaks sogar noch bis $x_2^* = 20$ zu sehen, aufgrund der effizienteren Beeinflussung bei dieser Konfiguration und der dickeren spannweitigen Geschwindigkeitsschicht verbunden mit der größeren verwendeten Beeinflussungswellenlänge. Wie schon in Abbildung 3.94 gesehen, sind die Kurven der beeinflussten Strömungen für geringe Wandabstände nach links verschoben. Kleinere Wellenlänge tragen verhältnismäßig stärker zur Energie der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung bei, aufgrund der Dämpfung mittlerer Wellenlängen durch die Beeinflussung. Die äußeren Strukturen machen sich be-

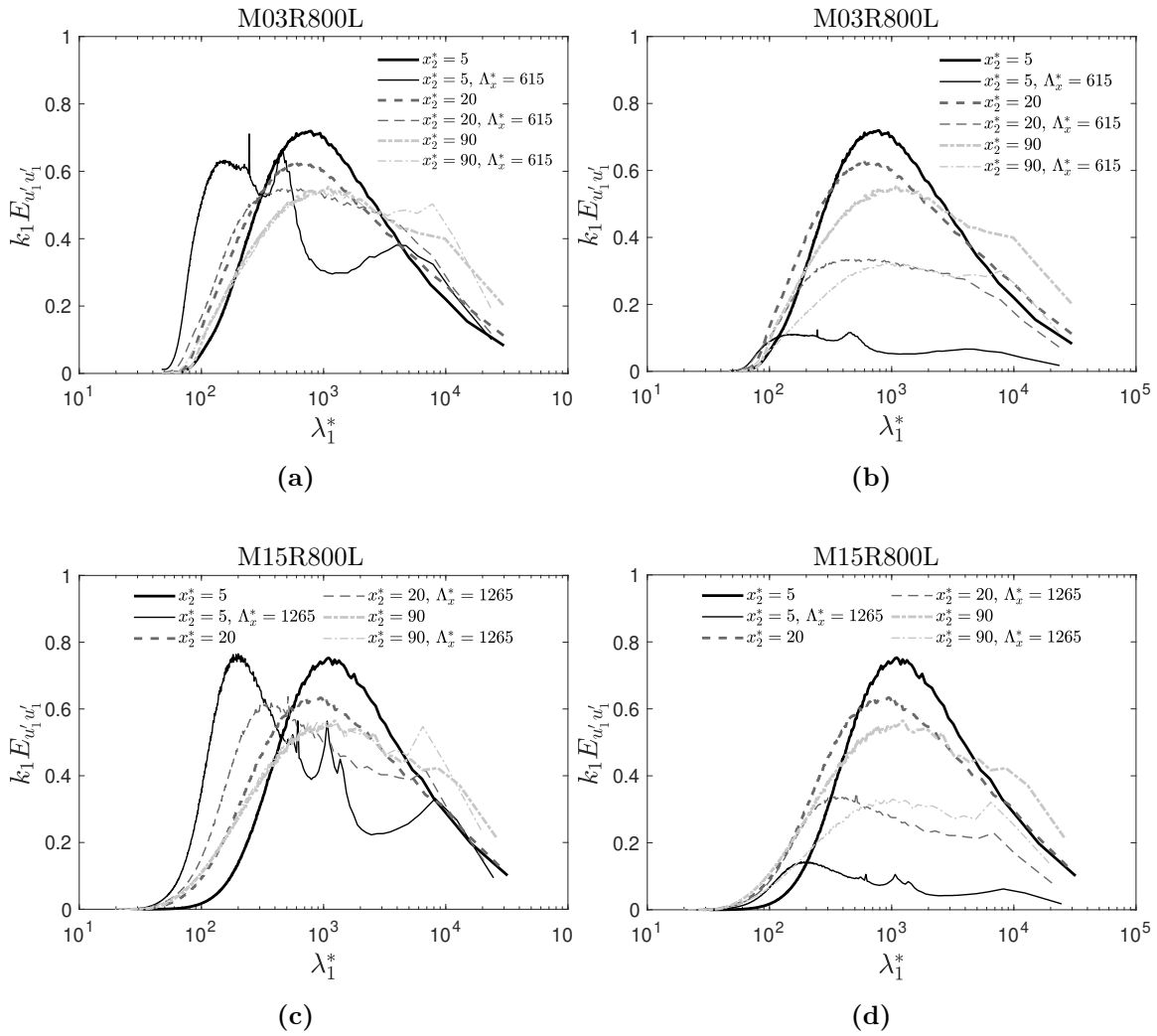


Abbildung 3.95: Eindimensionalen Energiespektren $k_1 E_{u_1' u_1'}(\lambda_1^*)$ bei drei verschiedenen Wandabständen $x_2^* = 5$, $x_2^* = 20$ und $x_2^* = 90$. (a,c): normiert auf die Einheitsfläche um den Frequenzgehalt hervorzuheben, (b,d): normiert mit der Fläche der unbeeinflussten Strömung um die relative Energieabnahme im beeinflussten Fall hervorzuheben. (a,b): M03R800L, (c,d): M15R800L

reits bei $x_2^* = 5$ als lokales Maximum deutlich bemerkbar. Bei $x_2^* = 90$ nähert sich der Verlauf der beeinflussten Strömungen wieder dem der unbeeinflussten an, wobei ein Peak bei $\lambda_1^* = 10^4$ im beeinflussten Fall deutlich hervortritt und auf einen verhältnismäßig hohen Energiebeitrag der VLAS hindeutet. Die Normierung der Kurven mit der Fläche der jeweiligen unbeeinflussten Strömung in den Abbildungen 3.95b und 3.95d macht deutlich wie der Energiegehalt von Strukturen der Länge λ_1 abnimmt infolge der Strömungsbeeinflussung. Eine Abnahme in allen Wellenlängen größer als circa die halbe Beeinflussungswellenlänge ist für alle Wandabstände sichtbar. Die unterschied-

liche Normierung zeigt, dass es auf die Sichtweise ankommt. Die VLAS sind definitiv dominanter in der beeinflussten Strömung als in der unbeeinflussten Strömung. Sie werden allerdings nicht verstärkt durch die Beeinflussung. Im Gegenteil, deren Energiegehalt nimmt ab, jedoch verhältnismäßig weniger stark als kleine und mittlere Wellenlängen. Durch die verhältnismäßig starke Dämpfung der wandnahen Streaks treten die VLAS und deren modulierender Effekt, wie beispielsweise in Abbildung 3.92 gesehen, viel stärker auf als in der entsprechenden unbeeinflussten Strömung, obwohl deren Energiegehalt in der unbeeinflussten Strömung höher ist. Die Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit Deshpande et al. [44], die eine verstärkte Kommunikation zwischen den inneren und äußeren Skalen in widerstandsreduzierter Strömung durch Wandoszillationen feststellten. Ausgangspunkt war eine Zeitreihe der Geschwindigkeitsfluktuationen in Stromabrichtung durch einen Hitzdraht in einer Grenzschicht im Wandabstand $4.5 \lesssim x_2^+ \lesssim 6$, die anschließend in Fourier-Moden zerlegt wurde. Es wurde dann zwischen inneren Beiträgen $u_i = u(T^+ \lesssim 350)$ und äußeren Beiträgen $u_o = u(T^+ \gtrsim 350)$ zu den Geschwindigkeitsfluktuation unterschieden. Die Reduktion von intensiven $-u_i$ Ereignissen war begleitet durch eine Reduktion von auch extremen $-u_o$ und $+u_o$ Ereignissen. Darüber hinaus nahm die durchschnittliche Phasendifferenz zwischen u_i und u_o ab. Der Effekt der verstärkten Kopplung von inneren und äußeren Skalen korrelierte sowohl mit der Widerstandsreduktionsrate in beeinflusster Strömung, als auch mit Re_τ in unbeeinflusster Strömung [44].

3.11. Zusammenfassung

Um den Einfluss kompressibler Strömungsbedingungen auf die Effizienz der Widerstandsreduktion durch transversale Wandgeschwindigkeit in Kanalströmungen zu untersuchen wurden mehrere Simulationen mit sorgfältig ausgesuchten Parameterkombinationen durchgeführt. Der Vergleich der unbeeinflussten Fälle untereinander erfolgt bei konstanter semilokaler Reynoldszahl in der Kanalmitte nach der Transformation von Trettel und Larsson [142], die für kompressible Kanalströmungen eine gute Übereinstimmung der turbulenten Spannungen und mittleren Geschwindigkeit bei unterschiedlichen Machzahlen liefert [104]. Mit zunehmender Machzahl ergeben sich starke Variationen der mittleren Temperatur, Dichte und Viskosität über der wandnormalen Koordinate. Die Anisotropie der turbulenten Spannungen nimmt zu, verbunden mit einer geringeren Druckscherkorrelation nahe der Wand. Die Streaks in der Übergangsschicht weisen eine gesteigerte Kohärenz auf und in der viskosen Unterschicht kommt es trotz semilokaler Skalierung zu vergrößerten Längenskalen durch den starken nicht-lokalen Einfluss der turbulenten Strukturen in der Übergangsschicht auf die wandnahe Region [112].
Dieselben Effekte finden sich in ausgeprägter Weise auch in den beeinflussten Strömungen wieder, was dazu führt, dass gegenüber der inkompressiblen Strömung eine höhere Widerstandsreduktion möglich ist ($\mathcal{DR} = 47\,\%$ bei $Ma_b = 3.0$ und

$Re^*_{\tau c} = 400$ gegenüber $\mathcal{DR} = 41\,\%$ bei $Ma_b = 0.3$ und $Re^*_{\tau c} = 400$). Durch die Strömungsbeeinflussung kommt es für den Großteil der Bilanzterme der Reynoldsspannungen allgemein zu einer Abnahme über den gesamten Kanal hinweg. Vor allem die Maxima in Wandnähe werden stark gedämpft. Insbesondere die niedrige Dissipation in Spannweitenrichtung bei den supersonischen Strömungen führt zu einer geringen benötigten Leistung um die Strömungsbeeinflussung gegen den viskosen Widerstand aufrecht zu erhalten. Daneben sinkt der turbulente Transport in Spannweitenrichtung mit der Machzahl. Die spektrale Orthogonalbasiszerlegung (SPOD) offenbarte durchweg weniger Energie in den höherfrequenten kohärenten Strukturen der supersonischen beeinflussten Strömung im Vergleich zum beeinflussten inkompressiblen Fall. Für eine optimale Beeinflussung hinsichtlich größtmöglicher Widerstandsreduktion ist mit zunehmender Machzahl eine größere Beeinflussungswellenlänge nötig ($\Lambda^*_x = \Lambda_x/\delta^*_\nu(h) = 2488$ bei $Ma_b = 3.0$ und $Re^*_{\tau c} = 400$ gegenüber $\Lambda^*_x = 1217$ bei $Ma_b = 0.3$ und $Re^*_{\tau c} = 400$).
Die Unterschiede in der Widerstandsreduktion bei verschiedenen Machzahlen werden allerdings mit zunehmender Reynoldszahl $Re^*_{\tau c}$ geringer. Analog schwächen sich in den unbeeinflussten Strömungen die Unterschiede in der Anisotropie der turbulenten Spannungen ab, sowie auch die Unterschiede in den Energiespektren der Geschwindigkeitsfluktuationen im wandnahen Bereich. Der Rückgang der Kompressibilitätseffekte mit steigender Reynoldszahl erklärt sich beispielsweise durch die Abnahme der Schubspannungsmachzahl Ma_τ als Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte und des Wandwärmeübergangskoeffizienten in den entsprechenden unbeeinflussten Strömungen.
Zwei Strömungskonfigurationen mit Machzahlen $Ma_b = 0.3$ und $Ma_b = 3$ wurden bei $Re^*_{\tau c} = 800$ in einem deutlich vergrößertem Rechengebiet untersucht. Durch die hohe Widerstandsreduktion von 41 % im supersonischen Fall machen sich die äußeren *very large anisotropic scales* (VLAS) bereits in Wandnähe durch einen Peak bei den entsprechend großen Wellenlängen im Energiespektrum der Geschwindigkeitsfluktuation in Strömungsrichtung bemerkbar. Deren Energiegehalt nimmt verglichen mit den kleinen und mittleren Wellenlängen verbunden mit den wandnahen Strukturen weniger stark ab. Die VLAS und deren modulierender Effekt in Wandnähe treten daher in der beeinflussten Strömung besonders stark auf, insbesondere im supersonischen Fall durch die gesteigerte Effizienz der Strömungsbeeinflussung.

4. Kanalströmungen mit Kühlterm

Grundsätzlich wird zwischen zwei Arten von Kompressibilitätseffekten unterschieden. Zum Einen existieren Effekte der variablen Fluideigenschaften (auch variable-Dichte-Effekte), die durch Wärmetransport hervorgerufen sind, und zum Anderen intrinsische (auch "wahre" oder "echte") Kompressibilitätseffekte aufgrund von Volumenänderungen des Fluids bzw. Schwankungen der Dilatation durch Druckschwankungen [54, 28]. Effekte aufgrund der variablen Fluideigenschaften drücken sich sowohl durch Variationen in den mittleren Größen Temperatur, Dichte und Viskosität aus, als auch in Fluktuationen der Dichte aufgrund von Änderungen der Entropie [28, 98]. Sie können in den zuvor betrachteten kompressiblen Kanalströmungen mit isothermen Wänden eher als Begleiterscheinung betrachtet werden, hervorgerufen durch den hohen Wärmetransports aufgrund der Wandkühlung um höhere Machzahlen zu ermöglichen. Prinzipiell können diese Effekte bei jeder beliebigen Machzahl bedeutend sein, wenn, aus welchen Gründen auch immer, Wärmetransport eine große Rolle spielt. Intrinsische Kompressibilitätseffekte sind dagegen unmittelbare Konsequenz der (turbulenten) Machzahl und werden umso wichtiger, je höher diese ist. Das gleichzeitige Auftreten dieser zwei Arten von Kompressibilitätseffekten erschwert den Vergleich bei variierenden Strömungsparametern, wie z.B. unterschiedlicher Machzahlen und Wandwärmeflüssen. Die individuellen Effekte dieser Parameter sind immer noch nicht vollständig verstanden [35].

Für die große Mehrheit der Arbeiten bezüglich kompressibler Kanalströmungen im hier untersuchten Machzahlbereich wurde stets angenommen, dass die Morkovin-Hypothese [107] gilt (z.B. Huang et al. [74], Brun et al. [25]). Die These besagt, dass Änderungen im Fluidvolumen durch Entropie und Druck vernachlässigbar sind, und daher nur Variationen der mittleren Größen bedeutend sind. Zerlegt man Kompressibilitätseffekte in Beiträge aufgrund der Wirbel, Akustik und Entropie [91], ist nach der Hypothese in nicht-hypersonischen Grenzschichten ($Ma \leq 5$) die akustische Mode vernachlässigbar ($p_{\mathrm{rms}} \ll \overline{p}$) und die entropische Mode klein ($T_{t_{\mathrm{rms}}} \ll \overline{T_t}$) [24], wobei T_t die totale Temperatur bezeichnet. Unter diesen Bedingungen beeinflusst Kompressibilität im Wesentlichen die großen Skalen der turbulenten Strömung durch eine Kopplung zwischen dem akustischen und dem thermischen Feld [25]. Die

Kopplung bedingt die Analogie des Geschwindigkeits- und Temperaturfelds, bekannt als Reynoldsanalogie [25]. Bradshaw [24] untersuchte die Hypothese später im Detail und lieferte die Abschätzung, dass die Hypothese gültig ist für Dichtefluktuationen geringer als 10 % bezogen auf die mittlere Dichte. Dichtefluktuationen werden in kompressiblen Kanalströmungen mit isothermen Wänden größtenteils aus Gradienten der mittleren Dichte hervorgerufen. Da die Morkovin-Hypothese aber sowohl Gradienten der mittleren Dichte als auch Fluktuationen, die daraus resultieren, implizit als klein annimmt, kann die Dichte-RMS kein schlüssiger Indikator für die Gültigkeit der Hypothese sein [72]. Coleman et al. [36] legten daher nahe, wie ursprünglich RMS-Werte des Drucks und der totalen Temperatur normiert mit den jeweiligen mittleren Größen als Indikator für Morkovins Hypothese heranzuziehen. Druckfluktuationen normiert mit dem mittleren Druck werden in der Tat als direktes Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte benutzt (z.B. Hasan et al. [72]). Uneinigkeit besteht jedoch darin, warum Fluktuationen der totalen Temperatur klein sein sollen, damit die Hypothese gültig ist [72]. Wenn auch für viele Strömungsfälle anerkannt, wurden auch immer wieder Verletzungen der Morkovin-Hypothese dokumentiert. Morinishi et al. [105] stellten für kompressible Kanalströmungen mit adiabaten und isothermen Wänden fest, dass die Morkovin-Hypothese nicht auf das wandnahe asymptotische Verhalten der wandnormalen turbulenten Intensität anwendbar ist. Bezüglich des Korrelationskoeffizienten zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen gab es ebenfalls Unterschiede zur inkompressiblen Strömung, die nicht auf Variable-Dichte-Effekte zurückzuführen waren [105]. Änderungen im asymptotischen Wandverhalten konnten jüngst von Baranwal et al. [9] bestätigt werden. In kompressibler Kanalströmung mit gekühlten isothermen Wänden und einer hoch aufgelösten Wandregion erhöhten sie die Machzahl in der Kanalmitte von 0.2 auf 2.2. Es zeigte sich, dass die turbulenten Spannungen, die mindestens eine wandnormale Geschwindigkeitskomponente enthalten, kein universelles Verhalten bezüglich der Machzahl aufweisen, sowohl bei Normierung mit Wandgrößen, als auch mit semilokalen Größen. Als Grund hierfür wurde verstärkte Dilatation an der Wand genannt. Die Level der Dilatation an der Wand sind darüber hinaus abhängig von der thermischen Wandrandbedingung [152, 160]. Gerade die turbulente Spannung $R_{u_1u_2}$ zeigte sich sensitiv gegenüber Änderungen der Machzahl oder der thermischen Wandrandbedingung, was mit einer Dekorrelation zwischen u_1' und u_2' in Verbindung gebracht wurde bei einer Erhöhung der Machzahl in der Kanalmitte oder einem Wechsel der Wandbedingung von isotherm auf adiabat [10].

Nutzt man, abgesehen von der Morkovin-Hypothese, andere Indikatoren, wie etwa die turbulente Machzahl oder die Gradientenmachzahl, definiert als $M_g = \frac{l_u}{\overline{c}} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_2}$ mit der Mischungslänge $l_u = \kappa x_2$, so kann für die hier untersuchten Strömungsbedingungen festgehalten werden, dass Kompressibilitätseffekte aufgrund der variablen Dichte und Viskosität gegenüber intrinsischen Kompressibilitätseffekten klar dominieren [51]. Betrachtet man weiterhin die Quellterme der normierten Divergenz der Geschwindigkeitsfluktuationen, zeigt sich ein Beitrag der Dissipationsterme mit $\propto M_t^2$

und des Wärmeleitungsterms mit $\propto (T'/\overline{T})/Re_\tau$ [51, 136]. Da sowohl die turbulente Machzahl, als auch die Temperaturfluktuationen bezogen auf die mittlere Temperatur für die zuvor betrachteten Strömungskonfigurationen klein sind, ergeben sich sehr kleine Divergenz-Fluktuationen. Ebenso ist die Druckdilatation für kompressible Kanalströmungen bis $M = 3$ nicht von Bedeutung [74]. Die Dominanz der Effekte der variablen Fluideigenschaften zeigt sich auch in der guten Wirksamkeit der semilokalen Skalierung [111], deren Annahmen auf der Morkovin-Hypothese basieren. Auch die in Abschnitt 3.3.1 vorgestellten Geschwindigkeitstransformationen nach van Driest und Trettel & Larsson sind in der Lage, den überwiegenden Teil der Abweichungen gegenüber inkompressibler Strömung auszugleichen, bloß durch Berücksichtigung der variablen Fluideigenschaften.

Trotz der Effektivität der oben beschriebenen Transformationen wurden einige Dinge in verschiedenen Arbeiten immer wieder auffällig, wie das zunehmende Maximum der Stromabkomponente der turbulenten Spannungen (z.B. [52, 104, 49, 34]). Lange konnte man sich den Effekt nicht erklären oder brachte ihn mit den variablen Fluideigenschaften in Verbindung, obwohl die Morkovin-Skalierung der turbulenten Spannungen diese eigentlich voll berücksichtigen sollte. Hasan et al. [72] konnten schließlich zeigen, dass intrinsische Kompressibilitätseffekte eine zentrale Rolle spielen bei der Stärkung des Peaks, indem sie kompressible Kanalströmungen mit bulk Machzahlen von 0.3 bis 4 betrachteten, die quasi frei von Effekten aufgrund variabler Fluideigenschaften waren. Erreicht wurde dies durch einen zusätzlichen Senkenterm in der Energiegleichung $\Psi = \tau_{ij}\,\partial u_i/\partial x_j$, welcher dem Effekt der viskosen Dissipation entgegenwirkt. Neben dem deutlich wachsenden Peak der Stromabkomponente der turbulenten Spannungen zeigte sich auch eine leichte Abnahme in den Profilen der wandnormalen und spannweitigen turbulenten Spannungen. Das Profil der wandnormalen Komponente erfährt zudem eine Verschiebung nach außen (zu größeren Wandabständen), was sich unmittelbar in einer Verschiebung des Profils der turbulenten Scherspannung nach außen äußert. Da die gesamte Scherspannung, die sich als Summe aus viskoser und turbulenter Spannung ergibt, für alle untersuchten Fälle universell war, hat die Verschiebung in der turbulenten Spannung gleichermaßen eine Verschiebung in der viskosen Spannung zur Folge. Weil die viskose Scherspannung in der Trettel & Larsson Transformation verwendet wird, verschiebt sich das entsprechende Geschwindigkeitsprofil in der logarithmischen Schicht nach oben. Der Anstieg der Anisotropie der Turbulenz mit steigender Machzahl ist exakt der gleiche Effekt, der auch in kompressiblen Kanalströmungen mit variablen Fluideigenschaften beobachtet wird. Hasan et al. [72] ordneten die Beobachtungen intrinsischen Kompressibilitätseffekten zu, aufgrund der nahezu konstanten Fluideigenschaften durch den Energiesenkenterm.

Die Manipulation der kompressiblen Kanalströmung über einen Senkenterm in der Energiegleichung ist ebenfalls beliebt, um ein Temperaturprofil ähnlich zu dem einer Grenzschicht zu erhalten. Simulationen der Kanalströmung sind aufgrund der periodischen Ränder gegenüber Grenzschichten viel einfacher zu handhaben. Yu et al. [157]

fixierten die bulk Temperatur im Kanal über einen räumlich konstanten Energiesenkenterm, sodass sich Temperaturverläufe ergaben, die denen von Grenzschichtströmungen mit nahezu adiabaten Wänden gleichen. Gattere et al. [58] fixierten die bulk Temperatur im Kanal mit dem Ziel einer konstanten dimensionslosen Temperatur (auch diabatischer Parameter [161])

$$\Theta = \frac{T_w - T_b}{T_r - T_b} \tag{4.1}$$

mit der Recovery-Temperatur

$$T_r = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} r\, Ma_b^2\right) T_b\,, \qquad r = Pr^{1/3}\,, \tag{4.2}$$

welche erreicht wird, wenn die Strömung nicht-isentrop auf Null abgebremst wird. Durch die konstante dimensionslose Temperatur wird ein konstanter Anteil der verfügbaren kinetischen Energie in thermische Energie an der Wand umgewandelt. Gattere et al. [58] wählten einen Wert der dimensionslosen Temperatur von $\Theta = 0.75$, wobei in den Gleichungen 4.1 und 4.2 entgegen der ursprünglichen Definition in Zhang et al. [161] die bulk Temperatur und bulk Machzahl verwendet wurde[1]. Da die bulk Machzahl und die lokale Machzahl in der Kanalmitte durch die starken Temperaturänderungen signifikant voneinander abweichen, dürfte sich mit Größen in der Kanalmitte eher ein Wert von $\Theta \approx 0.5$ ergeben. Cogo et al. [35] sprechen bei einem diabatischen Parameter $\Theta = 0.25$ von extrem kalten Wänden, während ein Wert von 1 adiabaten Wänden entspricht. Ein Wert von $\Theta \approx 0.5$ lässt sich somit dazwischen einordnen, was bezogen auf Grenzschichtströmungen einen nicht unerheblichen Einfluss der Wandkühlung bedeutet. Gegenüber den Kanalströmungen ohne Kühlterm ist der Wandwärmestrom jedoch im Vergleich klein. Der grenzschichtähnliche Temperaturverlauf mit reduziertem Wärmeübergang an der Wand hat den Vorteil, dass Effekte rein aufgrund der Machzahl gegenüber Effekten, die sich durch Wandkühlung ergeben, besser isoliert werden können [10]. Wenzel et al. [148] zeigte darüber hinaus für Grenzschichten, dass Strömungskonfigurationen, deren Temperatur durch eine konstante Eckertzahl $Ec = (\gamma - 1)M_\infty^2 T_\infty/(T_r - T_w)$ ähnlich begrenzt sind, dasselbe integrale Verhalten aufweisen und deshalb physikalisch vergleichbar zueinander sind[2]. Cogo et al. [35] erhielten bei konstanten diabatischen Parametern für Grenzschichten verschiedener Machzahlen aufeinander fallende RMS-Temperaturprofile in Wandnähe und folglich gleiche Wandkühlungseffekte. Yu et al. [157] untersuchten auf diese Weise Kanalströmungen mit $Re_\tau \approx 550$ und bulk Machzahlen bis zu 4.4, bzw. turbulenten Machzahlen bis zu 0.45, wobei sich durch den Kühlterm nur sehr

[1] Zhang et al. [161] charakterisierten verschiedene Grenzschicht-, Kanal- und Rohrströmungen mit dem diabatischen Parameter Θ und nutzten dabei für Grenzschichten die Werte der Außenströmung ($Ma_\infty = u_\infty/\sqrt{\gamma R T_\infty}$) und für Kanal- und Rohrströmungen die Werte in der Mitte ($Ma_c = u_c/\sqrt{\gamma R T_c}$).

[2] M_∞, T_∞: Machzahl und Temperatur am Grenzschichtrand. Die Eckertzahl steht in direkter Beziehung zu der dimensionslosen Temperatur Θ durch $Ec = 2/[r(1 - \Theta)]$ [35].

geringe Variationen der Fluideigenschaften in Wandnähe ergab. Es zeigte sich eine gute Vergleichbarkeit der Strömungsfälle, wobei die gleichen Phänomene in den Statistiken zu sehen sind wie in Hasan et al. [72] (Anisotropiezunahme, Verschiebung im Geschwindigkeitsprofil), wo die Gradienten der mittleren thermischen Größen komplett eliminiert wurden. Dilatationseffekte waren bei der höchsten Machzahl für eine Abnahme des mittleren Reibungskoeffizienten von ungefähr 4 % gegenüber der inkompressiblen Strömung verantwortlich.

Auch wenn die Intensität der Wandkühlung in kompressiblen Grenzschichten gegenüber Kanalströmungen mit gekühlten Wänden teilweise deutlich geringer ausfällt und so gut wie keine Variationen der mittleren Fluideigenschaften in Wandnähe hervorruft, hat diese in vielerlei Hinsicht erheblichen Einfluss auf die Strömung. Hinsichtlich der Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie kann sich eine Änderung der thermischen Wandbedingungen ähnlich äußern wie eine Erhöhung der Machzahl [35]. Geringere Wandtemperaturen lassen den Peak der mittleren Temperatur wachsen, was eine lokale Stratifizierung der Fluideigenschaften im Bereich der Übergangsschicht hervorruft [35]. Der Effekt kann als eine Förderung der Kompressibilität gesehen werden, da Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung verstärkt und in den anderen Komponenten gedämpft werden [35]. Baranwal et al. [10] fanden wandnahe Dilatationsbewegungen als den entscheidenden Prozess für Abweichungen des asymptotischen Wandverhaltens gegenüber inkompressibler Strömung. Dabei spielte es keine Rolle in welcher Weise diese zum Vorschein kamen, beispielsweise durch eine Änderung der Machzahl oder der Wandbedingung [10]. Auch Xu et al. [152] sprachen im Zusammenhang mit hypersonischen turbulenten Grenzschichtströmungen von einer Verstärkung der Kompressibilität in der wandnahen Schicht bei einer Erhöhung des Wandwärmeübergangs. Es konnte ein erhöhter lokaler umgekehrter Transport kinetischer Energie von kleinen zu großen Skalen festgestellt werden, wobei der lokale direkte Transport kinetischer Energie von großen zu kleinen Skalen unterdrückt wurde. Die beobachteten Effekte in der Literatur weisen darauf hin, dass auch bei supersonischen Grenzschichtströmungen, wo die variablen Fluideigenschaften in Wandnähe generell gegenüber Kanalströmungen viel unbedeutender sind, die Intensität der Wandkühlung eine große Rolle spielt.

Im Hinblick auf Strömungsbeeinflussung nutzten Gattere et al. [58] die dimensionslose Temperatur als eine andere Vergleichsmöglichkeit der verschiedenen Strömungen. Sie fixierten für unterschiedliche globale Machzahlen $Ma_b = 0.3$, 0.8 und 1.5 die dimensionslose Temperatur sowohl für die unbeeinflusste Strömung als auch für die Strömungen, die durch Wanderwellen spannweitiger Geschwindigkeit beeinflusst waren. Gleichzeitig übten sie Kritik an der in Kapitel 3 verwendeten Vergleichsstrategie, da die bulk Temperatur in Abhängigkeit der Beeinflussungsparameter über den Wert der unbeeinflussten Strömung erhöht und damit die physikalische Interpretation der Ergebnisse behindert wird. Zudem erschweren die unterschiedlichen Wärmeübergangsraten, zwischen Effekten aufgrund der Kompressibilität und aufgrund der Wandkühlung zu unterscheiden [58]. Der erste Punkt wurde bereits in Abschnitt

3.3.2 entkräftet, die Isolierung von intrinsischen Kompressibilitätseffekten und deren Bedeutung für die Strömungsbeeinflussung ist jedoch ein interessanter Aspekt, der deshalb in diesem Kapitel aufgegriffen wird. Die Vergleichsmethode basierend auf der konstanten dimensionslosen Temperatur erlaubt es darüber hinaus, dass die Reynoldszahl Re_τ an der Wand für alle unbeeinflussten Fälle gleich gewählt werden kann. Zudem ergeben sich durch den Energieterm Strömungsbedingungen, die externen Strömungen ähnlicher sind, wo die Anwendung einer Beeinflussung zur Widerstandsreduzierung typischerweise attraktiver ist [58]. Gattere et al. [58] nutzten sowohl die Vergleichsmethode ohne Kühlterm, wo die bulk Temperatur jeweils im Gleichgewicht ist mit dem Wärmefluss an den Wänden, als auch die Methode mit geregeltem Energiesenkenterm um die dimensionslose Temperatur für alle Fälle (beeinflusst und unbeeinflusst) konstant zu halten. Letztere soll den Effekt der Wandkühlung auf die Strömungsdynamik in der Wandregion bei verschiedenen Machzahlen besser berücksichtigen [35]. Die Vergleichsmethode ohne Senkenterm unterscheidet sich nur von der hier verwendeten dadurch, dass die Reynoldszahl an der Wand auch in diesem Fall für alle unbeeinflussten Konfigurationen verschiedener Machzahlen gleich gewählt wurde mit einem Wert von $Re_\tau = 400$ [3]. Die Wahl der Vergleichsstrategie wirkte sich spürbar auf die Ergebnisse der Widerstandsreduktion aus. Während ohne Senkenterm bedeutende Unterschiede zum inkompressiblen Verhalten festgestellt wurden, die qualitativ mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.4 übereinstimmen, führte der zusätzliche Senkenterm zu einer besseren Übereinstimmung der Ergebnisse über alle Machzahlen hinweg. Nur eine kleine, wenngleich nicht vernachlässigbare zusätzliche Widerstandsreduktion und Netto-Energieeinsparung zeigte sich im Vergleich zum inkompressiblen Fall [58].

4.1. Strömungskonfigurationen

Motiviert durch eine bessere Repräsentation von externen, grenzschichtähnlichen Strömungsbedingungen und die Isolation von intrinsischen Kompressibilitätseffekten in der Wandregion durch einen zusätzlichen Energiesenkenterm, wird in diesem Abschnitt ein zusätzlicher Datensatz bei der Machzahl $Ma_b = 1.5$ betrachtet, der die oben beschriebenen Ansätze aufgreift. Dabei wird der Strömung allgemein mithilfe des Zusatzterms Ψ Energie entzogen gemäß

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij} u_i + \mu c_p / \operatorname{Pr} \partial_x T}{\partial x_j} - \Psi \,, \tag{4.3}$$

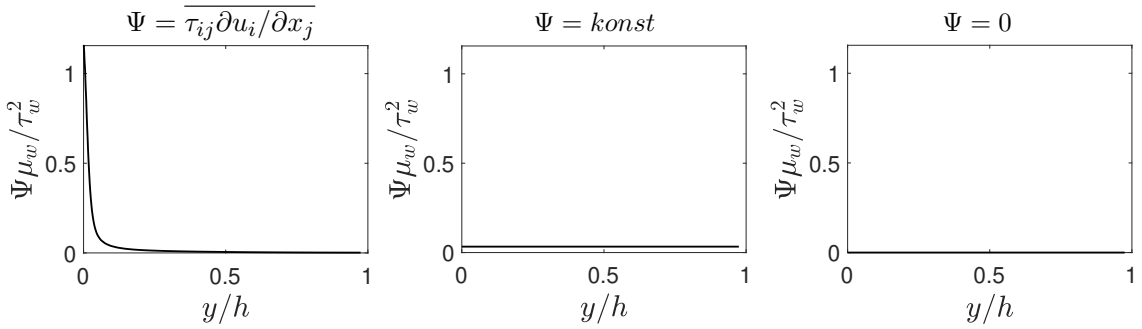
um der starken Aufheizung in der Kanalmitte entgegenzuwirken. Die Strategie in Anlehnung an Hasan et al. [72] wird im Folgenden als *dc* (dissipation cooling) bezeichnet.

[3] In Kapitel 3 wurde die Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re^*_{\tau c}$ für alle Machzahlen gleich gewählt. Für unterschiedliche Machzahlen ergaben sich damit abweichende lokale Reynoldszahlen an der Wand.

Case	Ma_b	Ma_c	Ma_τ ($\times 10^{-2}$)	Re_b	Re_τ	$Re^*_{\tau c}$	T_w/T_r	Θ	Ec	$-B_q$ ($\times 10^{-2}$)	St ($\times 10^{-3}$)
inc	0.15	0.18	0.9	8817	511	507	0.99			0.05	
dc	1.5	1.68	7.8	9402	509	485	0.64	-0.08	2.09	0.17	0.1
bc	1.5	1.97	7.9	12744	513	770	0.83	0.58	5.39	0.89	1.5
zc1	1.5	1.48	7.2	7760	509	346	0.52	-0.72	1.31	4.38	2.8
zc2	1.5	1.46	6.8	12391	764	517	0.52	-0.73	1.30	4.13	2.5

Tabelle 4.1: Simulationsparameter (1/2): Strömungskennzahlen

Die mittlere viskose Dissipation $\overline{\tau_{ij}\partial u_i/\partial x_j}$ wird für die jeweiligen beeinflussten und unbeeinflussten Fälle in einer vorhergehenden Simulation ohne zusätzlichen Energieterm bestimmt und anschließend als Kühlterm Ψ benutzt. Der Term greift in der Wandregion besonders stark ein, wo die viskose Dissipation hoch ist, und wird im äußeren Bereich unbedeutend (Abbildung 4.1a). Der zweite Ansatz in Anlehnung an Yu et al. [157] und Gattere et al. [58] mit der Bezeichnung *bc* (bulk cooling) verwendet einen räumlich und zeitlich konstanten Kühlterm (Abbildung 4.1b), der die dimensionslose Temperatur (Gleichung 4.4) auf einen mittleren Wert von ca. 0.6 zwingt. Der resultierende Temperaturverlauf ähnelt dem einer Grenzschicht mit gekühlten Wänden. Die mittlere Temperatur steigt von der Wand weg bis zum Maximum in der viskosen Unterschicht an und fällt anschließend mit zunehmendem Wandabstand ab. Gibis et al. [66] klassifizierten die Wandbedingungen in kompressiblen turbulenten Grenzschichten hauptsächlich basierend auf der wandnormalen Position des Temperatur-Maximums, welches in Grenzschichten mit gekühlten Wänden auftritt. Die vorliegende Wandbedingung mit $\partial\widetilde{T}/\partial x_2 = 0$ innerhalb der viskosen Unterschicht und quasi nicht vorhandenem innerem lokalen Maximum der Temperatur-RMS bezeichneten sie als *schwach gekühlt*. Da sich das wandnahe Maximum der mittleren Temperatur in einem Bereich befindet, der von Viskosität statt Turbulenz dominiert ist, ist das turbulente thermische Feld nur schwach durch den wandnahen Bereich mit positivem mittlerem Temperaturgradienten beeinflusst, was zu großen Ähnlichkeiten mit adiabaten Wänden führt [66]. Weiterhin werden nahezu inkompressible Strömungen mit einer geringen Machzahl von $Ma_b = 0.15$ (*inc*, incompressible) zum Vergleich herangezogen. Strömungen ohne Energiesenkenterm (*zc*, zero cooling) werden bei zwei unterschiedlichen bulk Reynoldszahlen betrachtet. In einem Fall stimmt die Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re^*_{\tau c}$ mit dem inkompressiblen Wert überein (*zc2*) gemäß der Vergleichsmethode in Kapitel 3, im anderen Fall stimmt die Reynoldszahl an der Wand Re_τ mit dem inkompressiblen Wert überein (*zc1*), wie von Gattere et al. [58] nahegelegt. Die Simulationsparameter aller untersuchter unbeeinflussten Konfigurationen sind in den Tabellen 4.1 und 4.2 aufgeführt. Tabelle 4.1 beinhaltet außerdem das Verhältnis von Wandtemperatur und Recovery-Temperatur T_w/T_r, welches oft zur Charakterisierung der thermischen Wandbedingung in Grenzschichtströmungen verwendet wird (z.B. Cogo et al. [34], Zhang et al. [160]), sowie den Wärmeübergangskoeffizienten B_q an der Wand, die Eckertzahl Ec und die Stanton-



(a) dc **(b)** bc **(c)** zc

Abbildung 4.1: Energieterme Ψ der unterschiedlichen Strömungskonfigurationen. (a) *dc* (dissipation cooling); (b) *bc* (bulk cooling); (c) *zc* (zero cooling).

Case	$\frac{L_{x_1}}{h}$	$\frac{L_{x_3}}{h}$	N_{x_1}	N_{x_2}	N_{x_3}	Δx_1^+	Δx_3^+	Δx_2^+	Δx_2^*
inc	2π	π	240	200	240	13.4	6.7	$0.62 - 11.4$	$0.62 - 11.3$
dc	2π	π	252	200	252	12.7	6.3	$0.37 - 13.0$	$0.37 - 12.4$
bc	2π	π	252	200	252	12.8	6.4	$0.37 - 13.1$	$0.37 - 19.7$
zc1	2π	π	252	200	252	12.7	6.4	$0.36 - 13.0$	$0.35 - 8.8$
zc2	2π	π	315	250	315	15.2	7.6	$0.44 - 15.6$	$0.43 - 10.6$

Tabelle 4.2: Simulationsparameter (2/2): Gebietsgröße und Gitterauflösung. L_{x_i}, N_{x_i}, Δx_i bezeichnen die Länge des Simulationsgebiets, die Anzahl an Gitterpunkten und die Gitterauflösung in den jeweiligen Raumrichtungen.

zahl *St*. Gattere et al. [58] nutzten wie schon erwähnt für die Definition der dimensionslosen Temperatur und der Recovery-Temperatur die bulk Temperatur und bulk Machzahl (Gleichungen 4.1 und 4.2). Im Gegensatz dazu werden hier die Größen in der Kanalmitte verwendet in Übereinstimmung mit Zhang et al. [161], um Vergleichbarkeit mit Grenzschichtströmungen zu schaffen, wo typischerweise die Größen am Grenzschichtrand verwendet werden. Für die dimensionslose Temperatur und die Recovery-Temperatur ergibt sich damit

$$\Theta = \frac{T_w - T_c}{T_r - T_c}\,, \tag{4.4}$$

$$T_r = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} r Ma_c^2\right) T_c\,, \qquad r = Pr^{1/3} \tag{4.5}$$

mit der Machzahl in der Kanalmitte

$$Ma_c = \frac{u_c}{\sqrt{\gamma R T_c}}\,, \tag{4.6}$$

wobei der Index c für Größen in der Kanalmitte steht. Die Eckertzahl wird mit den Größen in der Kanalmitte zu

$$Ec = \frac{(\gamma - 1) Ma_c^2 T_c}{T_r - T_w} \tag{4.7}$$

und die Stantonzahl als Maß für die relative Kühlintensität wird definiert als

$$St = \frac{q_w}{\rho_c u_c c_p (T_w - T_r)} \,. \tag{4.8}$$

Ein niedriger Absolutwert des Wandwärmeübergangskoeffizienten ergibt sich, wie erwartet, für den Fall *dc*, wo die Variation der mittleren Fluideigenschaften nahezu vollständig eliminiert ist. Der Wärmeübergangskoeffizient der Konfiguration *bc* ist gegenüber den Fällen ohne Kühlterm deutlich reduziert, da dieser nicht nur wie in Gleichung 3.51 mit der Wandschubspannung im Gleichgewicht steht, sondern zusätzlich mit dem integralen Energiesenkenterm. Die Stantonzahl deutet jedoch trotzdem auf eine relativ hohe Bedeutung der Wandkühlung hin. Große Abweichungen der Eckertzahl zeigen sich nicht nur zwischen den Fällen mit und ohne Kühlterm, sondern auch zwischen den beiden Fällen mit Kühlterm *dc* und *bc*. Die Kennzahl hängt sowohl von der Machzahl, als auch von dem Temperaturverhältnis T_w/T_r ab, und wird daher verwendet, um beide Effekte zu berücksichtigen. Für Strömungen mit gleicher Eckertzahl wird das gleiche integrale Verhalten erwartet, unabhängig davon ob eine Variation der Eckertzahl durch eine veränderte Machzahl oder Wandtemperatur verursacht ist [148]. Sowohl eine erhöhte Wandkühlung, als auch eine Reduktion der Machzahl verringert die Eckertzahl. Weiterhin wird mit steigender Machzahl eine zunehmend stärkere Kühlung benötigt, um eine niedrige Eckertzahl zu erreichen [148]. Die höhere Eckertzahl und das größere Verhältnis T_w/T_r der Konfiguration *bc* deuten darauf hin, dass die Wandkühlung gegenüber den Fällen ohne Energieterm an Bedeutung verliert, bei denen Wandkühlung naturgemäß essentiell ist. Der fiktive Fall *dc*, der die supersonische Machzahl von 1.5 bei nahezu konstanten Fluideigenschaften erreicht, hat trotz niedrigerem Wärmeübergang an der Wand gegenüber Fall *bc* eine niedrigere Eckertzahl. Wandkühlung hat dort also eine verhältnismäßig große Bedeutung. Die Aussagekraft der Kennzahlen Θ und Ec ist bei dieser Konfiguration jedoch fraglich, aufgrund des lokal stark variierenden Kühlterms gemäß der mittleren viskosen Dissipation. Unterschiede zwischen den verschiedenen Konfiguration zeigen sich beispielsweise auch in den Temperaturfluktuationen in der viskosen Unterschicht. Die Fälle *zc* und *bc* zeigen ausgeprägte Streaks ähnlich zu den Geschwindigkeitsfluktuationen (Abbildung 4.2).Mit konstantem Kühlterm sind diese viel weniger stark ausgeprägt und eher isotrop, ähnlich wie auch in Cogo et al. [34] und Cogo et al. [35] für Grenzschichtströmungen mit gekühlten Wänden gesehen. Die Diskussion zeigt den starken Eingriff des Energiequellterms in die Physik der Strömung. Trotz isothermer Wände in allen Fällen sorgen die Kühlterme dafür, dass die thermischen Wandbedingungen unterschiedlicher nicht sein können. Eine Analyse der Statistiken der unbeeinflussten Strömungen ist daher unerlässlich, bevor die Strömungsbeeinflussung

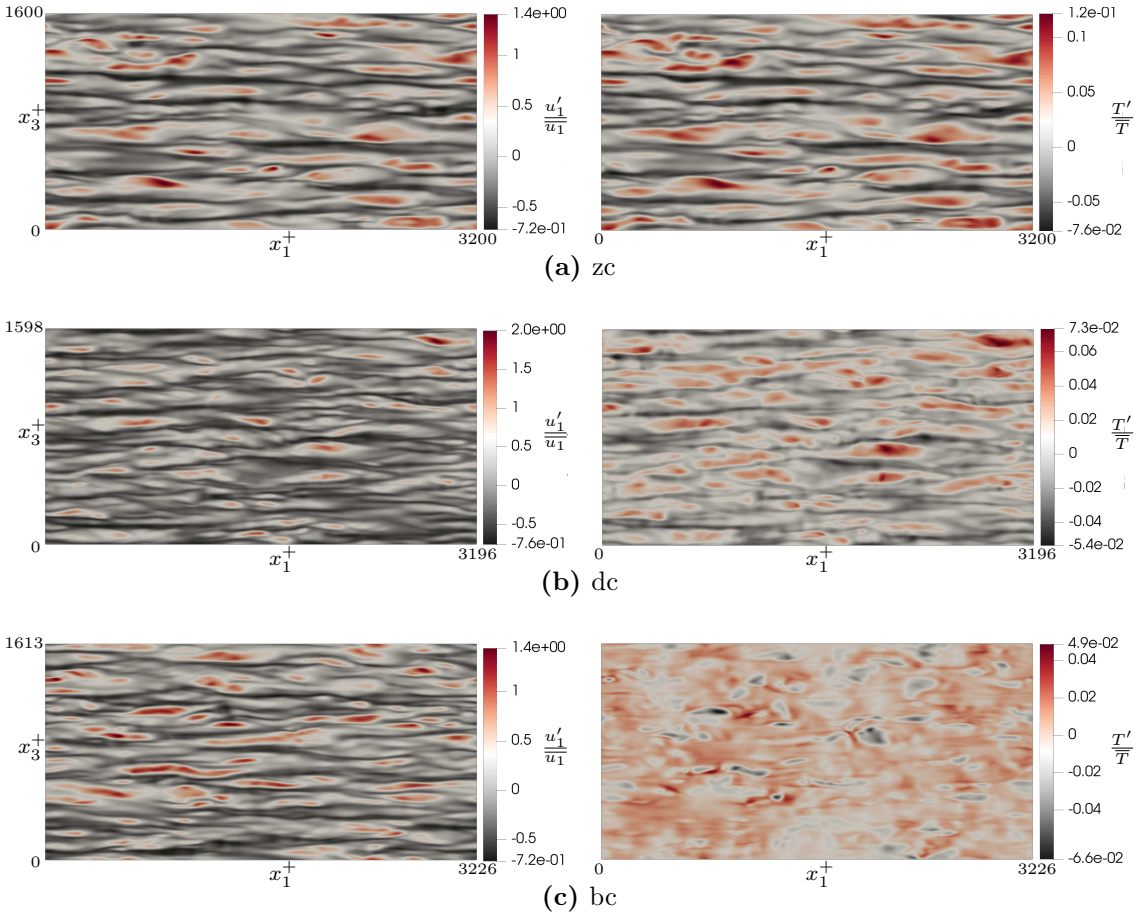


Abbildung 4.2: Instantane Fluktuationen der Geschwindigkeit (links) und Temperatur (rechts), normiert mit mittleren Größen, in einem wandparallelen Schnitt bei $x_2^+ = 5$. (a) *zc*, (b) *dc*, (c) *bc*.

angewandt wird. Zum weiteren Vergleich wird eine Grenzschicht-DNS mit adiabater Wand von Zhang et al. [159] herangezogen, um die mittleren Profile der unterschiedlichen Strömungskonfigurationen besser einordnen zu können. Die Parameter sind in Tabelle 4.3 aufgeführt. Statt der bulk Machzahl wird bei Grenzschichten üblicherweise die Machzahl mit Größen am Grenzschichtrand ($Ma_\infty = u_\infty/\sqrt{\gamma R T_\infty}$) verwendet. Die semilokale Reynoldszahl am Grenzschichtrand ist $Re_\tau^* = \sqrt{\tau_w/\rho_\infty}\,\delta/\nu_\infty$ mit der Grenzschichtdicke δ.

Case	Ma_∞	Ma_τ	Re_τ	Re_τ^*	T_w/T_r	Ec	$-B_q$
M2p5	2.5	0.08	510	1187	1.0	∞	0

Tabelle 4.3: Grenzschichtströmung von Zhang et al. [159] zum Vergleich. Die Machzahl $Ma_\infty = u_\infty/\sqrt{\gamma R T_\infty}$ wird mit Größen am Grenzschichtrand gebildet und $Re_\tau^* = \sqrt{\tau_w/\rho_\infty}\,\delta/\nu_w$ bezeichnet die semilokale Reynoldszahl am Grenzschichtrand mit der Grenzschichtdicke δ.

4.2. Unbeeinflusste Fälle

4.2.1. Mittlere Größen

Die mittleren Größen Druck, Temperatur und Dichte, die gemäß der idealen Gasgleichung in Relation zueinander stehen, sind für die unbeeinflussten Fälle in Abbildung 4.3 über der semilokalen Wandkoordinate aufgetragen. Die Variation des Drucks (Abbildung 4.3a) zeigt nur geringe Unterschiede zwischen den supersonischen Konfigurationen. Die Verläufe der Temperatur und der Dichte (Abbildungen 4.3b und 4.3c) lassen eine geringe Variation dieser Größen für den Fall *dc* im gesamten Kanal erkennen. Die Konfiguration *bc* minimiert die Variation gegenüber dem Fall *zc* ohne Kühlterm in der Wandregion bis $x_2 \approx 10$, darüber hinaus kommt es jedoch zu starken Abweichungen. Dementsprechend weichen auch die Profile der semilokalen Reynoldszahl teilweise stark voneinander ab (Abbildung 4.7a). Zwar ist die Reynoldszahl Re_τ an der Wand für alle Konfigurationen mit Ausnahme von *zc2* gleich, der Vergleich dieser Konfigurationen basierend auf einer losgelösten Betrachtung der Wandregion ist aber aufgrund der erheblichen Unterschiede der semilokalen Reynoldszahl in der logarithmischen und äußeren Schicht problematisch. Durch die stark unterschiedlichen Temperaturen in der Kanalmitte kommt es trotz gleicher bulk Machzahlen zu Unterschieden in der lokalen Machzahl in der Übergangsschicht und äußeren Schicht

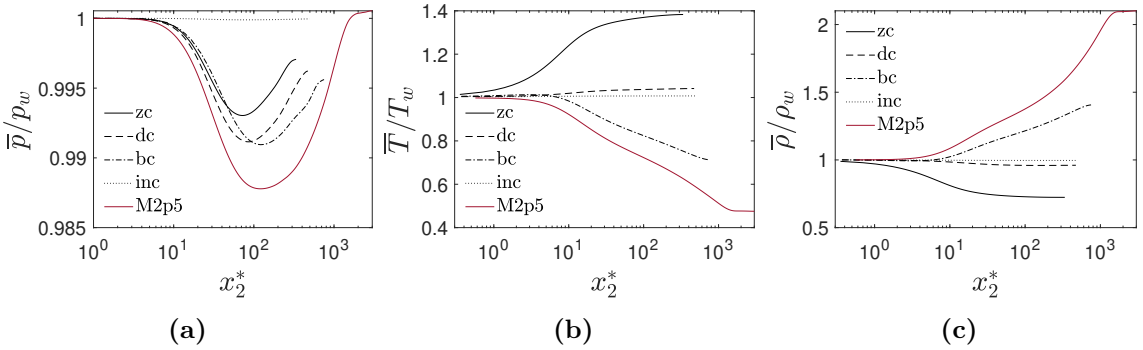


Abbildung 4.3: Mittlere Profile des Drucks (a), der Temperatur (b) und der Dichte (c).

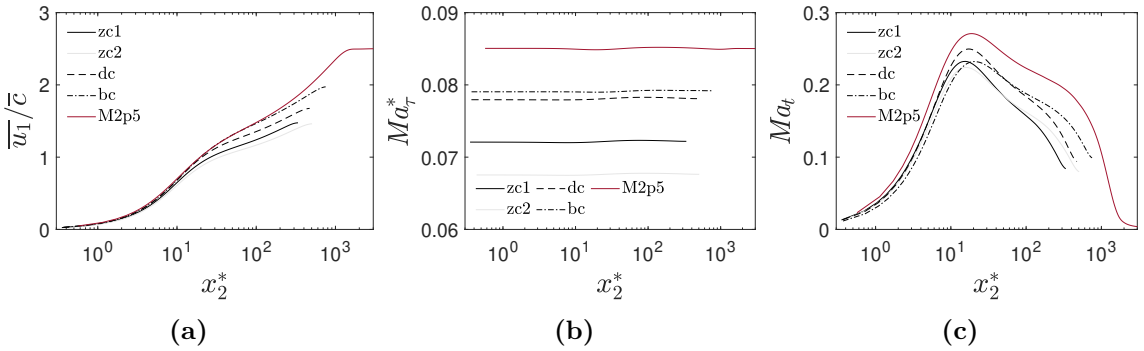


Abbildung 4.4: Mittlere Profile der lokalen Machzahl $\overline{u}_1/\overline{c}$ (a), der semilokalen Schubspannungsmachzahl $Ma_\tau^* = u_\tau^*/\overline{c}$ (b) und der turbulenten Machzahl $Ma_t = \sqrt{2k}/\overline{c}$ (c).

(Abbildung 4.4a). Höchste Werte werden für die Strömungen mit Kühlterm erreicht (*dc* und *bc*), wobei der Effekt der Reynoldszahl für die beiden Konfigurationen ohne Kühlterm erneut deutlich wird. Die Unterschiede spiegeln sich auch in der semilokalen Schubspannungsmachzahl wider (Abbildung 4.4b). Deren Wandwert Ma_τ wird als wichtiges Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte in wandgebundener Strömung angesehen [24, 136, 72]. Der Peak der turbulenten Machzahl (Abbildung 4.4c) liegt für alle Strömungen dicht zusammen, mit einem leicht erhöhten Wert der Konfiguration *dc*. Ähnliche qualitative Verläufe zeigen sich bei den thermischen Größen in Abbildung 4.3 zwischen dem Fall *bc* und der Grenzschichtströmung M2p5 von Zhang et al. [159]. Die Variationen sind für die Grenzschicht wegen der höheren Machzahl $Ma_\infty = 2.5$ etwas größer. In den Profilen des Drucks (Abbildung 4.3a) und der turbulenten Machzahl (Abbildung 4.4c) wird das Fehlen der freien Außenströmung der Kanalsimulationen gegenüber der Plattengrenzschicht deutlich. Wegen der Begrenzung durch zwei Wände erholen sich die Größen in der Kanalmitte nicht vollständig.

RMS-Werte von Druck, Dichte und Temperatur sind in Abbildung 4.5 aufgetragen. Die Druckfluktuationen (Abbildung 4.5a), als weiteres wichtiges Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte [72], zeigen die gleichen Tendenzen wie die turbulente Machzahl in Abbildung 4.4c. Sie sind für die Strömung mit konstantem Kühlterm (*bc*) am höchsten, gefolgt von der Strömung mit nahezu konstanten Fluideigenschaften (*dc*) und am geringsten für die Strömung ohne Kühlterm (*zc*). Auch hier ist der Reynoldszahleffekt anhand der beiden Konfigurationen *zc1* und *zc2* erkennbar. Allen Profilen gemeinsam ist der Peak bei $x_2^* \approx 40$. Das Profil der Konfiguration *bc* stimmt im äußeren Bereich mit dem der Grenzschicht M2p5 von Zhang et al. [159] überein und übertrifft dieses sogar in Wandnähe. Erhöhte RMS-Werte der Dichte treten für die Konfigurationen *dc* und *bc* gegenüber der Strömung ohne Kühlterm in Wandnähe auf, wenn diese mit der mittleren Dichte normiert werden (Abbildung 4.5b). Deren Variation ist jedoch bis $x_2 \approx 10$ stark begrenzt. Bei den RMS-Werten der Dich-

te spielt die unterschiedliche Reynoldszahl der Fälle *zc1* und *zc2* keine Rolle, was darauf hindeutet, dass die Dichtefluktuationen im Fall *zc* weitgehend durch die variablen Fluideigenschaften begründet sind. Die Temperaturfluktuationen (Abbildung 4.5c) verhalten sich in Wandnähe gemäß der idealen Gasgleichung umgekehrt zu den Dichtefluktuationen. Die Produktion $\mathcal{P}_T$ der Temperaturvarianz $\widetilde{T''T''}$ bestimmt sich gemäß Gatski und Bonnet [57] zu

$$\mathcal{P}_T = -\overline{\rho}\widetilde{u_2''T''}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_2}\,. \tag{4.9}$$

Der komplette Term, wie auch deren beiden einzelnen Bestandteile sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Die thermische Produktion (Abbildung 4.6c) ist im Fall *bc* in der Übergangsschicht dominant und im Fall ohne Kühlterm mit umgekehrtem Vorzeichen in Wandnähe. Sie setzt sich bei der Konfiguration *bc* vorwiegend aus dem turbulenten Anteil $\overline{\rho}\widetilde{Tu_2''}$ (Abbildung 4.6a) zusammen, während der überwiegende Anteil im Fall *zc* aus dem mittleren Temperaturgradienten (Abbildung 4.6b) stammt. Hasan et al. [72] verwendeten die Isentropenrelation

$$\frac{\rho^{is}_{rms}}{\overline{\rho}} \approx \frac{1}{\gamma}\frac{p_{rms}}{\overline{p}} \tag{4.10}$$

um abzuschätzen, welcher Anteil der Dichtefluktuationen durch Änderungen des Drucks (intrinsische Kompressibilitätseffekte) begründet ist. Die isentropen Dichtefluktuationen werden in Abbildung 4.7b für die supersonischen Fälle jeweils mit den kompletten Dichtefluktuationen verglichen. Abweichungen von den isentropen Fluktuationen deuten darauf hin, dass andere Wärmetransporteffekte verbunden mit Änderungen des Fluidvolumens durch Änderungen der Entropie wichtig sind [72]. Große Abweichungen treten allgemein dort auf, wo die Variation der mittleren Fluideigenschaften groß ist (vgl. Abbildung 4.3b und 4.3c) [127]. Darüber hinaus kommt es

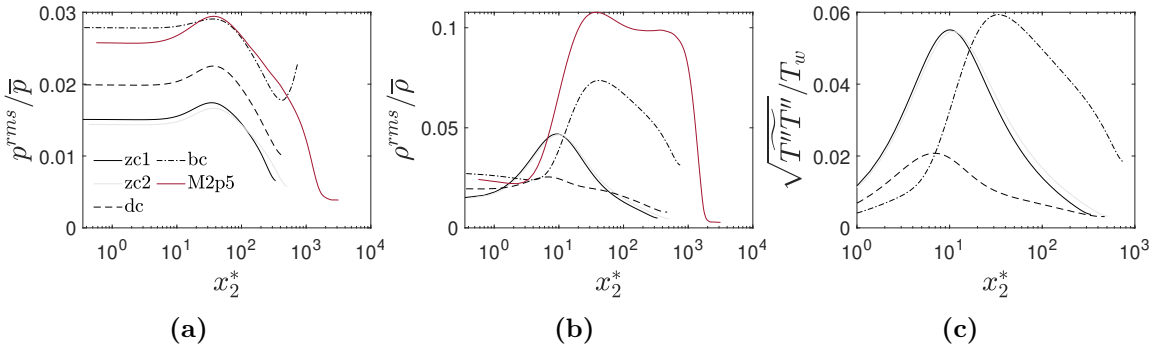


Abbildung 4.5: RMS-Werte des Drucks (a), der Dichte (b) und der Temperatur (c) bezogen auf die jeweiligen mittleren Größen.

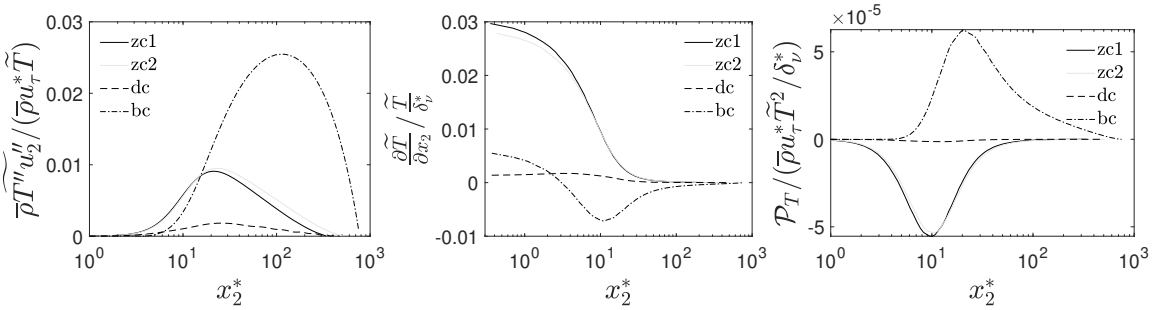


Abbildung 4.6: (a) Wandnormaler turbulenter Wärmefluss $\widetilde{\overline{\rho}u_2''T''}$; (b) Temperaturgradient $\partial\widetilde{T}/\partial x_2$; (c) Produktion der Temperaturvarianz $\mathcal{P}_T = -\widetilde{\overline{\rho}u_2''T''}\partial\widetilde{T}/\partial x_2$.

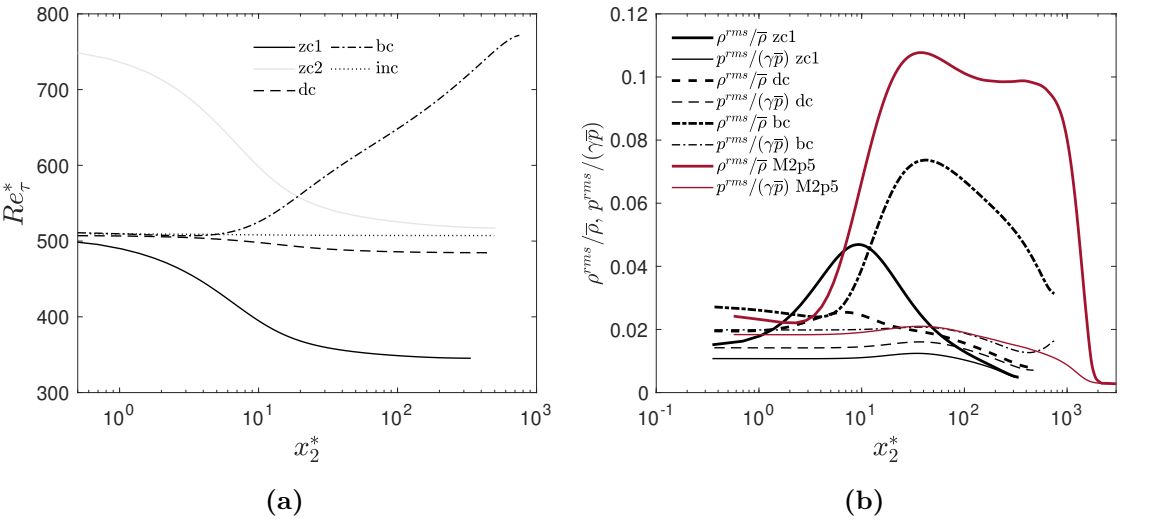
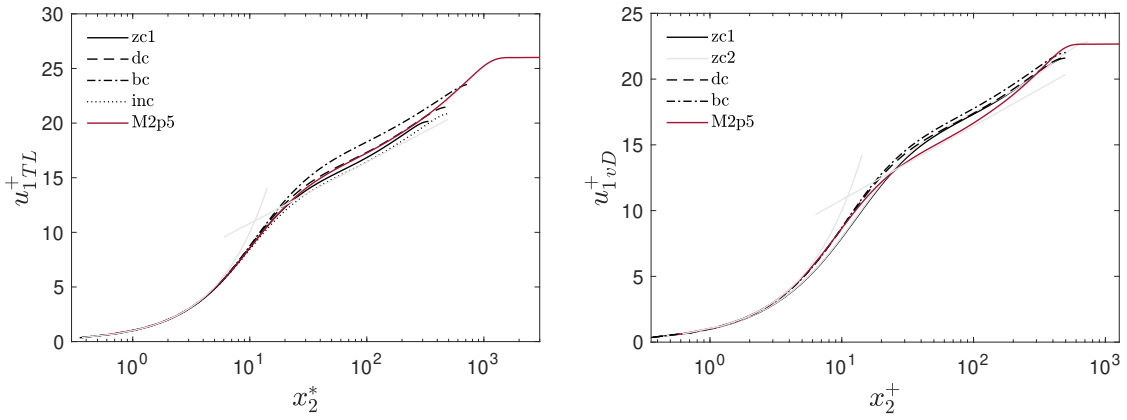


Abbildung 4.7: (a) Verlauf der semilokalen Reynoldszahl; (b) RMS-Werte der kompletten und isentropen Dichtefluktuationen basierend auf der Beziehung $\rho_{rms}^{is}/\overline{\rho} \approx p_{rms}/(\gamma\overline{p})$.

für alle Konfigurationen in der viskosen Unterschicht zu Abweichungen zwischen den kompletten und isotropen Dichtefluktuationen. Dasselbe Verhalten wurde auch für die Fälle ohne Dissipation in Hasan et al. [72] beobachtet und zeigt sich selbst bei der Grenzschichtströmung M2p5 von Zhang et al. [159] mit adiabater Wand. Während die beiden Kurven für die Fälle in Hasan et al. [72] mit vollständiger Elimination der viskosen Dissipation außerhalb der viskosen Unterschicht zusammenfallen, sind hier im Fall *dc* immer noch Effekte aufgrund des Wärmetransports aktiv. Das liegt daran, dass die Dissipation durch den Kühlterm nur im Mittel kompensiert wird. Wärmeleitungseffekte sind aber gegenüber dem Fall ohne Kühlterm stark minimiert.



(a) **(b)**

Abbildung 4.8: Mittlere Geschwindigkeitsprofile; (a) Transformation nach Trettel & Larsson, (b) Transformation nach van Driest; – Lineares Wandgesetz $u_1^+ = x_2^+$ und logarithmisches Gesetz $u_1^+ = 1/0.41 \ln(x_2^+) + 5.2$.

Hasan et al. [72] verwendeten für die supersonischen Kanalströmung mit konstanten Fluideigenschaften die Transformation nach Trettel & Larsson für die mittlere Geschwindigkeit. In Yu et al. [157] wurde für die Kanalströmung mit konstantem Kühlterm die van Driest Transformation verwendet, die bekanntermaßen besser bei nahezu adiabaten Wänden funktioniert. In beiden Fällen wurde eine gute Übereinstimmung für verschiedene Machzahlen erreicht, jedoch mit einer systematischen Zunahme im logarithmischen Bereich mit steigender Machzahl. Für die hier verglichenen Konfigurationen kommt es unter Nutzung dieser Transformationen entweder in der logarithmischen Schicht oder in der Übergangsschicht zu Abweichungen vom inkompressiblen Verhalten (Abbildung 4.8), was noch einmal den stark unterschiedlichen Charakter der Strömungen verdeutlicht.

4.2.2. Turbulente Spannungen

Die turbulenten Spannungen sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 abgebildet. Verwendet wird die Skalierung nach Morkovin [107] $\widetilde{u_i'' u_j''}/u_\tau^* = \overline{\rho}\widetilde{u_i'' u_j''}/\tau_w$, die schon die verschiedenen Fälle ohne Kühlterm in Abschnitt 3.6 gut aufeinander abgebildet hat und auch bei den Kanalströmungen mit Kühlterm (Hasan et al. [72], Yu et al. [157]), sowie bei Grenzschichtströmungen mit verschiedenen thermischen Wandbedingungen (Cogo et al. [35]) genutzt wird. Unklar ist jedoch, ob die Verläufe über x_2^+ oder x_2^* aufgetragen werden sollten, da sich die lokalen Reynoldszahlen der verschiedenen Konfigurationen teilweise stark unterscheiden. Beide Möglichkeiten sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 gezeigt und keine der beiden ist in der Lage, alle Effekte vollumfänglich zu berücksichtigen. Die Auftragung über x_2^+ in Abbildung 4.9

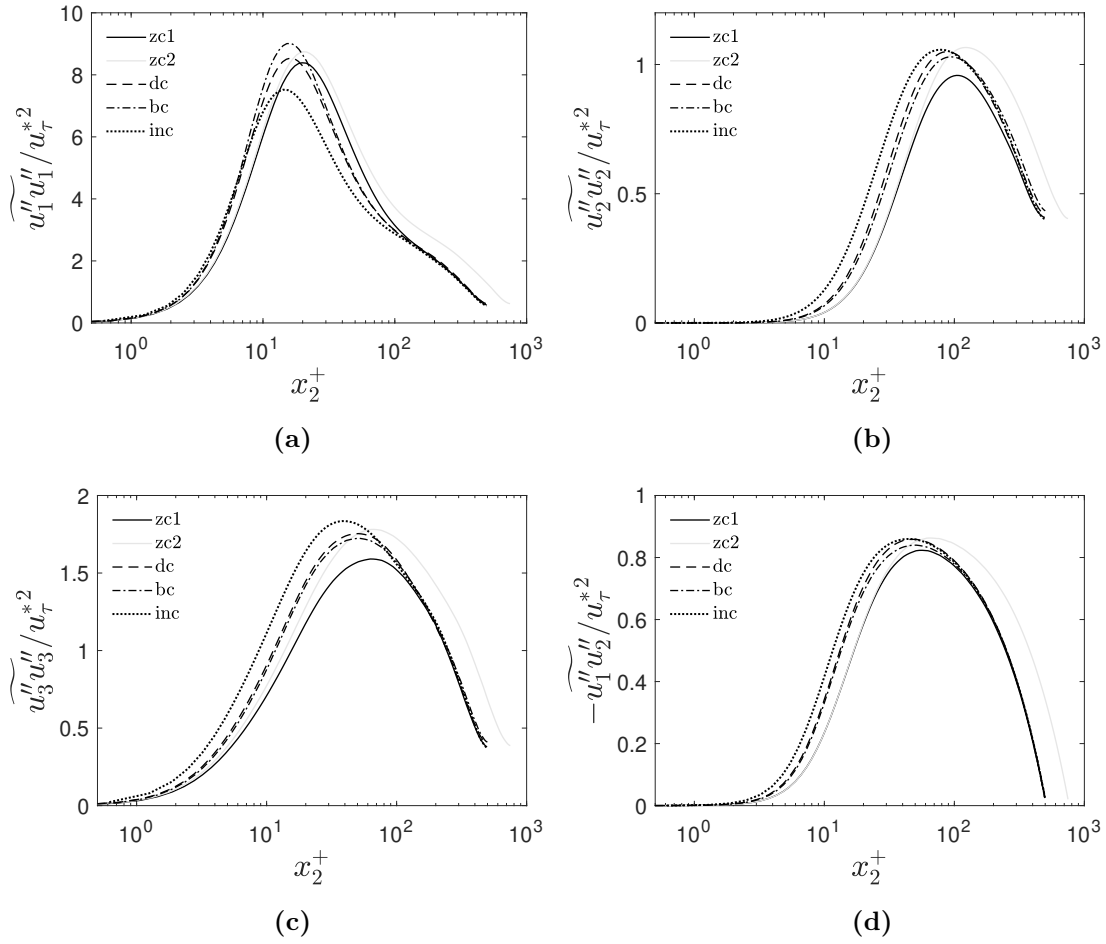


Abbildung 4.9: Profile der turbulenten Normalspannungen (a-b) und Scherspannung (c) normiert mit u_τ^{*2} über x_2^+ .

bildet die Profile im äußeren Bereich gut aufeinander ab, mit Ausnahme des Falls *zc2*, der eine abweichenden Reynoldszahl Re_τ an der Wand verwendet. Die Profile der Strömungen ohne Kühlterm sind gegenüber der Inkompressiblen stark verschoben, aufgrund der Effekte verbunden mit der Variation der semilokalen Reynoldszahl in der viskosen Unterschicht und Übergangsschicht [127]. Erhebliche Abweichungen von den inkompressiblen Profilen ergeben sich für die Maxima der wandnormalen und Spannweitenkomponenten im Fall ohne Kühlterm (*zc1*), was vermuten lässt, dass die Reynoldszahl in diesem Fall zu gering ist. Kanalströmungen mit variablen Fluideigenschaften werden gewöhnlicherweise bei gleicher Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re_{\tau c}^*$ verglichen [104, 126]. Wie in Kapitel 3 gesehen, lässt sich auf diese Weise eine gute Übereinstimmung der Maximalwerte für unterschiedliche Machzahlen erzielen. Eine verbesserte Übereinstimmung der Maxima der 22-, 33- und 12-Komponenten ist sofort für den Fall *zc2* zu sehen, bei dem die Reynoldszahl in der Kanalmitte mit dem inkompressiblen Wert übereinstimmt. Für alle Konfigurationen ist eine Zu-

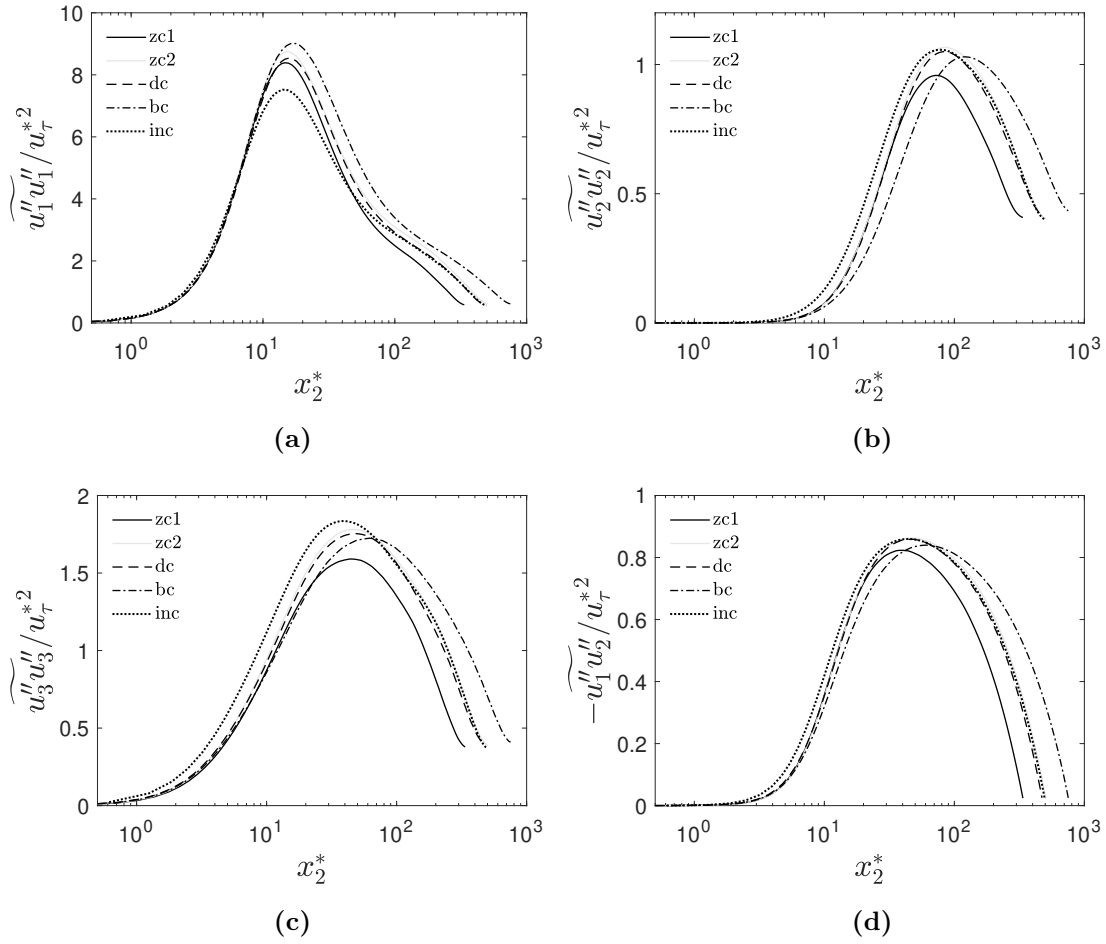


Abbildung 4.10: Profile der turbulenten Normalspannungen (a-b) und Scherspannung (c) normiert mit u_τ^{*2} über x_2^*.

nahme des Peaks in der Stromabkomponente zu sehen, sowie eine Verschiebung der Profile nach außen in den übrigen Spannungskomponenten. Die Anisotropie ist damit gegenüber dem inkompressiblen Fall erhöht. Weiterhin ist eine Abnahme der Anisotropie bei *zc2* gegenüber *zc1* zu erkennen, verbunden mit der Erhöhung der Reynoldszahl. Bei Auftragung über der semilokalen Wandkoordinate x_2^* in Abbildung 4.10 werden die starken Effekte der variablen Fluideigenschaften der Strömungen ohne Kühlterm berücksichtigt. Die Verschiebung nach außen wird korrigiert und die Position des Peaks in der Stromabkomponente stimmt gut mit dem inkompressiblen Fall überein. Die Verschiebung in der 22-, 33- und 12-Komponente ist nun nicht mehr so extrem wie in Abbildung 4.9, dafür kommt es im Fall *bc* für $x_2^* > 10$ zu einer starken Verschiebung nach außen durch die steigende semilokale Reynoldszahl. Die unterschiedlichen semilokalen Reynoldszahlen der verschiedenen Strömungskonfigurationen führen allgemein zu starken Abweichungen der turbulenten Spannungen in der äußeren Schicht. Die Konfigurationen *dc* und *zc2* verhalten sich dort wegen an-

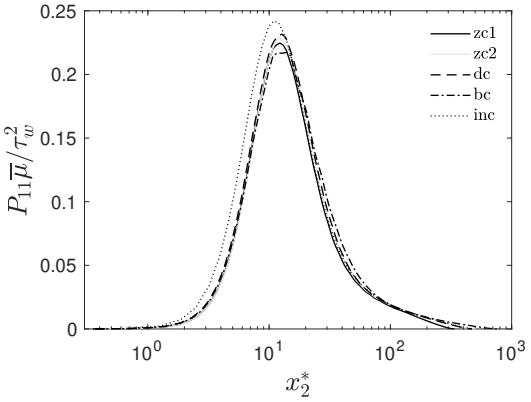


Abbildung 4.11: Vergleich der Produktion P_{11}

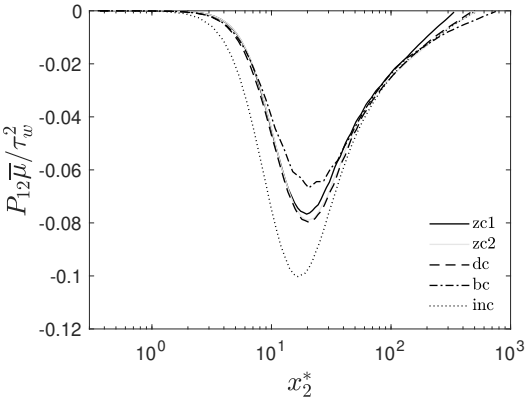


Abbildung 4.12: Vergleich der Produktion P_{12}

nähernd konstanter Fluideigenschaften bzw. der gleichen lokalen Reynoldszahl in der Kanalmitte ähnlich wie der Inkompressible. Höhere Spannungen ergeben sich für den Fall *bc* und niedrigere Spannungen ergeben sich für den Fall *zc1*, verbunden mit der Zunahme bzw. Abnahme der semilokalen Reynoldszahl mit dem Wandabstand. Die verschiedenen Auftragungen über x_2^+ oder x_2^* zeigen, dass sowohl intrinsische Effekte, als auch Effekte aufgrund der variablen Fluideigenschaften wichtig sind. Die Positionen der Peaks der 11-Spannung kann nur zur Deckung gebracht werden, wenn die Spannungen über x_2^* aufgetragen und mit semilokalen Größen normiert werden. Eine erhöhte Anisotropie tritt jedoch weiterhin auf. Geht man davon aus, dass die semilokale Skalierung Effekte variabler Fluideigenschaften korrigiert, ist die erhöhte Anisotropie auf intrinsische Kompressibilitätseffekte zurückzuführen. Gerade für den Fall *dc* der quasi frei von Variationen der mittleren thermischen Größen ist, ist dies eine direkte logische Konsequenz. Starke lokale Reynolds- und Machzahlvariationen führen weiterhin zu Abweichungen in der logarithmischen Schicht bei Verwendung der semilokalen Wandkoordinate [127].

Die Profile ausgewählter Bilanzterme der turbulenten Spannungen werden in den Abbildungen 4.11 - 4.20 für die unbeeinflussten Strömungen mit und ohne Kühlterme verglichen. Auch hier ist die Wahl der Skalierung und Wandkoordinate nicht ganz klar. Unterschiedliche Möglichkeiten sind in Ruby und Foysi [127] gezeigt. Die in den Abbildungen 4.11 - 4.20 verwendete Normierung mit $\tau_w^2/\overline{\mu}$ und Auftragung über der semilokalen Wandkoordinate liefert die beste Übereinstimmung bezüglich der Positionen der Peaks. Die Produktion P_{11} (Abbildung 4.11) und P_{12} (Abbildung 4.12) zeigt eine Verschiebung nach außen in der viskosen Unterschicht, wobei der Peak der 12-Komponente für die supersonischen Fälle stark gedämpft ist, besonders im Fall *bc*. Der turbulente Transport (Abbildung 4.13) ist in Wandnähe für die Fälle *zc* ohne Kühlterm besonders gedämpft, der zweite Peak dagegen ist für den Fall *bc* mit konstantem Kühlterm am geringsten. Der turbulente Massenfluss ist im Fall

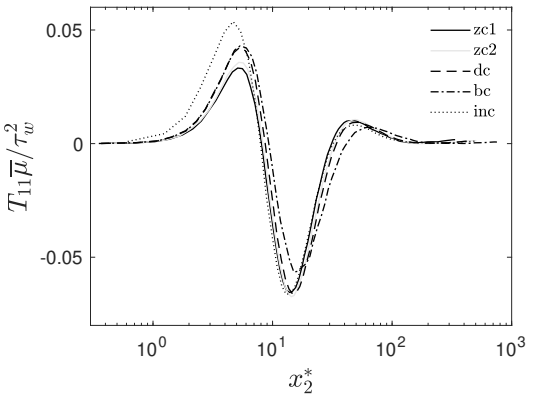


Abbildung 4.13: Vergleich des turbulenten Transports T_{11}

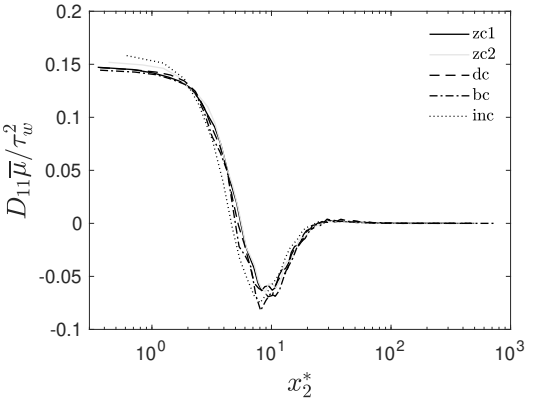


Abbildung 4.14: Vergleich des viskosen Transports D_{11}

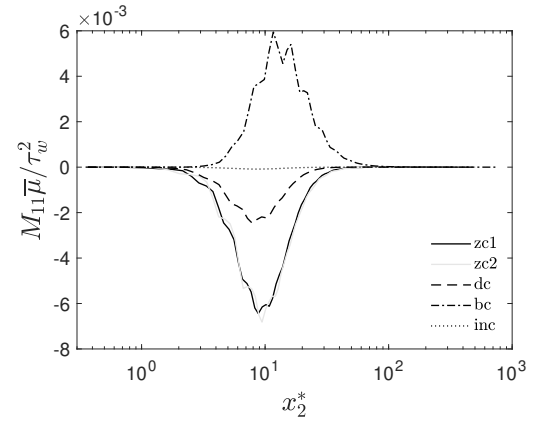


Abbildung 4.15: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{11}

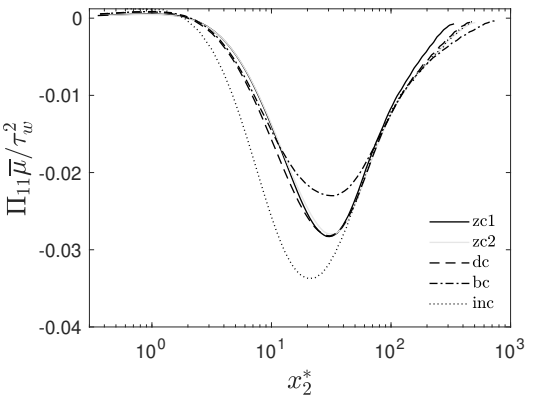


Abbildung 4.16: Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{11}^u

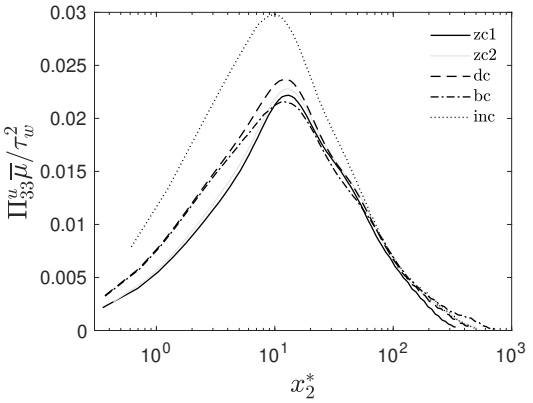


Abbildung 4.17: Vergleich der Druckscherkorrelation Π_{33}^u

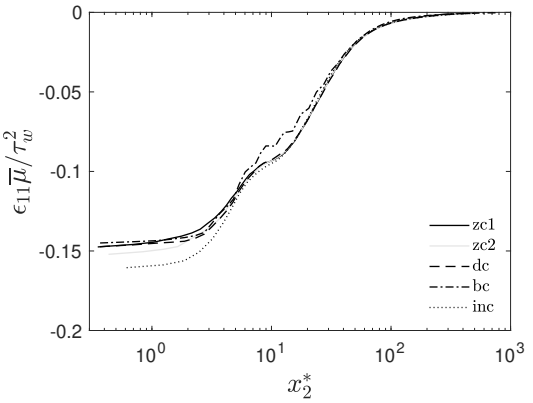


Abbildung 4.18: Vergleich der Dissipation ϵ_{11}^u

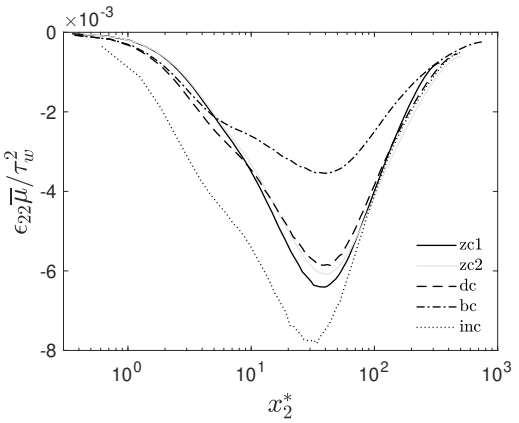


Abbildung 4.19: Vergleich der Dissipation ϵ_{22}

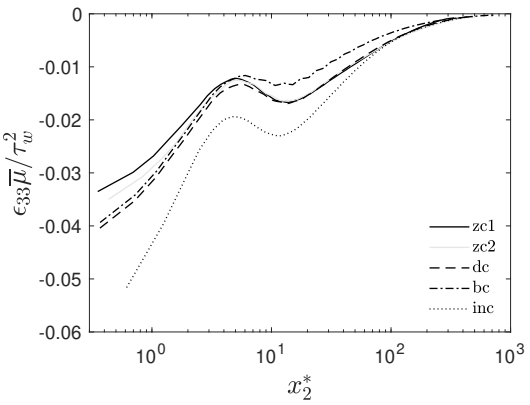


Abbildung 4.20: Vergleich der Dissipation ϵ_{33}^u

bc im Gegensatz zu den anderen Konfigurationen positiv (Abbildung 4.15). Auffallend sind weiterhin niedrige Werte der Konfiguration *bc* in der Übergangsschicht in den Komponenten der Druckscherkorrelation (Abbildungen 4.16 und 4.17) und Dissipation (Abbildungen 4.18-4.20), während die Profile der Fälle ohne Kühlterm in Wandnähe besonders stark gedämpft sind. Eine gute Übereinstimmung zeigt sich bei der Druckscherkorrelation Π_{11}^u in Wandnähe unter Nutzung der semilokalen Skalierung und Auftragung über x_2^* für die kompressiblen Fälle (Abbildung 4.16). Der starke Unterschied zur inkompressiblen Kurve, auch für die Fälle mit vernachlässigbarer Variation der mittleren Fluideigenschaften, deutet darauf hin, dass intrinsische Kompressibilitätseffekte einen starken Einfluss auf diese Größe haben [127]. Die turbulenten Spannungen und deren Bilanzterme verhalten sich in vielerlei Hinsicht für die Fälle mit und ohne Kühlterm ähnlich. Es zeigt sich eine Anisotropiezunahme der turbulenten Spannungen, hervorgerufen durch eine Abnahme der Druckscherkorrelation Π_{11}^u, die für die Verteilung der Energie der turbulenten Spannung in Stromabrichtung zu den anderen beiden Komponenten verantwortlich ist. Des Weiteren spielen die wandnahen Wirbelstrukturen eine wichtige Rolle im Energietransfer von der Stromabrichtung in die wandnormale und Spannweitenkomponente. Eine direkte Konsequenz des geschwächten Energietransfers zwischen den Komponenten ist daher auch eine Schwächung dieser Wirbel [72]. Da der Fall ohne Kühlterm vorwiegend durch Effekte der variablen Fluideigenschaften und die Fälle mit Kühlterm hauptsächlich durch intrinsische Kompressibilitätseffekte geprägt sind, lässt sich schließen, dass sich beide Effekte in ähnlicher Weise äußern.

Case	Ma_τ ($\times 10^{-2}$)	Re_τ	$Re^*_{\tau c}$	Λ^+_x	Λ^*_x	T_w/T_r	Θ	Ec	$-B_q$ ($\times 10^{-2}$)	St ($\times 10^{-3}$)	C_f ($\times 10^{-3}$)	s
inc	0.85	511	507	-	-	0.99	-1.34	0.96	0.05	1.91	4.60	0.83
incΛ400	0.67	407	404	401	398	0.99	-1.43	0.93	0.08	2.25	3.04	1.48
incΛ535	0.66	396	394	535	531	0.99	-1.42	0.93	0.07	1.98	2.88	1.37
incΛ805	0.66	396	394	803	797	0.99	-1.42	0.93	0.07	1.94	2.86	1.36
incΛ1605	0.68	411	408	1605	1594	0.99	-1.41	0.94	0.06	1.83	3.06	1.20
dc	7.81	509	485	-	-	0.64	-0.08	2.09	0.17	0.14	4.35	0.07
dcΛ400	6.38	406	397	400	381	0.65	-0.05	2.15	-0.34	-0.25	2.92	-0.17
dcΛ800	6.02	390	377	799	762	0.65	-0.05	2.14	-0.19	-0.13	2.64	-0.10
dcΛ1600	5.94	375	371	1598	1524	0.66	-0.02	2.21	-0.11	-0.08	2.49	-0.06
dcΛ3195	6.26	406	388	3196	3048	0.65	-0.08	2.09	0.20	0.14	2.82	0.10
bc	7.93	513	770	-	-	0.83	0.58	5.39	0.89	1.46	3.22	0.91
bcΛ405	6.46	418	629	403	606	0.84	0.60	5.67	3.41	4.96	2.19	4.54
bcΛ540	6.32	412	616	538	808	0.84	0.59	5.53	3.10	4.33	2.11	4.12
bcΛ805	6.17	398	603	806	1212	0.84	0.61	5.71	2.78	3.87	1.99	3.90
bcΛ1610	6.02	398	582	1613	2425	0.83	0.59	5.44	2.21	2.93	1.94	3.02
bcΛ3225	6.41	424	628	3226	4849	0.83	0.59	5.44	1.77	2.44	2.16	2.26
zc1	7.22	509	346	-	-	0.52	-0.72	1.31	4.38	2.75	4.79	1.15
zc1Λ400	5.90	422	282	400	271	0.52	-0.77	1.27	5.98	3.17	3.35	1.89
zc1Λ800	5.54	397	264	800	543	0.52	-0.78	1.27	5.30	2.63	2.97	1.78
zc1Λ1600	5.29	377	252	1600	1086	0.52	-0.77	1.27	4.78	2.25	2.68	1.69
zc1Λ3200	5.18	367	248	3200	2171	0.52	-0.78	1.27	4.54	2.04	2.53	1.61
zc2	6.77	764	517	-	-	0.52	-0.73	1.30	4.13	2.47	4.28	1.15
zc2Λ600	5.42	616	414	600	406	0.53	-0.78	1.27	5.17	2.56	2.86	1.79
zc2Λ1200	5.17	588	395	1200	813	0.53	-0.77	1.28	4.63	2.16	2.57	1.68
zc2Λ1800	5.11	584	390	1800	1219	0.52	-0.80	1.25	4.42	2.06	2.57	1.61
zc2Λ2400	5.12	583	391	2400	1626	0.53	-0.79	1.26	4.24	1.99	2.57	1.55
zc2Λ3600	5.26	606	401	3600	2438	0.52	-0.80	1.26	4.22	1.97	2.67	1.47
zc2Λ4800	5.76	669	437	4799	3251	0.52	-0.83	1.23	4.43	2.27	3.26	1.40

Tabelle 4.4: Simulationsparameter der beeinflussten und unbeeinflussten Strömungen. Der Reibungskoeffizient $C_f = 2\tau_w/(\rho_c u_c^2)$ ist hier mit Werten in der Kanalmitte definiert, St ist die Stantonzahl und $s = 2St/C_f$ bezeichnet den Reynoldsanalogiefaktor.

4.3. Beeinflusste Fälle

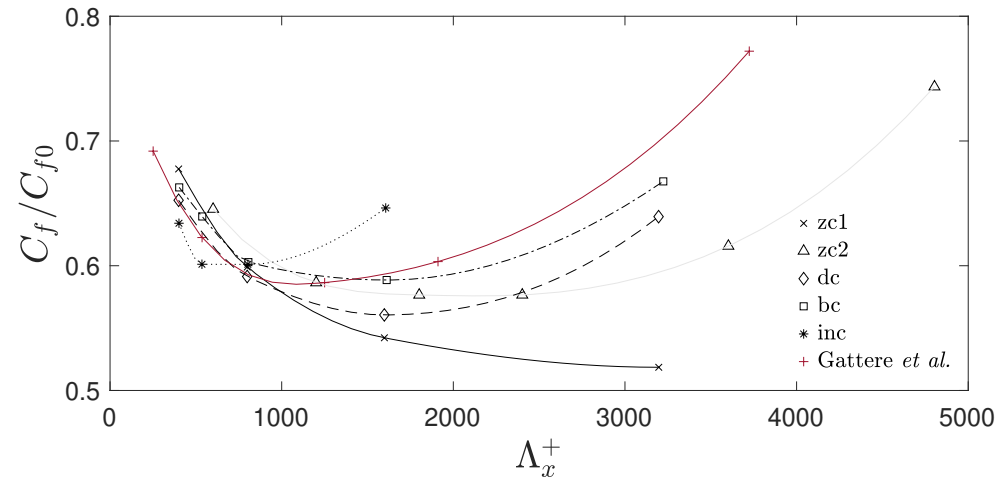
Für die Konfigurationen mit und ohne Kühlterm aus dem vorherigen Abschnitt wurden jeweils vier bis sechs beeinflusste Simulationen im Bereich der optimalen Beeinflussungswellenlänge durchgeführt. Alle beeinflussten Fälle unter Angabe der Beeinflussungswellenlänge in Wandeinheiten, und auch die unbeeinflussten Fälle sind in Tabelle 4.4 aufgeführt, um einen Vergleich untereinander zu ermöglichen. Die Tabelle enthält zusätzlich den Reibungskoeffizienten $C_f = 2\tau_w/(\rho_c u_c^2)$ unter Nutzung der Dichte und Geschwindigkeit in der Kanalmitte, sowie den Reynoldsanalogiefaktor

$$s = \frac{2St}{C_f} = \frac{q_w u_c}{\tau_w c_p (T_w - T_r)}\,, \tag{4.11}$$

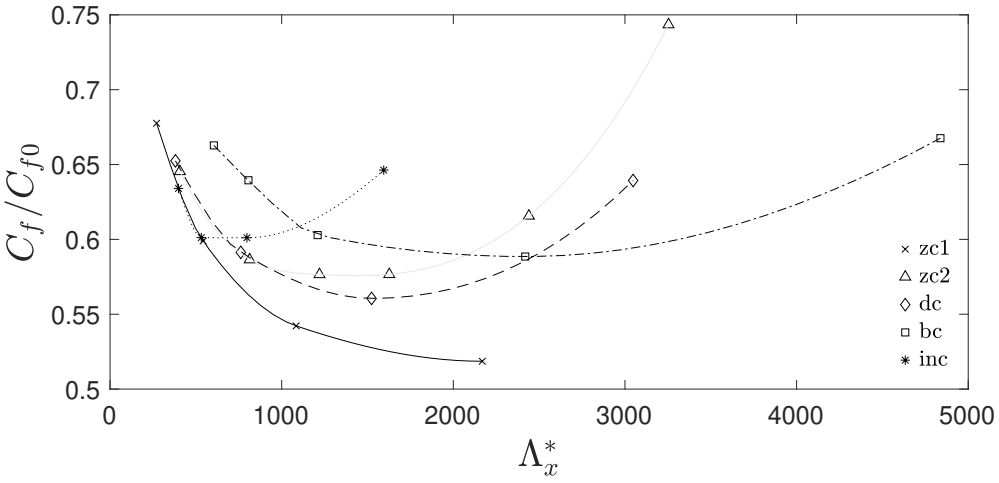
der den Wandwärmefluss in Relation zur Wandschubspannung setzt. Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Verhältnisse T_w/T_r für alle Konfigurationen im beeinflussten und unbeeinflussten Zustand gleich sind, da sich weder die Wand- noch die Recovery-Temperatur ändert. Die Schubspannungsmachzahl Ma_τ sowie die Reynoldszahlen Re_τ und $Re^*_{\tau c}$ sinken unter Beeinflussung gemäß der Reduzierung des Reibungskoeffizienten. In Abschnitt 3.3.2 wurde bereits für die Kanalströmungen ohne Kühlterm gezeigt, dass die mittleren Profile der Temperatur, Dichte und semilokalen Reynoldszahl im Einflussbereich der Wandoszillationen für verschiedene Beeinflussungswellenlängen übereinander fallen. Folglich ist die Vergleichbarkeit hinsichtlich der Effekte variabler

Fluideigenschaften gewährleistet. Auch der in diesem Kapitel neu eingeführte diabatische Parameter Θ und die Eckertzahl zeigen für die Konfigurationen *zc* ohne Kühlterm kaum Variationen durch die Erhöhung der bulk Temperatur in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge. Wie anhand der Werte des Wandwärmeübergangskoeffizienten und der Stantonzahl zu sehen, spielt bei diesen Konfigurationen die Wandkühlung generell eine so große Rolle, dass der zusätzliche thermische Einfluss der Wandoszillationen kaum ins Gewicht fällt. Das Gegenteil kann für die Konfiguration *bc* mit räumlich konstantem Kühlterm beobachtet werden. Durch den Kühlterm ist der Wandwärmeübergangskoeffizient im unbeeinflussten Fall bezogen auf die Konfiguration ohne Kühlung auf ca. ein Viertel begrenzt. Die thermischen Effekte der Wandoszillationen treten daher viel stärker hervor. Die Stantonzahl verdoppelt sich für die optimale Beeinflussungswellenlänge bezogen auf die unbeeinflusste Strömung. Die Bedeutung der Wandkühlung ist also trotz gleichbleibendem diabatischen Parameter für die beeinflusste und unbeeinflusste Strömung nicht vergleichbar, weshalb die Konfiguration *bc* eine genauere Betrachtung bezüglich der zusätzlich eingebrachten Wärmeenergie erfordert.

Zunächst werden jedoch in Abbildung 4.21 die Ergebnisse der Widerstandsreduktion präsentiert. Der Fall *zc1* erreicht von allen die höchste Widerstandsreduktion zusammen mit einer extremen Verschiebung in der Beeinflussungswellenlänge gegenüber dem inkompressiblen Fall sowohl in Wandeinheiten als auch in semilokalen Einheiten. Die Erhöhung der Reynoldszahl im Fall *zc2* relativiert die Höhe der Widerstandsreduktion und die Verschiebung, wobei die Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge gegenüber *dc* und *bc* bei Auftragung über Λ_x^+ immer noch am stärksten ist. Der Effekt ist folglich auf die variablen Fluideigenschaften zurückzuführen. Auffallend ist, dass auch bei den Konfigurationen mit Kühlterm *dc* und *bc* eine deutliche Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge stattfindet, zumal in diesen Fällen die Fluideigenschaften in Wandnähe annähernd konstant sind. Der Effekt kann im Fall *dc* daher nur durch intrinsische Kompressibilitätseffekte hervorgerufen werden und im Fall *bc* durch eine Kombination von intrinsischen Kompressibilitätseffekten und Wandkühlung. Die Konfiguration *dc* erzielt von allen betrachteten Konfigurationen die zweithöchste Widerstandsreduktion, was den starken Einfluss von intrinsischen Kompressibilitätseffekten auf die Effizienz der Strömungsbeeinflussung verdeutlicht. Ähnlich wie bei den Strömungen mit variablen Fluideigenschaften kommt es gegenüber der inkompressiblen Strömung zu einer höheren Widerstandsreduktion und einer Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge zu höheren Werten. Die Effekte, hervorgerufen durch intrinsische Kompressibilitätseffekte, sind im Fall *dc* sogar ausgeprägter als bei der Konfiguration *zc2* mit variablen Fluideigenschaften. Bei der Konfiguration mit räumlich konstantem Kühlterm *bc* kommt es zu einer ähnlich starken Verschiebung der Kurve bei Auftragung über Λ_x^+ wie im Fall *dc*. Die Widerstandsreduktion ist jedoch geringer mit nur wenig Unterschied zur inkompressiblen Strömung, obwohl im entsprechenden unbeeinflussten Fall im vorangegangenen Abschnitt deutliche Effekte aufgrund der Kompressibilität festgestellt wurden. Die



(a)



(b)

Abbildung 4.21: Reibungskoeffizient $C_f = 2\tau_w/(\rho_b U_b^2)$ der beeinflussten Strömung bezogen auf die jeweilige unbeeinflusste Strömung mit Reibungskoeffizient C_{f0} in Abhängigkeit der Beeinflussungswellenlänge Λ_x^+ (a) bzw. Λ_x^* (b). + : Daten von Gattere et al. [58] mit $Ma_b = 1.5$, $Re_\tau = 387$ und *Constrained Bulk Cooling* Vergleichsstrategie.

Ergebnisse sind im Wesentlichen im Einklang mit denen von Gattere et al. [58]. Deren Werte (rote Symbole (+) in Abbildung 4.21a) verhalten sich ähnlich wie der Fall *bc*. Der gezeigte Fall mit $Ma_b = 1.5$ und $Re_\tau = 387$ verwendet wie die Konfiguration *bc* einen räumlich konstanten Kühlterm, der den diabatischen Parameter Θ in der beeinflussten und unbeeinflussten Strömung konstant hält. Trotz der Diskrepanz in der Definition des diabatischen Parameters zwischen dieser Arbeit und Gattere et al. [58] (siehe Abschnitt 4.1) und leicht unterschiedlicher Reynoldszahlen Re_τ kann die Hauptaussage in Gattere et al. [58] bestätigt werden: Bei einem Wechsel der Ver-

gleichsstrategie von ZBC (*Zero Bulk Cooling*, hier der Fall *zc1*) auf CBC (*Constrained Bulk Cooling*, entspricht Fall *bc*), relativieren sich die enormen Unterschiede im Vergleich zur inkompressiblen Kurve. Die Unterschiede in der Widerstandsreduktion wirken dann im Vergleich marginal [58]. Gattere et al. [58] folgerten aus der besseren Überlappung der Kurven, dass Kompressibilität wenig bis keinen Effekt auf die Widerstandsreduktion hat, sobald die verfälschende Erhöhung der bulk Temperatur durch die Beeinflussung mithilfe eines konstanten diabatischen Parameter Θ kompensiert wird. Deutlich hervor tritt jedoch weiterhin die Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge gegenüber der inkompressiblen Kurve, was auf eine grundlegend veränderte Strömung in Wandnähe hindeutet. Weiterhin spricht gegen die Behauptung, dass in den turbulenten Spannungen der unbeeinflussten Strömungskonfiguration *bc* und deren Bilanztermen deutliche Kompressibilitätseffekte hervortraten (Abschnitt 4.2.2). Diese und auch einige thermodynamische Größen werden nachfolgend auch für die beeinflussten Fälle untersucht, um das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen Strömungskonfigurationen in der Widerstandsreduktion besser erklären zu können.

In Abschnitt 4.2 wurde die Bedeutung intrinsischer Kompressibilitätseffekte deutlich, besonders für die Konfigurationen mit Kühlterm, welche in der Wandregion kaum Effekte aufgrund variierender mittlerer thermischer Größen aufweisen. Mit der Widerstandsreduktion geht eine Verringerung der Schubspannungsmachzahl einher, die üblicherweise als Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte in wandgebundener Strömung benutzt wird [72]. Die Schubspannungsmachzahl sinkt für die unterschiedlichen Konfigurationen mit und ohne Kühlterme unter Beeinflussung etwa im selben Verhältnis (Tabelle 4.4). Somit scheidet eine unterschiedlich starke Dämpfung intrinsischer Kompressibilitätseffekte aus, um die Unterschiede in der Widerstandsreduktion zwischen den Konfigurationen *dc* und *bc* zu erklären. RMS-Werte von Druck, Dichte und Temperatur sind in Abbildung 4.22 für die unterschiedlichen Konfigurationen jeweils für die unbeeinflusste Strömung und die Strömung mit annähernd gleicher Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x^+ \approx 1600$ gezeigt. Druck-RMS und Dichte-RMS sinken für die beeinflussten Strömungen gleichermaßen ab. Lediglich mit konstantem Kühlterm (*bc*) ist ein Anstieg der Temperaturfluktuationen in Wandnähe aufgrund der Beeinflussung zu erkennen (Abbildung 4.22c).

4.3.1. Turbulente Spannungen

Die turbulenten Spannungen mit semilokaler Skalierung sind in der Abbildung 4.23 über x_2^+ und in Abbildung 4.24 über x_2^* aufgetragen für die beeinflussten Fälle mit annähernd gleicher Beeinflussungswellenlänge. Dasselbe Verhalten der unbeeinflussten Fälle zeigt sich auch bei Anwendung der Strömungsbeeinflussung. Die Erhöhung der Anisotropie der turbulenten Spannungen bei den kompressiblen Strömungen gegenüber der Inkompressiblen ist im beeinflussten Zustand noch ausgeprägter. Der

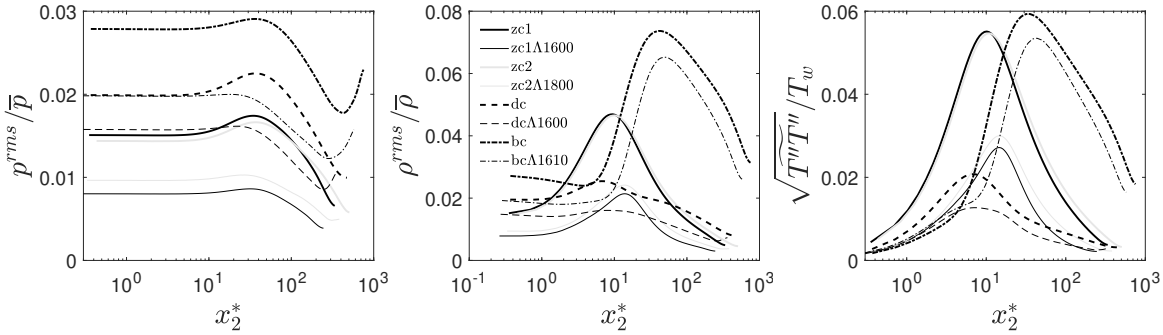


Abbildung 4.22: RMS-Werte des Drucks (a), der Dichte (b) und der Temperatur (c) bezogen auf die jeweiligen mittleren Größen jeweils für die beeinflusste und unbeeinflusste Strömung. Siehe Legende in (b).

Effekt tritt besonders stark hervor für die Konfiguration *zc1* mit niedriger lokaler Reynoldszahl in der Kanalmitte. Die semilokale Skalierung ist auch hier zum Teil in der Lage, die Effekte der variablen Fluideigenschaften zu berücksichtigen. Die Position des Peaks der 11-Komponente wird korrigiert bei Auftragung über x_2^* statt x_2^+. Auch im beeinflussten Fall stimmt die Höhe der Maxima der 22-, 33- und 12-Komponente besser mit den anderen Konfigurationen überein, wenn die Strömung bei gleicher Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re_{\tau c}^*$ verglichen wird (*zc2*). Die Anisotropie ist somit für den Fall *zc2* gegenüber *zc1* geringer. Die ist vor allem den starken Änderungen in der 33-Komponente geschuldet, während sich an der Höhe des Maximums der 11-Komponente wenig ändert. Generell ist bei der 33-Komponente eine stärkere Verschiebung der Profile nach außen für die Fälle *zc* im Vergleich zu den supersonischen Konfigurationen mit Kühlterm zu sehen. Der Effekt lässt sich daher auf die starke Wandkühlung im Fall *zc* zurückführen. Da die Profile der normierten semilokalen Reynoldszahl $Re_{\tau c}^*/Re_\tau$ im beeinflussten und unbeeinflussten Zustand ähnlich sind, tritt nach wie vor eine deutliche Erhöhung bzw. Verringerung der Spannungen im äußeren Bereich für die Konfigurationen *bc* und *zc1* im Vergleich zum inkompressiblen Fall auf. Bei Auftragung über x_2^+ in Abbildung 4.23 verschwindet diese aufgrund gleicher lokaler Reynoldszahlen an der Wand. Eine recht gute Übereinstimmung über der gesamten Wandkoordinate x_2^+ kann für die Konfigurationen mit Kühlterm *dc* und *bc* beobachtet werden.

Einige Bilanzterme der turbulenten Spannungen sind in den Abbildung 4.25 - 4.36 gezeigt, um entscheidende Terme für die verschiedenen Kühlkonfigurationen zu ermitteln. Alle gezeigte Bilanzterme der kompressiblen Strömungen sind in Wandnähe grundsätzlich gegenüber der Inkompressiblen gedämpft. Die Dämpfung fällt je nach Term und Kühlmethode unterschiedlich stark aus. Daneben kommt es bei manchen Termen zu einer Schwächung der Peaks. Das Maximum der Produktion P_{11} ändert sich gegenüber der inkompressiblen Strömung kaum (Abbildung 4.25), im Einklang

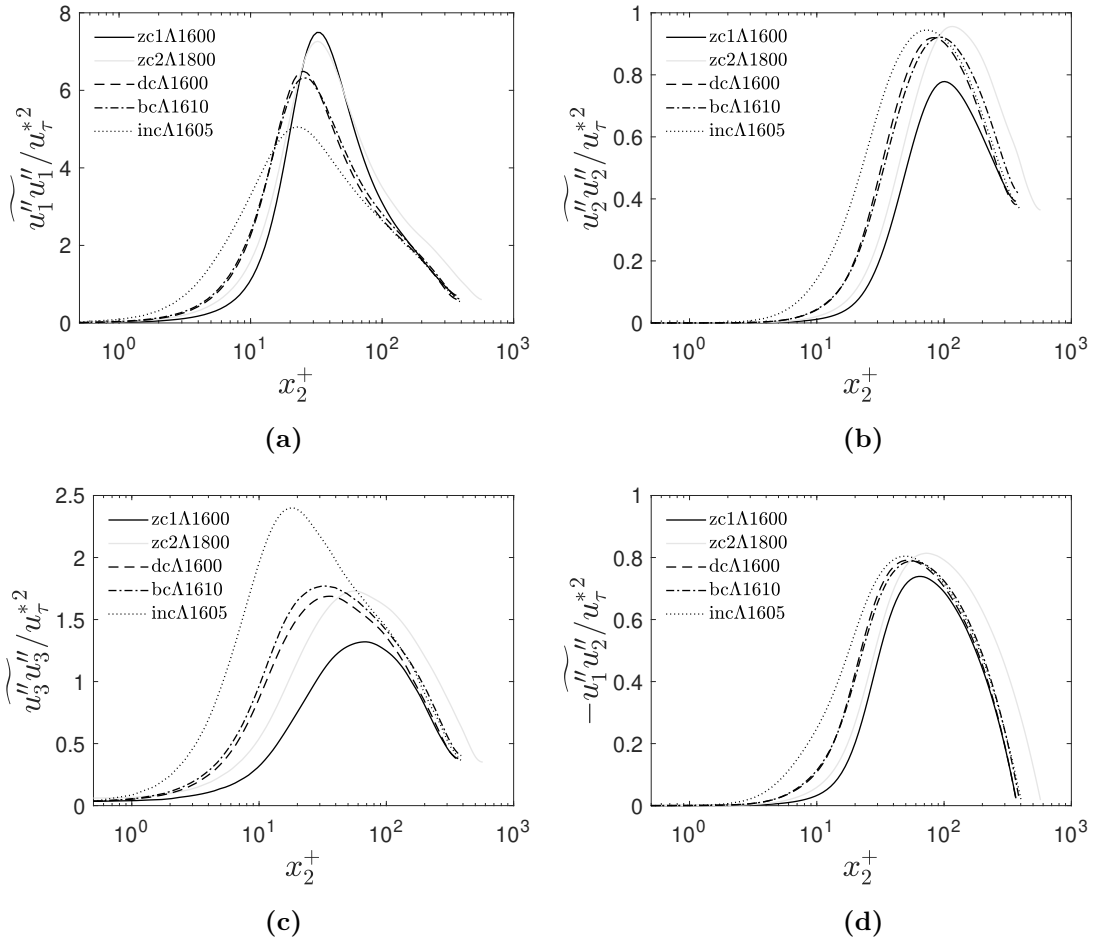


Abbildung 4.23: Profile der turbulenten Normalspannungen (a-b) und Scherspannung (c) normiert mit u_τ^{*2} über x_2^+ für die beeinflussten Strömungen mit $\Lambda_x^+ \approx 1600$.

mit den hohen Maxima der turbulenten Spannung $\widetilde{u_1''u_1''}$ in Abbildung 4.24a. Die 12-Komponente der Produktion erfährt dagegen auch eine Reduktion des Peak-Wertes (Abbildung 4.26). Die Druckscherkorrelation (Abbildungen 4.27 - 4.30) ist auch bei den beeinflussten Strömungen entscheidend für die Anisotropiezunahme der turbulenten Spannungen. Der extreme Rückgang in Wandnähe und auch der Maximalwerte bei der Konfiguration *zc1* wird durch die höhere Reynoldszahl im Fall *zc2* etwas relativiert. Die Profile der Konfigurationen mit Kühlterm *dc* und *bc* sind bei den Normalenkomponenten recht dicht zusammen, lediglich bei der 12-Komponente ist für die Konfiguration *bc* in der viskosen Unterschicht kein Unterschied zur inkompressiblen Strömung vorhanden. Deutliche Unterschiede zu den inkompressiblen Kurven treten auch bei der Dissipation auf (Abbildungen 4.31 - 4.34). Alle Komponenten sind in Wandnähe stark gedämpft, während der Peak-Wert der 11-Komponente entsprechend des hohen Peaks der turbulenten Spannung $\widetilde{u_1''u_1''}$ für alle Konfigurationen

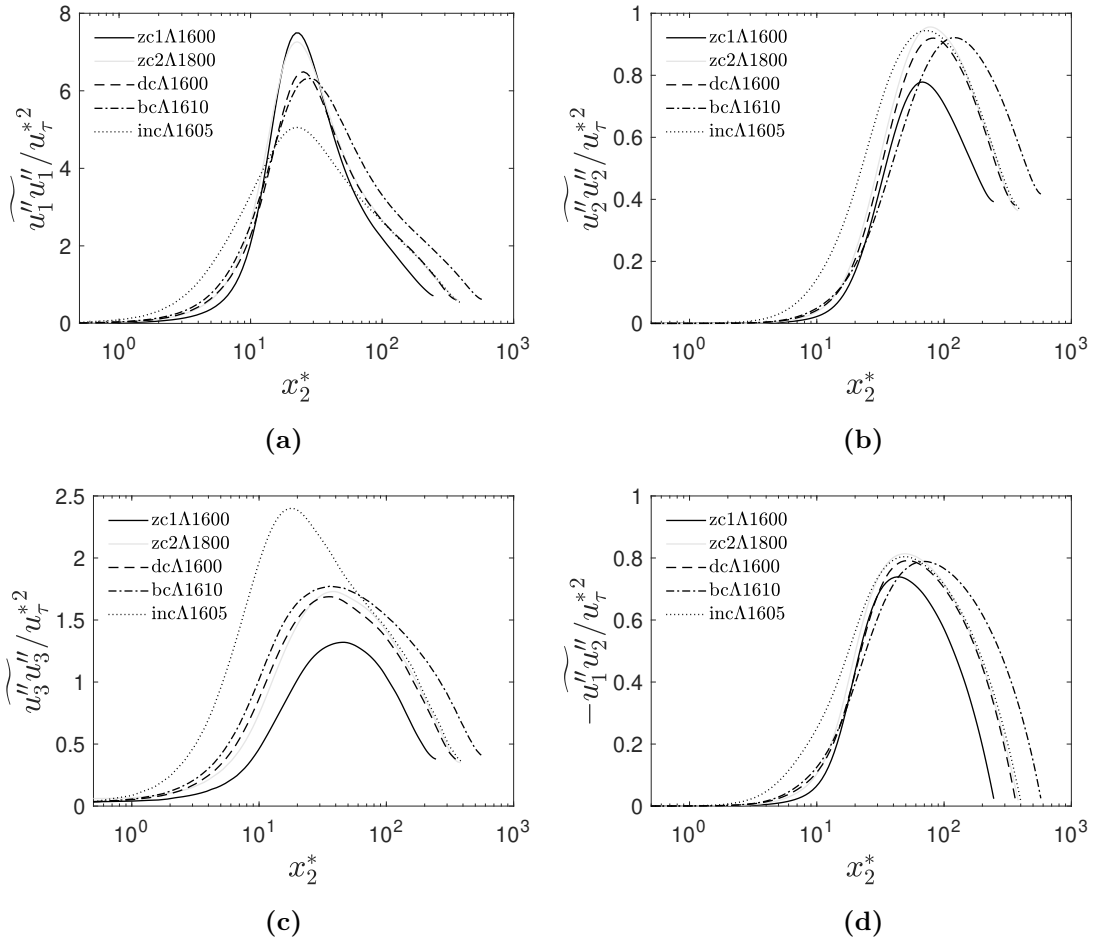


Abbildung 4.24: Profile der turbulenten Normalspannungen (a-b) und Scherspannung (c) normiert mit u_τ^{*2} über x_2^* für die beeinflussten Strömungen mit $\Lambda_x^+ \approx 1600$.

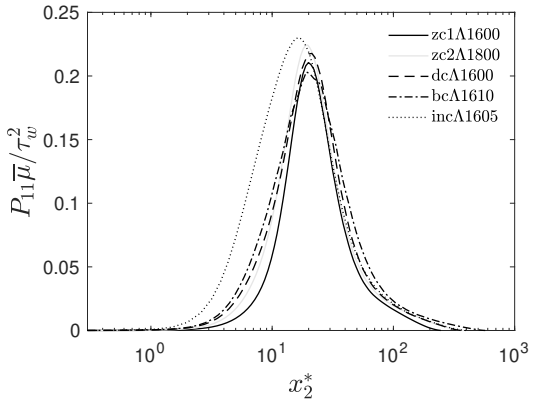


Abbildung 4.25: Vergleich der Produktion P_{11}

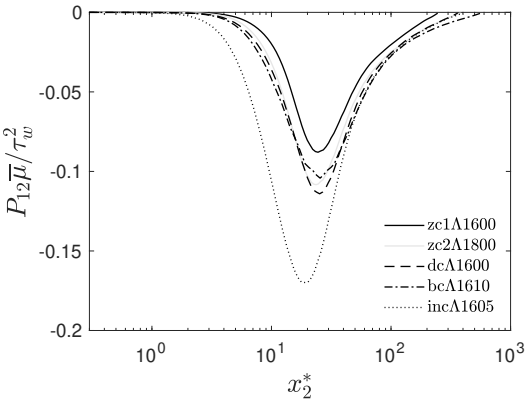


Abbildung 4.26: Vergleich der Produktion P_{12}

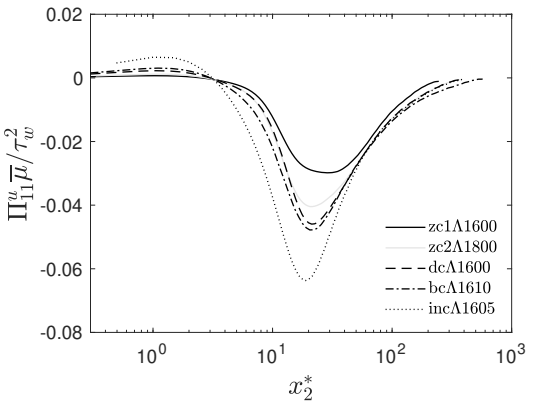


Abbildung 4.27: Vergleich der Druck-scherkorrelation Π^u_{11}

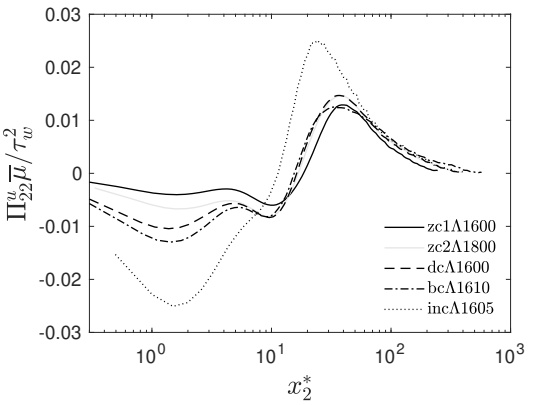


Abbildung 4.28: Vergleich der Druck-scherkorrelation Π^u_{22}

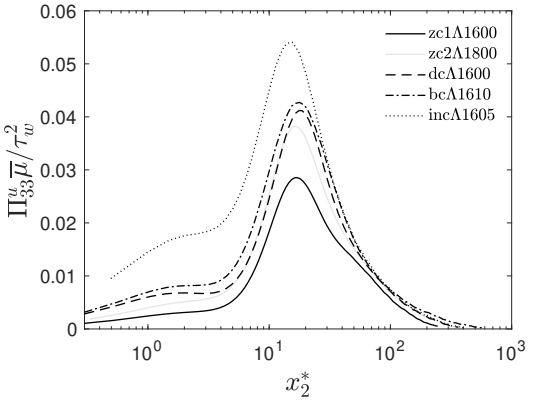


Abbildung 4.29: Vergleich der Druck-scherkorrelation Π^u_{33}

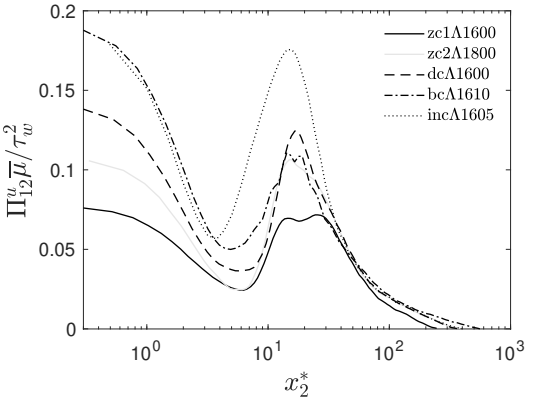


Abbildung 4.30: Vergleich der Druck-scherkorrelation Π^u_{12}

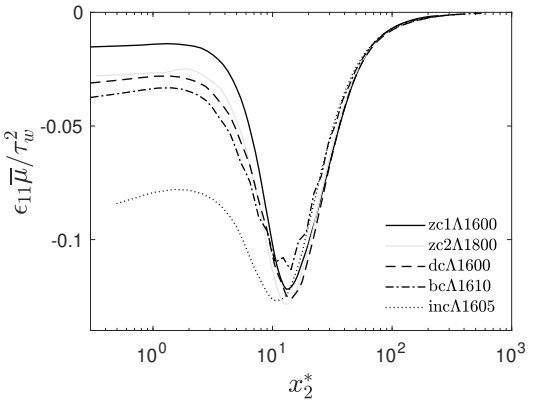


Abbildung 4.31: Vergleich der Dissipation ϵ_{11}

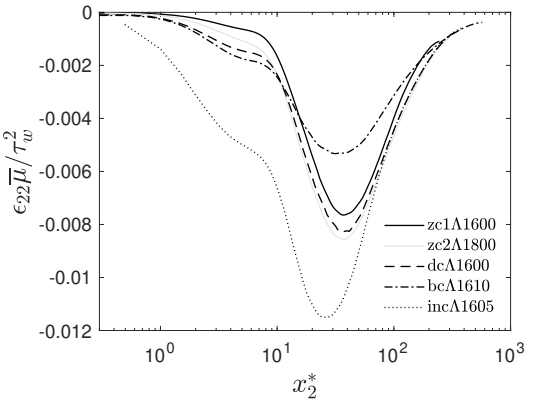


Abbildung 4.32: Vergleich der Dissipation ϵ_{22}

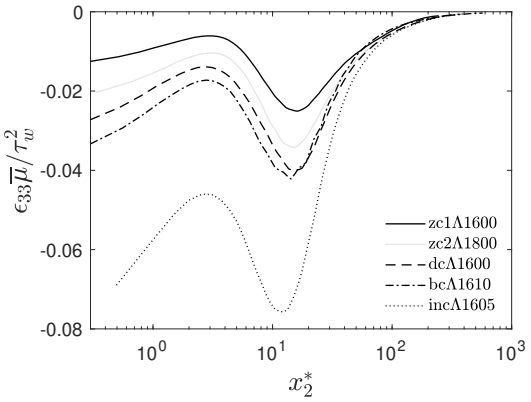


Abbildung 4.33: Vergleich der Dissipation ϵ_{33}

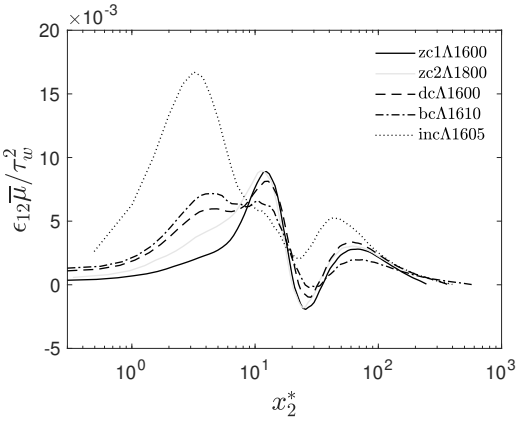


Abbildung 4.34: Vergleich der Dissipation ϵ_{12}

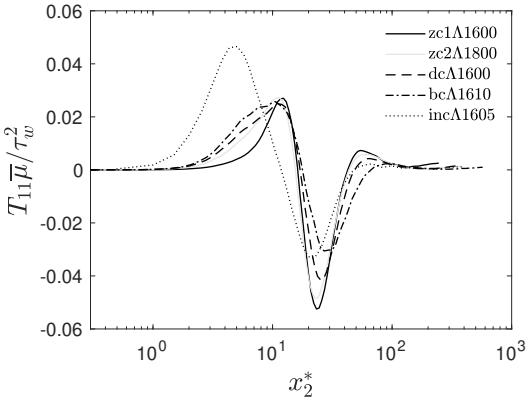


Abbildung 4.35: Vergleich des turbulenten Transports T_{11}

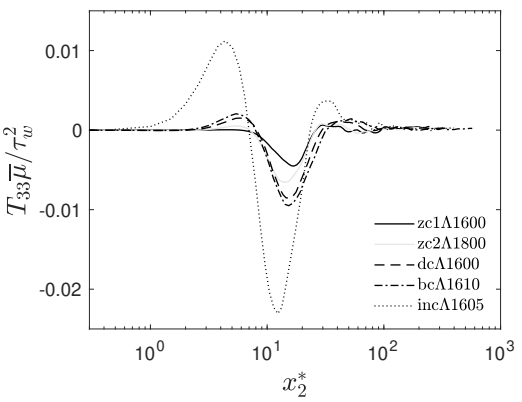


Abbildung 4.36: Vergleich des turbulenten Transports T_{33}

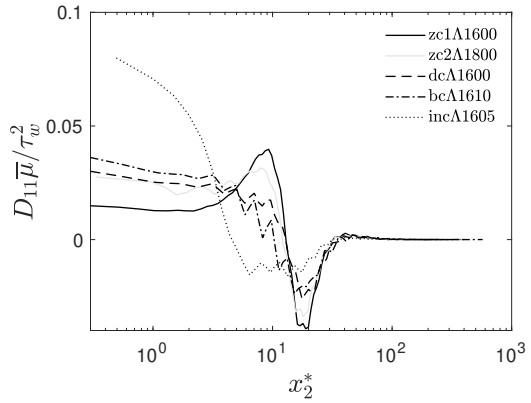


Abbildung 4.37: Vergleich des viskosen Transports D_{11}

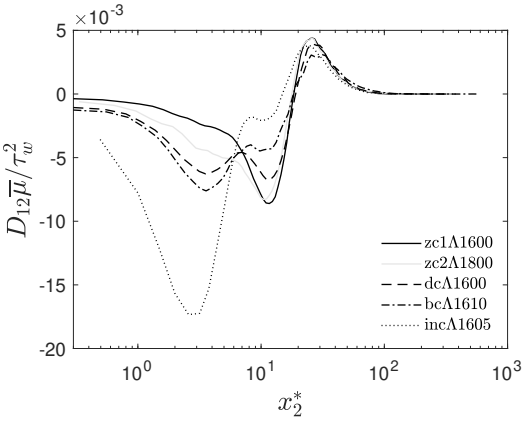


Abbildung 4.38: Vergleich des viskosen Transports D_{12}

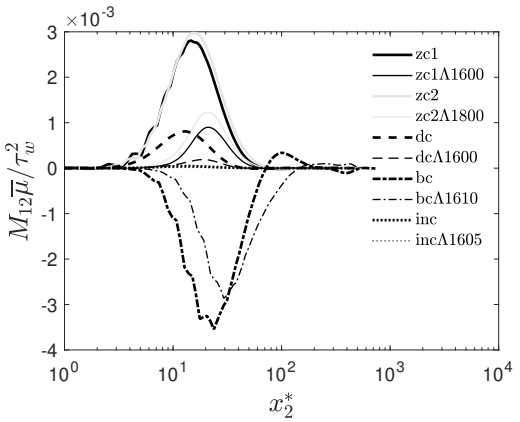


Abbildung 4.39: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{12} zusammen mit den unbeeinflussten Fällen

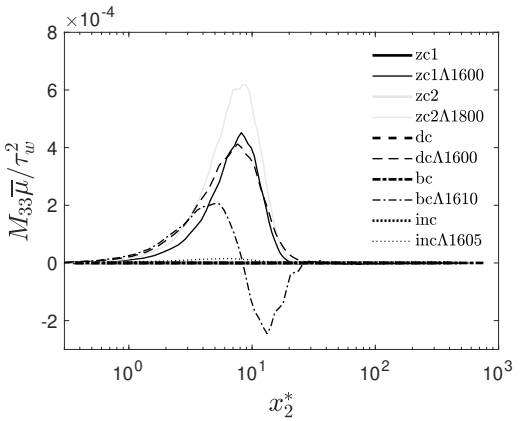


Abbildung 4.40: Vergleich des turbulenten Massenflusses M_{33} zusammen mit den unbeeinflussten Fällen

nahezu gleich ist. Bei der 22-Komponente kommt es, wie schon bei den unbeeinflussten Strömungen gesehen, zu einer starken Dämpfung in der Übergangsschicht im Fall *bc*. Die Peaks werden gegenüber den inkompressiblen Verläufen teilweise nach außen verschoben, wie beispielsweise in der Dissipation ϵ_{12} (Abbildung 4.34) und im turbulenten Transport T_{11} (Abbildung 4.35) zu sehen. Teilweise formieren sich auch neue kleinere Peaks aufgrund der Kühlmethode oder der Beeinflussung, etwa beim viskosen Transport D_{11} und D_{12} (Abbildungen 4.37 und 4.38). Die turbulenten Massenflüsse M_{12} und M_{33} sind in den Abbildungen 4.39 und 4.40 zusammen mit den Profilen der unbeeinflussten Strömungen gezeigt, wenngleich deren Größenordnung gegenüber den anderen Termen vernachlässigbar ist. Bei dem turbulenten Massenfluss M_{12} ist für die Konfiguration *bc* gegenüber den anderen kompressiblen Strömungen eine vergleichsweise niedrigere Dämpfung aufgrund der Beeinflussung zu sehen (Abbildung 4.39). Der Term M_{33} ist nahezu vollständig der Beeinflussung geschuldet, was der Vergleich mit den unbeeinflussten Profilen deutlich macht (Abbildung 4.40). Generell lässt sich analog zu den unbeeinflussten Fällen eine starke Dämpfung der Profile bei den kompressiblen Strömungen ohne Kühlterm in unmittelbarer Wandnähe feststellen. Die turbulente Scherspannung $-\widetilde{u_1''u_2''}$ im Fall *zc2* übersteigt jedoch die Werte der Konfiguration *dc* in der Übergangsschicht (Abbildung 4.24d), was zu insgesamt schlechteren Ergebnissen bezüglich der Widerstandsreduktion führt. Die deutlich schlechteren Werte der Widerstandsreduktion der Konfiguration *bc* gegenüber *dc* bleiben jedoch auffällig, zumal die Profile der Bilanzterme ein sehr ähnliches Verhalten zeigen. Eine Ausnahme bildet alleine die 12-Komponente der Druckscherkorrelation, welche für die Konfiguration *bc* im Gegensatz zu den anderen in der viskosen Unterschicht nicht vom Verlauf der inkompressiblen Strömung abweicht (Abbildung 4.30).

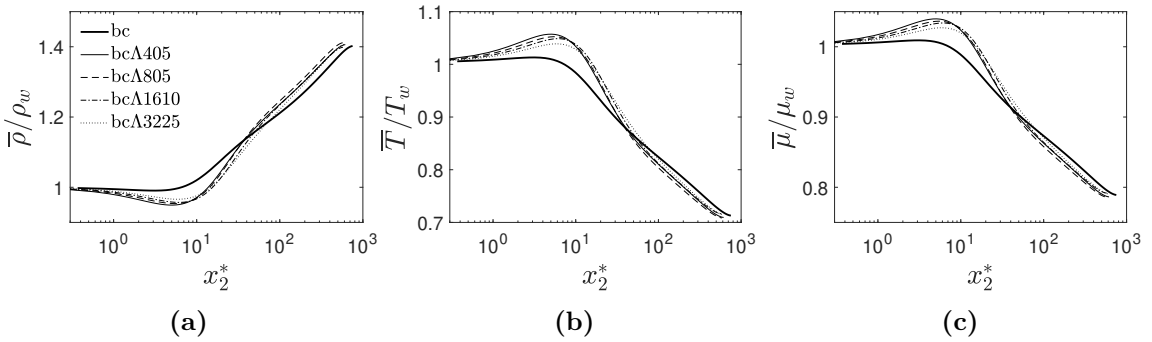
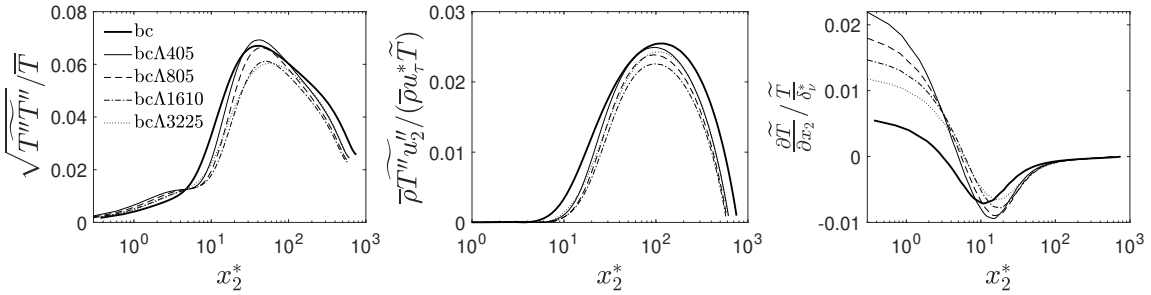


Abbildung 4.41: Mittlere Profile der Dichte (a), der Temperatur (b) und der Viskosität (c) für die unbeeinflusste Strömung und die beeinflussten Strömungen mit räumlich konstantem Kühlterm.

4.3.2. Wärmebilanz

Die bisherigen Ergebnisse offenbaren eine gesteigerte Anisotropie und Dämpfung der turbulenten Spannungen in der wandnahen Schicht bei der Konfiguration *bc* mit konstantem Kühlterm sowohl in der unbeeinflussten als auch in der beeinflussten Strömung. Der Effekt kann nur durch intrinsische Kompressibilitätseffekte, der Wandkühlung oder einer Kombination von beidem hervorgerufen werden, da die Strömung bis zu einem Wandabstand von $x_2^+ \approx 10$ nur geringe Variationen der mittleren Dichte, Temperatur und Viskosität aufweist. Trotzdem spiegelt sich dieser begünstigende Effekt nicht wie bei den anderen kompressiblen Fällen in den Ergebnissen der Widerstandsreduktion wider (Abbildung 4.21). Der Grund dafür wird in diesem Abschnitt in der Wärmebilanz gesucht. Wie schon in der Tabelle der beeinflussten Simulationsparameter (Tabelle 4.4) gesehen, kommt es im *bulk cooling* Fall zu einer starken Änderung des Wandwärmeübergangskoeffizienten und der Stantonzahl nach Anwendung der Strömungsbeeinflussung durch deren thermischen Effekte. Trotz gleichem Verhältnis von Wand- zu Recovery-Temperatur und unveränderter Eckertzahl im unbeeinflussten und beeinflussten Zustand ändern sich die Profile der mittleren thermischen Größen in Wandnähe grundlegend (Abbildung 4.41). In der viskosen Unterschicht erhöht sich die mittlere Temperatur durch die Beeinflussung um 4 bis 6 Prozent der Wandtemperatur, wobei die Erhöhung mit zunehmender Beeinflussungswellenlänge abnimmt (Abbildung 4.41b). In ähnlicher Weise wird die Viskosität beeinflusst durch die direkte Abhängigkeit von der Temperatur (Abbildung 4.41c). Die Dichte verhält sich nach dem idealen Gasgesetz und der geringen Variation des Druckes umgekehrt (Abbildung 4.41a). RMS-Werte der Temperatur sind in Abbildung 4.42 gezeigt, zusammen mit den mittleren Profilen des wandnormalen turbulenten Wärmeflusses und des Temperaturgradienten in wandnormaler Richtung. Von den verschiedenen Kühlstrategien kommt es nur im Fall *bc* zu einer Zunahme der Temperatur-RMS in Wandnähe (Abbildung 4.22c), was in Abbildung 4.42a) noch einmal für verschiedene



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung 4.42: Temperatur-RMS $\sqrt{\widetilde{T''T''}}/\overline{T}$ (a), wandnormaler turbulenter Wärmefluss $\overline{\rho}\widetilde{T''u_2''}/(\overline{\rho}u_\tau^*\widetilde{T})$ (b) und Temperaturgradient $\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_2}/\frac{\widetilde{T}}{\delta_\nu^*}$ (c) der Strömungskonfigurationen *bc*.

Beeinflussungswellenlängen bestätigt wird. Die Veränderung des mittleren Temperaturprofils führt zu starken Änderungen des Temperaturgradienten (Abbildung 4.42c). Da die Wandoszillationen generell Fluktuationen in Wandnähe dämpfen, nimmt dort auch der turbulente Wärmefluss ab (Abbildung 4.42b) und damit auch die Produktion der Temperaturvarianz, die nach Gleichung 4.9 als Produkt aus turbulentem Wärmefluss und mittlerem Temperaturgradient definiert ist. Die Temperaturvarianz kann jedoch darüber hinaus durch die mittlere Wärmeleitung erhöht werden [57]. Die starke Erhöhung des mittleren Temperaturgradienten ist eine Folge der dünnen Schicht spannweitiger Geschwindigkeit in Wandnähe, generiert durch die Wandoszillationen. Wie schon im Kapitel 3 gesehen, kann diese sehr gut durch die laminare Stokes-Theorie beschrieben werden. Ni et al. [108] leiteten auf diese Weise folgende eindimensionale Wärmediffusionsgleichung für zeitliche Wandoszillationen ab:

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x_2,t) = \frac{\gamma(\gamma-1)Ma^2}{\rho Re}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}u_3(x_2,t)\right]^2 + \frac{\mu\gamma}{\rho RePr}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}T(x_2,t) \quad . \tag{4.12}$$

Die Stokes-Geschwindigkeitsschicht in Spannweitenrichtung wirkt hier als Quellterm, dessen Stärke von der Machzahl und dem Geschwindigkeitsgradienten $\partial u_3/\partial x_2$ abhängt. Der Geschwindigkeitsgradient hängt wiederum ab von der dimensionslosen Beschleunigung A/T, welche sich bei den zeitabhängigen Wandoszillationen aus den Beeinflussungsparametern Amplitude A und Periode T zusammensetzt [45]. Im Fall ohne Kühlterm hat die Wärmequelle der Stokes-Schicht einen vernachlässigbaren Einfluss in Wandnähe, weil die Kühlintensität so hoch ist. Die zusätzliche Wärme sorgt für eine leichte Erhöhung der bulk Temperatur bis die gesamte Wärme in der Strömung schließlich im Gleichgewicht mit dem Wärmestrom an den Wänden ist. Die Konfiguration *dc* kompensiert den thermischen Effekt der Stokes-Schicht vollständig durch den Kühlterm in Form der mittleren Dissipation. Das Eingreifen des Kühlterms wird in Tabelle 4.5 für die beiden Konfigurationen *dc* und *bc* sichtbar. Der sprunghafte Anstieg des Wandwärmeübergangskoeffizienten der Konfiguration *bc* so-

Case	C_f $(\times 10^{-3})$	$-B_q$ $(\times 10^{-2})$	$-B_{q0}$ $(\times 10^{-2})$	$\overline{\Psi}\mu_w/\tau_w^2$ $(\times 10^{-3})$	$\overline{\Psi}\mu_w/\tau_{w0}^2$ $(\times 10^{-3})$
dc	4.35	0.17	0.17	36.87	36.87
dcΛ400	2.92	-0.34	-0.27	110.26	46.94
dcΛ800	2.64	-0.19	-0.14	112.20	39.23
dcΛ1600	2.49	-0.11	-0.08	106.36	33.42
dcΛ3195	2.82	0.20	0.16	80.81	33.03
bc	3.22	0.89	0.89	3.08	3.08
bcΛ405	2.19	3.41	2.77	5.18	2.28
bcΛ540	2.11	3.10	2.49	5.28	2.16
bcΛ805	1.99	2.78	2.15	5.68	2.06
bcΛ1610	1.94	2.21	1.71	5.89	2.04
bcΛ3225	2.16	1.77	1.46	5.21	2.32

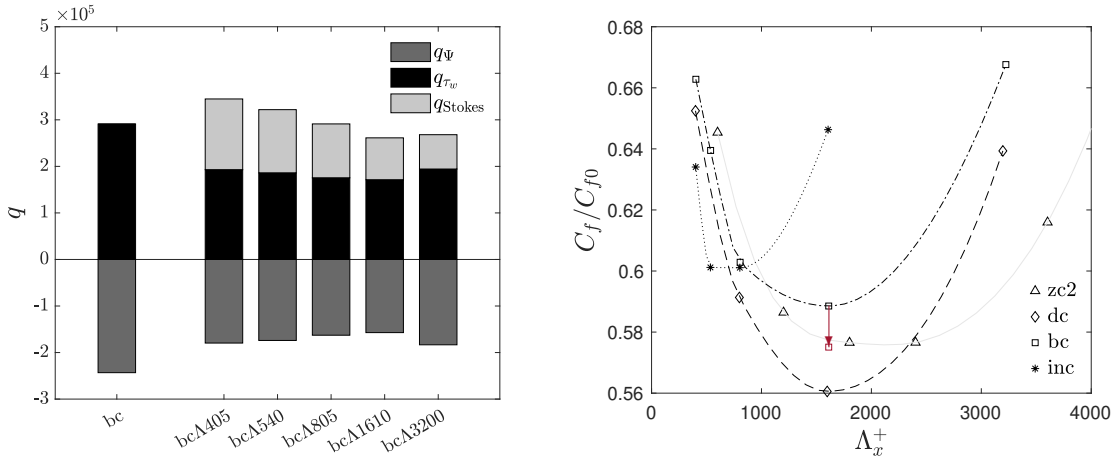
Tabelle 4.5: Reibungskoeffizient $C_f = 2\tau_w/(\rho_c u_c^2)$, Wandwärmeübergangskoeffizient B_q und räumlich gemittelter Kühlterm $\overline{\Psi}$ für die Konfigurationen *dc* und *bc*. Der Index 0 kennzeichnet die Nutzung der Wandgrößen u_τ und τ_w der unbeeinflussten Strömung.

bald die Beeinflussung angewandt wird, wird auch im räumlich gemittelten Kühlterm Ψ deutlich. Der Anstieg wandelt sich jedoch in eine Reduktion des Wertes um, wenn der Kühlterm stattdessen mit der Wandschubspannung τ_{w0} der unbeeinflussten Strömung normiert wird. Der räumlich konstante Kühlterm der Konfiguration *bc* wird derart gewählt, dass die bulk Temperatur im Kanal gleich bleibt. Da die thermischen Effekte der Stokes-Schicht stark lokal an der Wand auftreten, werden diese durch den konstanten Kühlterm nur sehr begrenzt ausgeglichen. Der Vergleich mit der Konfiguration *dc* in Tabelle 4.5 zeigt das viel stärkere Eingreifen des Kühlterms in letzterem Fall. In unbeeinflusster Kanalströmung ohne Energiesenkenterm steht der Wandwärmestrom gemäß Gleichung 3.51 mit $-u_b\tau_w$ im Gleichgewicht. Eine Abschätzung für die Wandwärmestrombilanz soll nun für die Konfiguration *bc* erfolgen, wo zusätzlich thermische Effekte aufgrund der Beeinflussung und des Energieterms auftreten. Ausgangspunkt ist die reynoldsgemittelte Energiegleichung [97]

$$\frac{\partial\overline{\rho E}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{c_p}{Pr}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial\overline{u_2 p}}{\partial x_2} + \frac{\partial\overline{u_1\tau_{21}}}{\partial x_2} + \frac{\partial\overline{u_2\tau_{22}}}{\partial x_2} + \frac{\partial\overline{u_3\tau_{23}}}{\partial x_2} + \overline{f_{\rho u_1}u_1} - \overline{\Psi}\,. \quad (4.13)$$

Integration über eine Kanalhälfte liefert

$$0 = -q_w + \underbrace{\int_{-h}^{0}\frac{\partial\overline{u_3\tau_{23}}}{\partial x_2}dx_2}_{q_{\mathrm{Stokes}}} + f_{\rho u_1}u_b h \underbrace{-\Psi h}_{q_\Psi} \quad .$$



(a) **(b)**

Abbildung 4.43: (a) Wärmestrombilanz für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle mit *bulk cooling* Strategie nach Gleichung 4.14. (b) Änderung der Widerstandsreduktion des Falls bcΛ1610 nach Eliminierung der von der Strömungsbeeinflussung hervorgerufenen Wärme q_{Stokes} (gekennzeichnet durch den roten Pfeil).

Mit der antreibenden Kraft $f_{\rho u_1} = \tau_w/h$ folgt für den Wandwärmestrom

$$q_w = q_{\text{Stokes}} + \underbrace{u_b \tau_w}_{q_{\tau w}} + q_\Psi = q_{\text{Stokes}} + q_{\tau_w} + q_\Psi \quad . \tag{4.14}$$

Neben der Wandschubspannung tragen zusätzlich die Stokes-Schicht und der Kühlterm Ψ zum Wandwärmestrom bei. Die einzelnen Terme sind für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle der Konfiguration *bc* in Abbildung 4.43a dargestellt. Der Anteil aufgrund des Kühlterms q_Ψ sinkt in den beeinflussten Fällen im Vergleich zum unbeeinflussten Fall und behält für alle Beeinflussungswellenlängen ein in etwa gleiches Verhältnis zum Anteil q_{τ_w} bei. Im Balkendiagramm wird noch einmal bildlich klar, dass der Beitrag zum Wandwärmestrom aufgrund der Stokes-Schicht für kleine Beeinflussungswellenlängen in der selben Größenordnung wie die Anteile aufgrund der Wandschubspannung und des Kühlterms ist und dementsprechend großen Einfluss bei dieser Kühlkonfiguration ausübt. Im Gegensatz zum unbeeinflussten Fall steht der Kühlterm im beeinflussten Strömungszustand nicht nur mit der Wandschubspannung im Gleichgewicht, sondern zusätzlich mit der Wärme, die durch die Wandoszillationen hervorgerufen wird. Wie der Vergleich mit dem Fall *dc* in Tabelle 4.5 zeigte, gleicht der Kühlterm diese Wärme nur zu einem geringen Teil aus. Damit stellt sich gegenüber dem unbeeinflussten Fall ein stark veränderter Zustand in Wandnähe ein. Die Beeinflussung sorgt für eine zunehmenden Wandwärmestrom. Die Eckertzahl, die normalerweise eine Vergleichbarkeit hinsichtlich der

Wandwärmeübergangsbedingungen gewährleistet, verliert damit bei dem Übergang vom unbeeinflussten zum beeinflussten Zustand ihre Gültigkeit als Ähnlichkeitsparameter. Cogo et al. [35] konnten beispielsweise eine Überlappung der Profile der Temperatur-RMS in Wandnähe bei gleichem diabatischen Parameter Θ zeigen. Für die beeinflussten und unbeeinflussten Strömungen mit Kühlkonfiguration *bc* gelingt dies unabhängig von der gewählten Normierung nicht (Abbildung 4.42a). Da auch die Wandschubspannung in der Bilanzierung in Gleichung 4.14 vorkommt, ist zu erwarten, dass auch diese auf die geänderten Wandwärmebedingungen im Vergleich zur unbeeinflussten Strömung reagiert, zumal die Erhöhung der Viskosität in Wandnähe (Abbildung 4.41c) eine Erhöhung der viskosen Spannung zur Folge hat. Ein deutlicher Anstieg des Reibungskoeffizienten mit steigendem Wandwärmeübergang ist beispielsweise in Cogo et al. [35] und Hadjadj et al. [71] zu sehen. Eine zusätzliche Simulation mit optimaler Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x^+ = 1610$, bei der die von der Strömungsbeeinflussung hervorgerufene mittlere Wärme q_{Stokes} über einen weiteren Senkenterm in der Energiegleichung ausgeglichen wird, bestätigt die Sensitivität der Wandschubspannung gegenüber der Wärme der Stokes-Schicht. Unter Anpassung des Kühlterms Ψ, um weiterhin eine konstante Eckertzahl zu gewährleisten, sinkt die Wandschubspannung um weitere 2,5 % (siehe Abbildung 4.43b) und eine Widerstandsreduktion ähnlich zum Fall *zc2* ohne Kühlterm wird erreicht. Ein nennenswerter Anteil des Reibungswiderstands im Fall bcΛ1610 entfällt damit auf die Wärmegenerierung durch die Wandoszillationen. Die modifizierten thermischen Wandbedingungen gegenüber dem unbeeinflussten Fall erklären die Unterschiede in der Widerstandsreduktion zwischen den Konfigurationen *bc* und *dc* teilweise. Die restliche Abweichung dürfte durch die erhöhte lokale Reynoldszahl der Konfiguration *bc* (Abbildung 4.7a) bei größeren Wandabständen hervorgerufen sein, die sich bei Auftragung über der semilokalen Wandkoordinate in höheren turbulenten Spannungen in diesem Bereich äußert (Abbildung 4.24). Wie die Energiespektren in Abschnitt 3.10 zeigten, ist die widerstandsreduzierte Strömung stark von den großen Skalen in der äußeren Schicht geprägt, die durch die Wandoszillationen naturgemäß weniger stark beeinflusst werden.

4.4. Zusammenfassung

> In wandgebundenen supersonischen Strömungen variieren Dichte und Temperatur wie auch Viskosität stark in Wandnähe. Eine Folge dessen sind starke lokale Variationen der Reynolds- und Machzahl und damit Kompressibilitätseffekte aufgrund variabler Fluideigenschaften. Im vorangegangenen Kapitel wurden deswegen Kühlterme zur Energiegleichung hinzugefügt, um intrinsische Kompressibilitätseffekte besser zu isolieren und deren Einfluss quantifizieren zu können. Durch die zusätzliche Kühlung muss die entstehende Wärme im Kanal nicht mehr allein über die Wände abgeführt werden. Dichtefluktuationen, die nicht durch Änderungen des

Drucks, sondern durch Änderungen der Entropie begründet sind, werden dadurch reduziert.
Der Kühlterm wurde im Fall *bulk cooling* als räumlich konstant definiert. Als Folge ergibt sich ein mittlerer Temperaturverlauf ähnlich zu Grenzschichtströmungen mit schwach gekühlten Wänden. Die mittlere Temperatur steigt von der Wand weg leicht an mit Maximum in der viskosen Unterschicht und fällt mit zunehmendem Wandabstand ab. Der Vergleich zur entsprechenden beeinflussten Strömung erfolgt auf Basis einer konstanten Eckertzahl. Im Fall *dissipation cooling* wird der unbeeinflussten und beeinflussten Strömung die jeweilige viskose Dissipation $\overline{\tau_{ij}\partial u_i/\partial x_j}$ entzogen, was ein nahezu konstantes mittleres Temperaturprofil zur Folge hat.
Die Strömungen mit Kühlterm und der inkompressible Fall werden untereinander bei gleicher Reynoldszahl $Re_\tau \approx 510$ an der Wand verglichen. Aufgrund nahezu konstanter Fluideigenschaften bei eliminierter viskoser Aufheizung lässt sich der Fall *dissipation cooling* besonders gut mit der inkompressiblen Strömung vergleichen. Die Anisotropie der turbulenten Spannungen in Wandnähe ist gegenüber der inkompressiblen Strömung erhöht und die Druckscherkorrelationen und Dissipationsterme gedämpft. Gleiches gilt für den *bulk cooling* Fall, wo Wärmeleitungseffekte in Wandnähe gegenüber den Kanalströmungen ohne Kühlterm stark reduziert sind. Die betrachteten Konfigurationen mit Kühlterm offenbaren als Folge auch die Wichtigkeit von intrinsischen Kompressibilitätseffekten für das geänderte Verhalten in den supersonischen Strömungen. Sie sorgen in den beeinflussten Strömungen für eine höhere erzielbare Widerstandsreduktion und eine Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge zu größeren Werten. Die Effekte fallen im Fall *dissipation cooling* ähnlich stark aus wie in der Strömung ohne Kühlterm, wenn diese unter derselben semilokalen Reynoldszahl in der Kanalmitte und auf Basis der entsprechend skalierten Beeinflussungswellenlänge Λ_x^* verglichen werden. Der Fall mit räumlich konstantem Kühlterm und grenzschichtähnlichem Temperaturverlauf zeigte sich sensitiv gegenüber der lokal in Wandnähe eingebrachten zusätzlichen Wärme durch die Beeinflussung, was sich in einer nur marginal höheren Widerstandsreduktion im Vergleich zum inkompressiblen Fall bemerkbar machte. In externen supersonischen Strömungen muss die Beeinflussungsstrategie mit dem Ziel einer bestmöglichen Widerstandsreduktion daher angepasst werden.

5. Runder Freistrahl

Wandoszillationen in Spannweitenrichtung, bzw. Wanderwellen, die sich in Strömungsrichtung ausbreiten, werden seit der bahnbrechenden Arbeit von Jung et al. [83] drei Jahrzehnte lang erforscht [63]. Der Großteil richtet sich an das Verständnis für die Mechanismen der Widerstandsreduktion (z.B. Touber und Leschziner [139]) und die Wahl der Parameter (z.B. Du et al. [48], Quadrio et al. [118]). Andere untersuchte Aspekte betreffen die Wellenform [56, 32], die Abhängigkeit von der Reynoldszahl [59, 60, 156, 63], die energetische Betrachtung [55, 62] oder die Strömungsbedingungen wie etwa raue Wände [43] oder Kompressibilität [108, 154, 58, 127]. Neben der Hauptintention der Oszillationen und Wellenbewegungen, den Widerstand in turbulenter Strömung zu reduzieren, werden in jüngster Zeit auch andere Begleiteffekte untersucht, wie etwa die Wirkung der Wanderwellen spannweitiger Geschwindigkeit auf das aerodynamische Verhalten transsonischer Tragflügel [15]. Die Geometrie ist dort komplexer und es ergeben sich zusätzlich Interaktionen mit Stößen und eine Beeinflussung von Auftrieb und Akustik. Die großflächige Generierung spannweitiger Geschwindigkeit in Wandnähe zur Reduzierung des Strömungswiderstandes in praktischen Anwendungen stellt bis dato noch große Hürden dar. Unter Umständen kann am Beispiel des Tragflügels auch mit einer begrenzten, lokalen Anwendung der Strömungsbeeinflussung ein großer Effekt erzielt werden, der den Aufwand deutlich übertrifft. Inspiriert durch die Experimente mit Wandoszillationen in einer Rohrströmung von Choi und Graham [31], Auteri et al. [8] und Ding et al. [45] wird in diesem Kapitel ein weiterer Anwendungsfall erprobt, bei dem die lokale Anwendung der Beeinflussung in ähnlicher Weise einen großen globalen Effekt haben könnte. Choi und Graham [31] und Ding et al. [45] ließen die Wand einer Rohströmung in Umfangsrichtung zeitabhängig oszillieren, während Auteri et al. [8] die Wand in unabhängig voneinander bewegbare Segmente aufteilten, um die hier verwendeten stehenden Wellen in Abhängigkeit der Koordinate in Strömungsrichtung oder sogar laufende Wellen der Geschwindigkeit in Umfangsrichtung zu realisieren. Die Strömungsbeeinflussung lässt sich generell neben Grenzschicht- und Kanalströmung ebenso gut auf Rohrströmungen anwenden. Der Effekt der Beeinflussung des wandnahen Turbulenzkreislaufs ist dort aufgrund des relativ hohen Wandanteils der Strömung tendenziell



Abbildung 5.1: 3D Visualisierung der Rohr/Freistrahl-Kombination zur Illustration mithilfe des Wirbelstärkebetrags (, $200 < |\boldsymbol{\omega}| < 8000$).

noch größer. Aktuelle numerische Untersuchungen mit verschiedenen Reynoldszahlen $Re_\tau = [170, 360, 720]$ zeigen jedoch bereits einen negativen Effekt auf die Widerstandsreduktion durch die sehr großen Skalen in der logarithmischen und äußeren Schicht [38]. Deren Bedeutung scheint gerade bei der Rohrströmungskonfiguration besonders ausgeprägt zu sein. Coxe et al. [38] bringen daher schon jetzt die Notwendigkeit neuartiger Mechanismen der Widerstandsreduktion ins Gespräch, die speziell auf die großen und sehr großen Strukturen abzielen. Xiao et al. [151] zeigten dagegen, dass eine hohe Widerstandsreduktion auch ohne komplizierte Regelungsvorschriften in der Wandregion möglich ist, die sogar mit der Reynoldszahl zunimmt. Durch eine gleichförmige Rotation des gesamten Rohrs in Umfangsrichtung wurde rund 70 % Widerstandsreduktion bei nominaler Reynoldszahl $Re_{\tau 0} = 3020$ erzielt, obwohl die Strömung weiterhin von vollständiger Relaminarisierung weit entfernt ist [151].

Die Methode zur Widerstandsreduktion in Rohrströmungen mithilfe stehender Wellen der Geschwindigkeit in Umgangsrichtung analog zu den Kanalströmungen in den Kapiteln 3 und 4 wird hier aufgegriffen, um deren Wirkung auf einen Freistrahl zu untersuchen, der von dem Rohr ausgeht. Die Strömungskonfiguration ist in Abbildung 5.1 mithilfe des Betrags der Wirbelstärke visualisiert. Es existieren zahlreiche Verfahren speziell für die Beeinflussung von Freistrahlen, die gewöhnlicherweise auf die Durchmischung und Schallemission abzielen (z.B. [79, 162, 7]). Die Idee, den Freistrahl durch eine Methode zu beeinflussen, die typischerweise zur Reduzierung des Wandreibungswiderstandes verwendet wird, ist dagegen meines Wissens nach neu. Dementsprechend existieren keine Vergleiche in der Literatur und die zu erwartenden Effekte bleiben zunächst völlig offen. Fragen, die sich beispielsweise stellen sind, in welchem Maße die Wandoszillationen im Gebiet des Freistrahls spürbar sind und sich dort auswirken und wie sich die Statistiken wie etwa die Strahlaufweitung ändern. Die Simulationen werden bei konstantem Massenstrom im beeinflussten und unbeein-

flussten Zustand durchgeführt. Ein positiver Effekt würde sich daher bei ähnlichem beeinflusstem und unbeeinflusstem Verhalten allein schon aus energetischer Sicht ergeben. Zur Generierung des Freistrahls wird aufgrund der Widerstandsreduktion im Rohr weniger Energie benötigt. In ähnlicher Weise könnte durch die Beeinflussung bei unveränderter antreibender Kraft eine höhere axiale Austrittsgeschwindigkeit erzielt werden. Beide Ansätze zur Evaluierung der Leistungsfähigkeit von Methoden zur Widerstandsreduktion in internen Strömungen werden allgemein in Frohnapfel et al. [55] diskutiert. Für den runden Freistrahl existieren zahlreiche Untersuchungen in der Literatur, z.B. Hussein et al. [76], Bogey und Bailly [21], Bodony und Lele [18]. Oft wird eine laminare Strömung innerhalb der Düse betrachtet oder die Düse selbst ist im Simulationsgebiet gar nicht inbegriffen. Die Turbulenztransition wird ohne Einbeziehung der Düse typischerweise durch Überlagerung der Einlassgeschwindigkeit mit divergenzfreien breitbandigen Geschwindigkeitsfluktuationen und stochastischen Wirbelringstörungen herbeigeführt [20, 53]. Bei der betrachteten Rohr/Freistrahl-Kombination mit Turbulenzgenerierung am Einlass des Rohrs ist die Strömung am Rohrauslass bereits voll-turbulent, was für deutliche Verbesserungen des Strömungsfeldes und der Schallvorhersagen sorgt [26].

5.1. Numerische Spezifikationen

Betrachtet wird ein Freistrahl mit einer Machzahl $Ma_j = U_j/c_j$ von 0.3 und einer Reynoldszahl, basierend auf dem Rohrdurchmesser $Re_d = \rho_j U_j d/\mu_j$ von 12000 in Anlehnung an Loppi et al. [99] und Panchapakesan und Lumley [109]. Der Index $(\cdot)_j$ kennzeichnet jeweils die Bedingungen im Freistrahlzentrum am Auslass des Rohrs. Innerhalb des Rohrs ergibt sich die bulk Reynoldszahl $Re_b = 2Ru_b/\nu_w = 1.17{\cdot}10^4$ und eine Reynoldszahl basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit $Re_\tau = Ru_\tau/\nu_w$ von 365, wobei R den Radius des Rohrs bezeichnet. Eine schematische Darstellung der betrachteten Strömungskonfiguration ist in Abbildung 5.2 gegeben. Die zugrundeliegenden Gleichungen entsprechen denen in Abschnitt 2.2, wobei hier aufgrund der nicht vorhandenen periodischen Randbedingungen die Regelung von Massenfluss und Dichte entfällt. Zudem stellte sich hier der Rusanov Riemann-Löser für das Elementinterface, gegenüber HLL (Harten, Lax and van Leer) bei den Kanalströmungen, als geeigneter heraus. Die Gleichungen werden in kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) gelöst, die nachträgliche Beschreibung der Strömung geschieht aufgrund der Rotationssymmetrie jedoch in Zylinderkoordinaten (x, r, φ). Die Umrechnung der

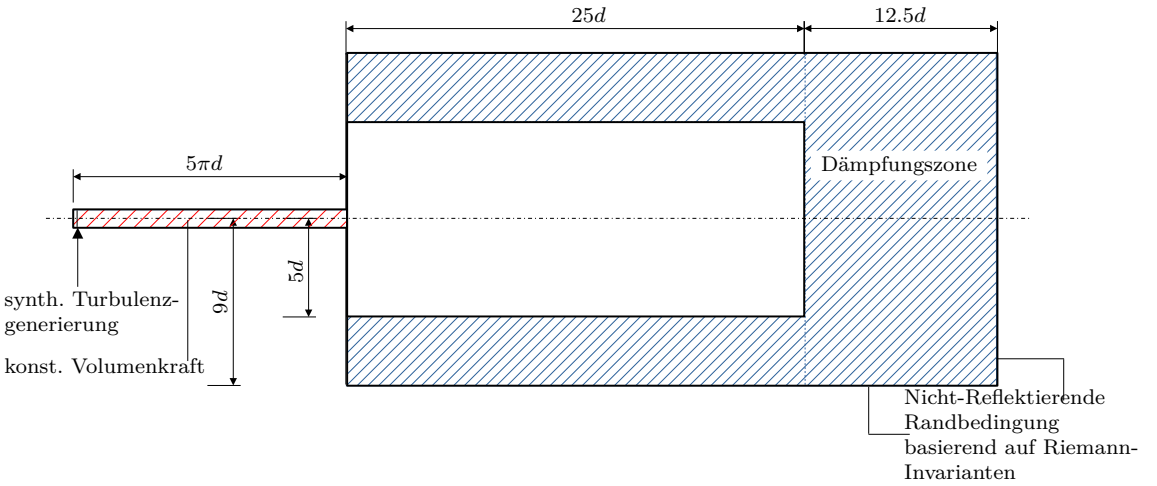


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des numerischen Setups der achsensymmetrischen Rohr/Freistrahl-Kombination.

Geschwindigkeitskomponenten in Zylinderkoordinaten erfolgt über

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 \\ u_r &= u_2 \sin(\varphi) + u_3 \cos(\varphi) \\ u_\varphi &= -u_2 \cos(\varphi) + u_3 \sin(\varphi) \\ r &= \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos(\frac{x_3}{r}) & x_2 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(\frac{x_3}{r}) & x_2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.1}$$

und umgekehrt von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten durch

$$\begin{aligned} u_1 &= u_x \\ u_2 &= u_r \sin(\varphi) + u_\varphi \cos(\varphi) \\ u_3 &= u_r \cos(\varphi) - u_\varphi \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\varphi = \arctan2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin(\varphi) \\ x_2 &= r \cos(\varphi) \quad . \end{aligned}$$

Der Rohrbereich erstreckt sich über eine Länge von $5\pi d$. Innerhalb dieses Bereichs ist die Strömung durch eine konstante Volumenkraft angetrieben, die aus einer separaten Simulation der Rohrströmung mit periodischen Rändern in Strömungsrichtung bekannt ist (Appendix B.1). Die axiale Geschwindigkeit am Eingang des Rohrs wird über ein Profil der Form

$$1.25 u_b \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) \tag{5.4}$$

initialisiert. Unmittelbar hinter dem Einlass erfolgt die synthetische Turbulenzgenerierung basierend auf einer Quelltermformulierung der Synthetic-Eddy Methode [65]. Ziel der synthetischen Turbulenz ist es, Fluktuationen mit geeigneter Amplitude und angemessenen Längen- und Zeitskalen zu generieren, sodass sich nach möglichst kurzer Lauflänge eine turbulente Strömung einstellt, die am Rohrausgang voll entwickelt ist. Die Wahl geeigneter Fluktuationen erfolgt basierend auf den Profilen der Reynoldsspannungen der periodischen Rohrsimulation, sowie charakteristischen Längenskalen, die durch Integration der Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeit gewonnen werden. Die volle Anisotropie der Längenskalen in turbulenter Rohrströmung wird auf diese Weise berücksichtigt, was die Entwicklungslänge gegenüber der Wahl der charakteristischen Längenskalen unter der Annahme von Isotropie oder teilweiser Anisotropie noch einmal verkürzt [65]. An den Rohrbereich schließt sich in positiver x-Richtung das Gebiet des Freistrahls an, welches durch einen Zylinder mit den Abmessungen $75R$ und $18R$ in der axialen und radialen Richtung begrenzt ist. Die im verwendeten Code PyFR implementierten charakteristischen Randbedingungen basierend auf den Riemann-Invarianten [65, 150] kommen am Einlass des Rohrs, sowie bei den Berandungen des Freistrahls in axialer und radialer Richtung zum Einsatz, wobei die atmosphärischen Werte für den Druck und die Dichte dort gewählt wurden. Die Randbedingungen sind gegenüber Standardrandbedingungen mit festgelegter Geschwindigkeit wesentlich weniger reflektierend [65]. Die Geschwindigkeit am radialen und axialen Auslass des Freistrahlgebiets wurde gemäß der empirischen Formeln in Pope [116] gewählt. Allgemein lässt sich die axiale Variation der Geschwindigkeit auf der Achse $u_0(x)$ jenseits der Entwicklungsregion nahe der Düse durch den linearen Zusammenhang

$$\frac{u_0(x)}{U_j} = \frac{B}{(x - x_0)/d} \tag{5.5}$$

beschreiben. Dabei ist B eine empirische Konstante, die Werte im Bereich 5.8 [76] bis 6.06 [109] annimmt und der Achsenabschnitt der inversen Geschwindigkeit $U_j/u_0(x)$ bei Auftragung über x ist der virtuelle Ursprung x_0. Der Strahl weitet linear auf, dessen Halbwertsbreite $r_{\frac{1}{2}}$ kann durch ein weiteres empirisches Gesetz

$$r_{\frac{1}{2}}(x) = S(x - x_0) \tag{5.6}$$

beschrieben werden mit der Aufweitungsrate S. Die Konstante für den Geschwindigkeitsabfall B und die Aufweitungsrate S sind dabei unabhängig von der Reynoldszahl. Die Profile der axialen und radialen Geschwindigkeitskomponenten können im selbstähnlichen Bereich des Freistrahls approximiert werden [116] durch

$$u_x(x, r) = \frac{U_j B d}{x - x_0} \left(1 + a \frac{r^2}{(x - x_0)^2}\right)^{-2} \tag{5.7}$$

$$u_r(x, r) = \frac{U_j B d}{x - x_0} \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x - x_0} - a \frac{r^3}{(x - x_0)^3} \Big/ \left(1 + a \frac{r^2}{(x - x_0)^2}\right)^2\right) \quad , \tag{5.8}$$

die Konstante a ergibt sich durch die Definition der Halbwertsbreite zu

$$a = (\sqrt{2} - 1)/S^2 \approx 47 \quad . \tag{5.9}$$

Am radialen Rand des Freistrahls wurden die Geschwindigkeitskomponenten 5.7 und 5.8 zusätzlich mit einer hyperbolischen Tangensfunktion multipliziert, um die Geschwindigkeit außerhalb des selbstähnlichen Bereichs, wo die Gleichungen 5.7 und 5.8 nicht gelten, zu Null zu setzen. Diverse Untersuchungen (Colonius et al. [37], Bogey et al. [23]) zeigten, dass trotz spezieller Fernfeldrandbedingungen unphysikalische Reflexionen entstehen, wenn starke Wirbelstärke-Moden das Berechnungsgebiet verlassen [134]. Eine Dämpfungszone mit Gitterstreckung wird daher im Bereich vor den axialen und radialen Rändern angewandt, um die Lösung in diesem Bereich auf die Referenzlösung an den Rändern $\mathbf{v}_{\mathrm{ref}}$ zu forcieren. Dazu wird ein zusätzlicher Dämpfungsterm zum System 2.5 hinzugefügt,

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \cdots - \sigma(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathrm{ref}})_\alpha \,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots 4 \quad , \tag{5.10}$$

für die Komponenten des Lösungsvektors ρ, ρu_1, ρu_2 und ρu_3 mit

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{max},x} \left(\frac{x - x_{\mathrm{min}}}{l_{\mathrm{sp},x}} \right)^2 + \sigma_{\mathrm{max},r} \left(\frac{r - r_{\mathrm{min}}}{l_{\mathrm{sp},r}} \right)^2 . \tag{5.11}$$

Der Dämpfungsterm ist nur im Bereich der Dämpfungszone $x_{\mathrm{min}} \leq x \leq x_{\mathrm{max}}$ bzw. $r_{\mathrm{min}} \leq r \leq r_{\mathrm{max}}$ der Längen $l_{\mathrm{sp},x}$ $l_{\mathrm{sp},r}$ in axialer und radialer Richtung gültig. Die Dämpfungsstärke nimmt ab der Position x_{min} bzw. r_{min} parabolisch mit x und r auf den Wert des Dämpfungskoeffizienten σ_{max} zu. Quadratisch ansteigende Dämpfungszonen stellen den besten Kompromiss zwischen starker Dämpfung und geringer Reflexion an der Zone selbst dar [134]. Empfehlungen zur Wahl der Parameter der Dämpfungszone sind beispielsweise in Mani [100] gegeben.

Abbildung 5.3 zeigt einen Ausschnitt des numerischen Gitters in der $r - \varphi$ Ebene des Freistrahls. Das zweidimensionale strukturierte Gitter wurde in axialer Richtung extrudiert. Die dimensionslosen Gitterweiten als Funktion des Ortes im Freistrahlgebiet sind in Abbildung 5.4 visualisiert. Die axiale Gitterweite wächst ab dem Rohrauslass auf einer Länge von $25d$ von $0.0019d$ linear auf $0.026d$ und nimmt in der anschließenden Dämpfungszone stärker zu um zusätzlich einen Filtereffekt zu generieren. Das Gitter ist im Bereich der Scherschicht bei $r/d = 0.5$ in radialer Richtung gestaucht. Die radiale Gitterweite ist dort mit $\Delta r = 0.0017d$ minimal und wächst bis zum Beginn der Dämpfungszone linear auf $0.1d$. Die radialen Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit an verschiedenen axialen Position im Bereich $15 \leq x/d \leq 20$ (Abbildung 5.5a) fallen nach Normierung mit der Geschwindigkeit $u_0(x)$ auf der Achse und Auftragung über der selbstähnlichen Koordinate $r/(x - x_0)$ gut übereinander. Sie markieren die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit von voll entwickelten turbulenten Freistrahlen. Abbildung 5.5b zeigt eine gute Übereinstimmung der RMS-Werte der

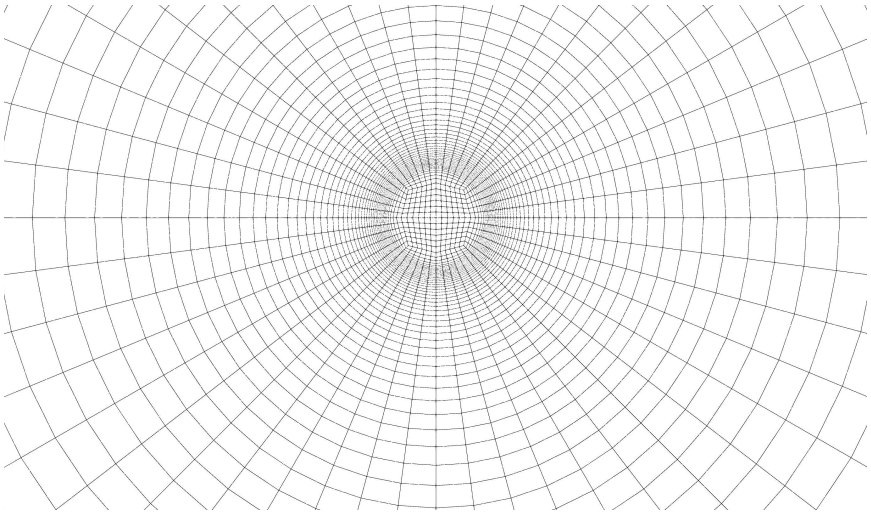


Abbildung 5.3: Ausschnitt des numerischen Gitters in der $r-\varphi$ Ebene im Freistrahlgebiet.

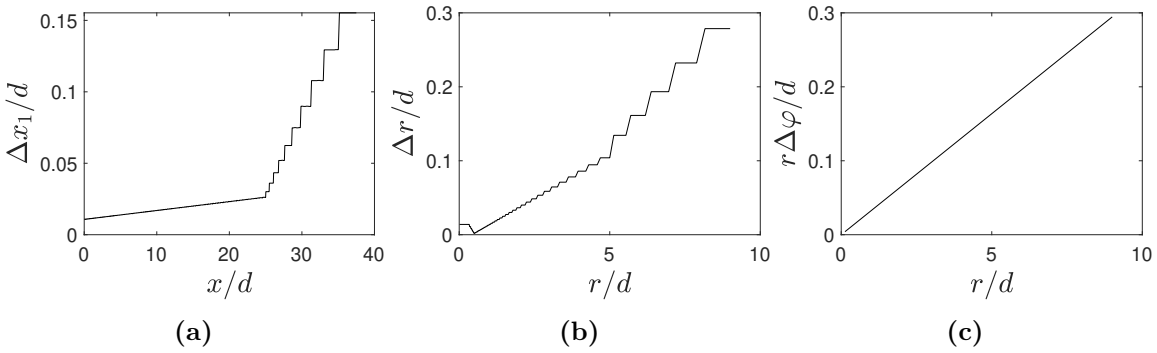


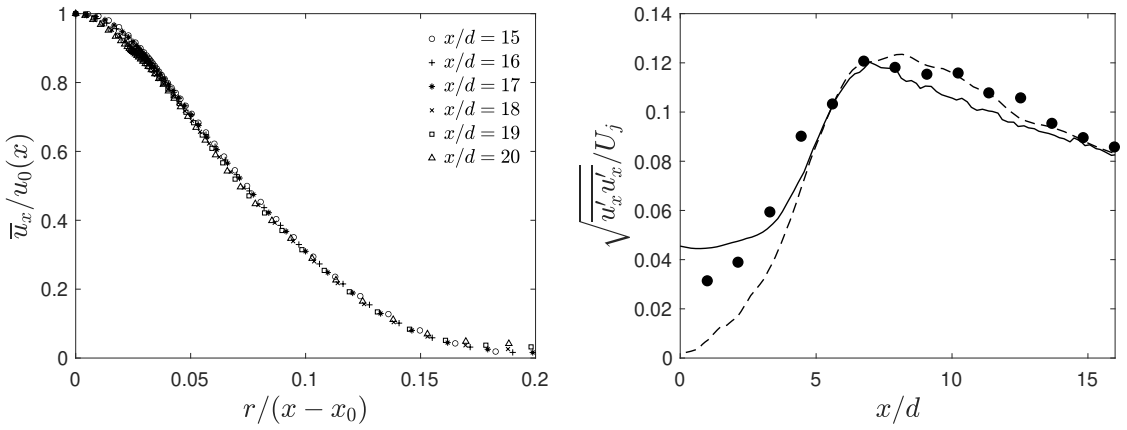
Abbildung 5.4: Dimensionslose Gitterweite im Freistrahlbereich in axialer (a), radialer (b) und azimutaler Richtung (c).

axialen Geschwindigkeitsfluktuationen normiert mit der Austrittsgeschwindigkeit U_j auf der Achse bezüglich der Ergebnisse von Arakeri et al. [7] und Barré et al. [12] (jeweils $Ma_j = 0.9$ und $Re_d = 5 \cdot 10^5$). Selbstähnliches Verhalten zeigt sich auch in den Profilen der turbulenten Spannungen in Abbildung 5.6.

Für die beeinflusste Freistrahlströmung wird die Geschwindigkeit der Rohrwand manipuliert gemäß

$$u_\varphi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_x}\right) x\,, \tag{5.12}$$

eine stehende Welle analog zu den beeinflussten Kanalströmungen, wobei die Geschwindigkeit bei der Rohrströmung in Umfangsrichtung wirkt. Die Amplitude beträgt wie bei den Kanalströmungen $A^+ = 12$ und die Wellenlänge wurde zu $\Lambda_x^+ = 1145$ gewählt, ein Wert der im Bereich des Optimums bei den Kanalströmungen mit



(a) **(b)**

Abbildung 5.5: (a) Radiale Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit normiert mit der lokalen Geschwindigkeit auf der Achse über der selbstähnlichen Koordinate $r/(x - x_0)$; (b) Axiale Profile der RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit bei $r = 0$. ——— präsentierte Simulation ($Ma_j = 0.3$, $Re_d = 1.2 \cdot 10^4$) • Arakeri et al. [7] ($Ma_j = 0.9$, $Re_d = 5 \cdot 10^5$), – – – Barré et al. [12] ($Ma_j = 0.9$, $Re_d = 5 \cdot 10^5$). Das Profil von Barré et al. [12] ist in axialer Richtung für einen besseren Vergleich verschoben. Der Überstrich $\overline{(\cdot)}$ kennzeichnet die Mittelung in der Zeit und in azimutaler Richtung.

$Ma_b = 0.3$ liegt und eine Widerstandsreduktion der Rohrströmung von $\mathcal{DR} = 42\%$ liefert. Die Gitterauflösung im Rohrbereich entspricht der einer grob aufgelösten ILES. Die Validierung bezüglich einer hoch aufgelösten DNS von El Khoury et al. [50] erfolgt in Appendix B.1. Mit den gleichen Parametern der Beeinflussung A und Λ_x wurden zudem zwei unterschiedliche Konfigurationen generiert, die sich nur durch eine Phasenverschiebung der Wandgeschwindigkeit nach Gleichung 5.12 unterscheiden. Der Rohrbereich mit der Wandumfangsgeschwindigkeit im beeinflussten Zustand ist in Abbildung 5.7 für die beiden Konfigurationen veranschaulicht. Im Fall $u_{\varphi e} = 0$ ist die Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung 5.12 derart auf der Wand des Rohres positioniert, sodass die Wandumfangsgeschwindigkeit am Auslass der Rohres Null ist. Im zweiten beeinflussten Fall $u_{\varphi e} = \max$ ist die Wandgeschwindigkeit um $\Lambda_x/4$ phasenverschoben, damit sich eine Wandumfangsgeschwindigkeit mit maximalem Geschwindigkeitsbetrag (Amplitude A) am Rohrauslass ergibt. Hierdurch stellt sich ein völlig neuer Austrittszustand am Rohrende gegenüber dem beeinflussten Fall mit $u_{\varphi e} = 0$ und dem unbeeinflussten Fall ein. Ergebnisse aus der Literatur (z.B. Brès et al. [26]) deuten auf einen großen Einfluss des Grenzschichtzustands am Düsenaustritt hin. Auch typische Verfahren der Strömungsbeeinflussung zur Erhöhung der Mischungsrate bei Freistrahlen [13] agieren unmittelbar am Düsenaustritt, sodass durch die zusätzliche Umfangsgeschwindigkeit am Austritt möglicherweise ein großer Effekt zu erwarten ist. Simulationsparameter der verschiedenen Freistrahlströmungen mit und ohne Beeinflussung sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Die Konfiguration

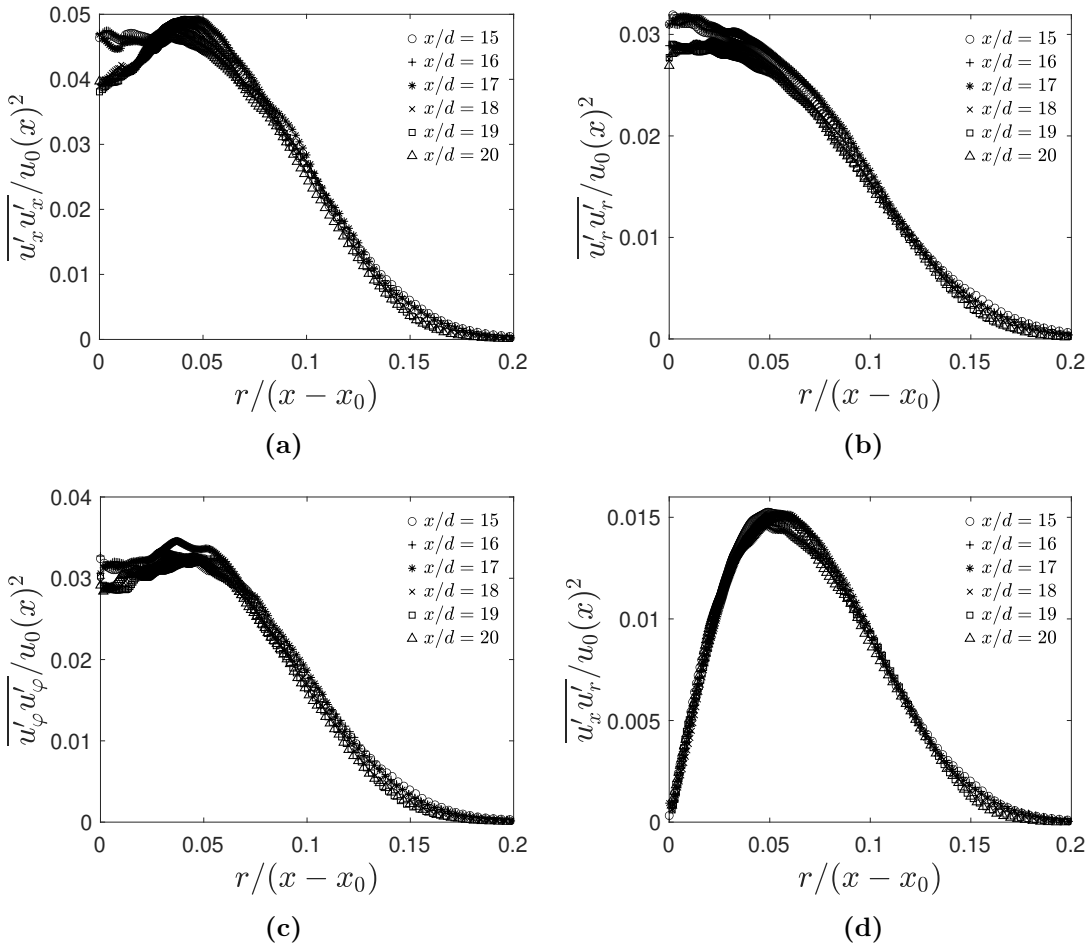
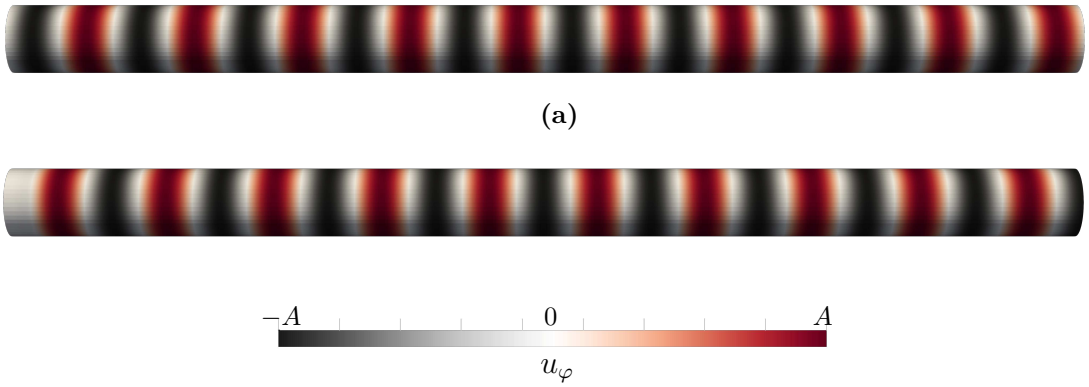


Abbildung 5.6: Radiale Profile der turbulenten Spannungen normiert mit der lokalen Geschwindigkeit auf der Achse über der selbstähnlichen Koordinate $r/(x - x_0)$.

$u_{\varphi e} = \max$ kommt der eines "swirling jets" nahe und lässt eine gesteigerte Mischung des Freistrahlfluids mit der Umgebung erwarten. Dort rotiert üblicherweise das gesamte Rohr, sodass sich bereits ein statistisch stationärer Zustand eingestellt hat. Neben der axialen Scherschicht kommt in dieser Drallströmung eine Schicht aufgrund der azimutalen Geschwindigkeit hinzu, deren Wechselwirkungen zusammen mit zentrifugalen Instabilitäten und sich ausbreitenden Trägheitswellen eine komplexe Physik ergeben [46]. Die Untersuchungen dazu beziehen sich in der Regel auf laminare Strömungen, wo der Einfluss des Dralls besser separiert werden kann, und richten den Fokus auf charakteristische achsensymmetrische spiralförmige Wirbelstrukturen und deren Zusammenbruch innerhalb der Scherschicht. Eine Vielfalt an verschiedenen Strömungsstrukturen wurde in der Literatur erwähnt, wobei jede Beobachtung im jeweiligen Kontext der Strömungskonfiguration inklusive Anfangsbedingungen, Confinement und geometrischen Variationen gesehen werden muss [46]. Einen Überblick über verschiedene Arbeiten in diesem Bereich bietet beispielsweise Douglas et al. [46].



(a)

(b)

Abbildung 5.7: Darstellung der Wandumfangsgeschwindigkeit im Rohrbereich. (a) Fall $u_{\varphi e} = 0$ mit verschwindender Umfangsgeschwindigkeit am Rohrauslass (rechts); (b) Fall $u_{\varphi e} = \max$ mit maximaler Umfangsgeschwindigkeit $u_\varphi = -A$ am Rohrauslass.

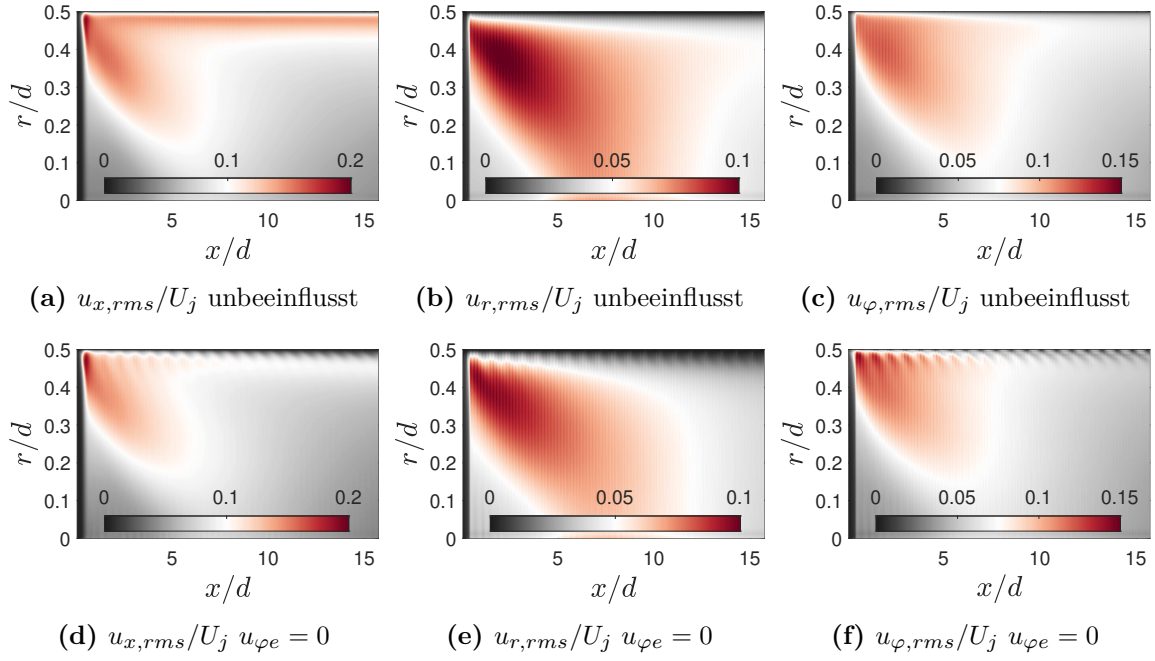
Case	Ma_j	Re_d	Λ_x^+	N	$\frac{\Delta t c_\infty}{d}$	$\frac{t_{sim} c_\infty}{d}$
unbeeinflusst	0.3	$1.23 \cdot 10^4$	-	$41.67 \cdot 10^6$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	1495
$u_{\varphi e} = 0$	0.3	$1.21 \cdot 10^4$	1145	$41.67 \cdot 10^6$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	2063
$u_{\varphi e} = \max$	0.3	$1.21 \cdot 10^4$	1145	$41.67 \cdot 10^6$	$8.0 \cdot 10^{-6}$	907

Tabelle 5.1: Parameter der Freistrahlströmungen. Die Machzahl $Ma_j = U_j/c_j$ und die Reynoldszahl $Re_d = \rho_j U_j d/\mu_j$ werden mit Werten auf der Achse am Rohraustritt gebildet, d ist der Rohrdurchmesser und Λ_x^+ die Wellenlänge der Wandoszillationen. N bezeichnet die Anzahl der Gitterpunkte im kompletten Rohr-/Freistrahlgebiet, Δt und t_{sim} sind Zeitschritt und Simulationsdauer und c_∞ ist die Schallgeschwindigkeit bei Umgebungsbedingungen.

Hier ist der Fokus zunächst auf die globalen Auswirkungen des Dralls am Rohraustritt gerichtet, wie etwa die Strahlaufweitung und die turbulenten Intensitäten.

5.2. Rohrbereich

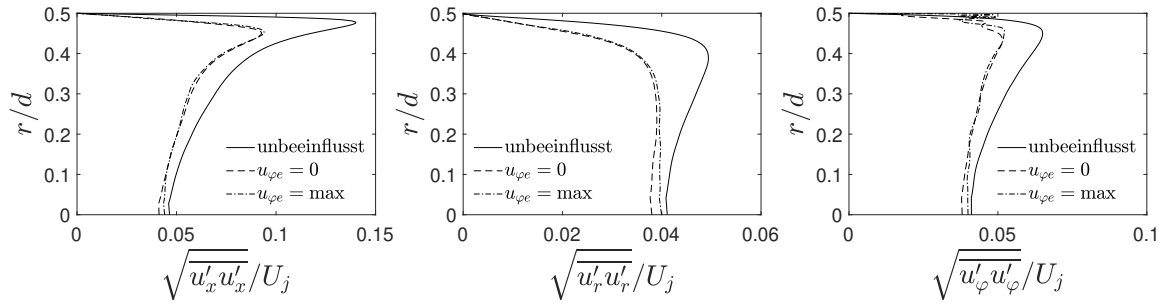
Innerhalb des Rohrbereichs wird die synthetische Generierung von Turbulenz mithilfe der Quelltermformulierung der Synthetic-Eddy Methode [65] verwendet, um die Transition zur Turbulenz nach möglichst geringer Lauflänge herbeizuführen. Ziel ist es, durch Generierung geeigneter Einströmbedingungen möglichst exakte radiale Profile der gemittelten Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen am Rohraustritt zu erhalten und den Effekt der Wandoszillationen im beeinflussten Fall korrekt abzubilden. Die Daten der hochaufgelösten Simulation der Rohrströmung mit periodischen Rän-



(a) $u_{x,rms}/U_j$ unbeeinflusst **(b)** $u_{r,rms}/U_j$ unbeeinflusst **(c)** $u_{\varphi,rms}/U_j$ unbeeinflusst

(d) $u_{x,rms}/U_j$ $u_{\varphi e}=0$ **(e)** $u_{r,rms}/U_j$ $u_{\varphi e}=0$ **(f)** $u_{\varphi,rms}/U_j$ $u_{\varphi e}=0$

Abbildung 5.8: In der Zeit und in azimutaler Richtung gemittelte Felder $\sqrt{u_i' u_i'}/U_j$ innerhalb des Rohrbereichs für die unbeeinflusste (a,b,c) und beeinflusste Konfiguration mit $u_{\varphi e}=0$ (d,e,f).



(a) **(b)** **(c)**

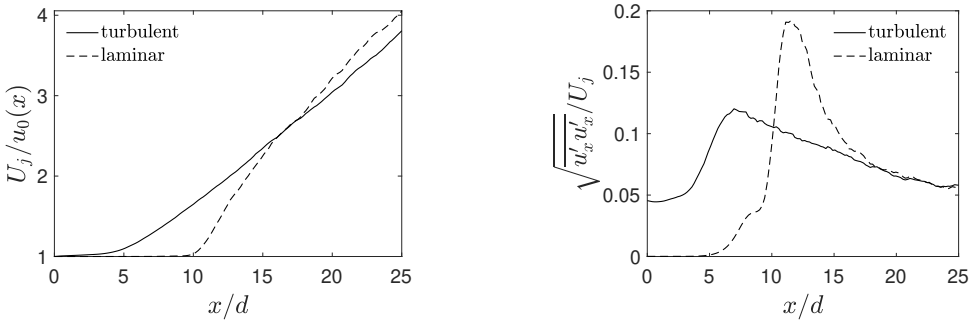
Abbildung 5.9: RMS-Werte der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten in (a) axialer, (b) radialer und (c) azimutaler Richtung bei $x/d=-0.04$ ab dem Rohrauslass.

dern in Appendix B.1 dienen dabei sowohl zur Abschätzung geeigneter Längenmaße für die generierten Fluktuationen am Einlass, als auch zur Validierung der Statistiken am Rohrauslass. Die Entwicklung der turbulenten Intensitäten in axialer, radialer und azimutaler Richtung innerhalb des Rohrs ist in Abbildung 5.8 jeweils für die unbeeinflusste Konfiguration und die beeinflusste Konfiguration mit $u_{\varphi e}=0$ demonstriert. Hohe RMS-Werte werden unmittelbar hinter dem Einlass nahe der Wand bei $r/d=0.5$ generiert, die zunächst mit zunehmender axialen Lauflänge in den zentralen

Bereich propagieren. Nach einer Distanz von ungefähr 6 bis 10 Rohrdurchmessern in axialer Richtung klingen die turbulenten Intensitäten im mittleren Bereich des Rohrs wieder ab und die Felder nähern sich der vollentwickelten Lösung an. Die ausreichend lange Entwicklungslänge der Strömung im Rohrbereich gewährleistet physikalische, vollturbulente Anfangsbedingungen für den Freistrahl am Rohrauslass. Die radialen Profile der axialen, radialen und azimutalen Geschwindigkeitsfluktuationen bei $x/d = -0.04$ ab dem Rohrauslass sind in Abbildung 5.9 für die drei betrachteten Rohrwandbedingungen gezeigt. Die Beeinflussung sorgt für eine Dämpfung der hohen Turbulenzlevel über die gesamte radiale Koordinate und besonders im Bereich der Höchstwerte in Wandnähe gegenüber der unbeeinflussten Strömung. Der Freistrahl wird folglich mit insgesamt weniger Turbulenz und einer aufgedickten viskosen Unterschicht initiiert. Die Unterschiede in der turbulenten Intensität zwischen den Konfigurationen $u_{\varphi e} = 0$ und $u_{\varphi e} = \max$ sind innerhalb des Rohrs verschwindend und an der gezeigten Position $x/d = -0.04$ nur durch die Phasendifferenz des Wandgeschwindigkeitsverlaufs begründet. Allein die nichtverschwindende mittlere Wandumfangsgeschwindigkeit am Rohrende macht den Unterschied im Fall $u_{\varphi e} = \max$ und sorgt so neben der geringeren Turbulenz zusätzlich für eine geänderte Eintrittsbedingung im Freistrahlbereich.

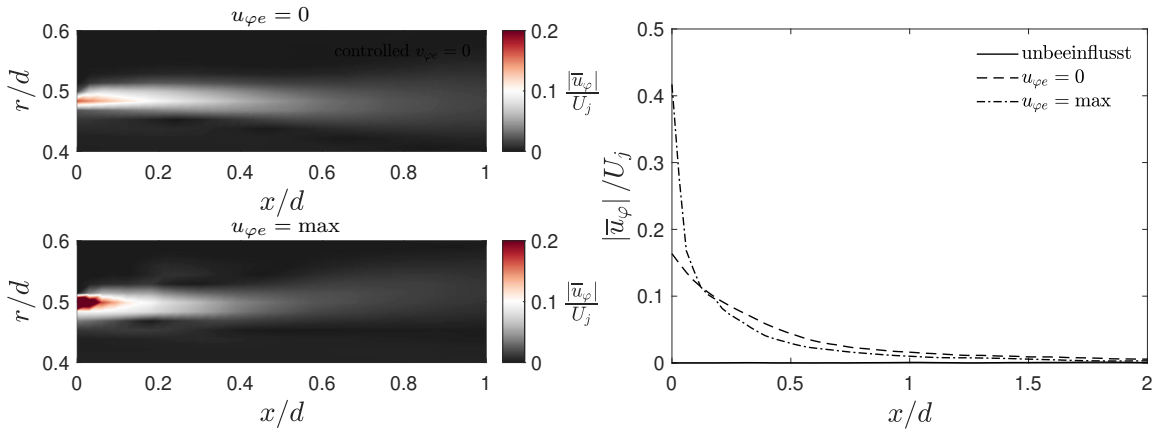
5.3. Freistrahlbereich

Die Entwicklung des Freistrahls wird nun in Abhängigkeit der verschiedenen Rohrwandgeschwindigkeitsverteilungen analysiert. Zunächst ist die Rolle der Turbulenz für die Entwicklung des Freistrahls demonstriert anhand Abbildung 5.10, wo die unbeeinflusste Konfiguration mit dem Extremfall der laminaren Rohraustrittsbedingung basierend auf einer vorangegangen Simulation ohne Turbulenzgenerierung im Rohr verglichen wird. Der Vergleich der mittleren Geschwindigkeit auf der Achse (Abbildung 5.10a) zeigt einen deutlich verlängerten Bereich der initialen Scherschicht bei laminarer Rohrströmung. Zudem kommt es zu starken Spitzen in den Geschwindigkeitsfluktuationen auf der Achse, sobald der Freistrahl aufweitet (Abbildung 5.10b). Die Turbulenz hat somit großen Einfluss auf die Entwicklung der Scherschicht, sowie die Schallabstrahlung [12]. Die Darstellung der zeitlich und azimutal gemittelten Umfangsgeschwindigkeit in Abbildung 5.11b zeigt den hohen Geschwindigkeitsbetrag von ungefähr $0.4\,U_j$ im Fall $u_{\varphi e} = \max$ in der dünnen Scherschicht bei $r/d = 0.5$ am Rohraustritt. Auch der Freistrahl mit $u_{\varphi e} = 0$ weist, trotz verschwindender Wandumfangsgeschwindigkeit am Rohrauslass, eine moderate mittlere azimutale Geschwindigkeit von ca. 15 % der axialen Rohraustrittsgeschwindigkeit auf und besitzt damit ebenfalls “swirling“ Charakter. Die mittlere Geschwindigkeit ist durch die Advektion des vorangegangenen Maximums der Geschwindigkeitsverteilung an der Wand begründet und hat ihr Maximum bei etwa $r/d = 0.48$ in radialer Richtung. Der Verlauf der mittleren azimutalen Geschwindigkeit auf der gedachten Verlängerung der Rohr-



(a) **(b)**

Abbildung 5.10: Auswirkung von turbulenten und laminaren Rohraustrittsbedingungen auf den Freistrahlbereich. (a) Abnahme der mittleren axialen Geschwindigkeit auf der Achse $u_0(x)$; (b) Entwicklung der axialen Geschwindigkeits-RMS auf der Achse bezogen auf die Austrittsgeschwindigkeit U_j.



(a) **(b)**

Abbildung 5.11: (a) Mittlere Umfangsgeschwindigkeit im Bereich des Rohraustritts. (a) 2D-Darstellung über der axialen und radialen Richtung; (b) Axialer Verlauf bei $r/d = 0.5$.

wand bei $x/d = 0.5$ in Abbildung 5.11b offenbart, dass bereits ab $x/d = 1$ bis 1.5 die Geschwindigkeit auf unter ein Prozent der axialen Rohraustrittsgeschwindigkeit U_j abgefallen ist. Abbildung 5.12 zeigt die mittlere axiale Geschwindigkeit exemplarisch für die unbeeinflusste Konfiguration in (a) und den Verlauf für alle Konfigurationen auf der Achse und bei $r/d = 0.5$ in (b). Die Entwicklung des Freistrahls in Stromrichtung wird üblicherweise in drei verschiedene Regionen unterteilt. Die initiale Entwicklungsregion nahe des Rohraustritts zeichnet sich durch das Plateau der Stromabgeschwindigkeit auf der Achse aus und erstreckt sich bis zum Ende des Potentialkerns ($0 \lesssim x/d \lesssim 5$) [132]. Daran schließt sich die entwickelnde Freistrahlregion im Bereich $5 \lesssim x/d \lesssim 25$ an, in der die Geschwindigkeit auf der Achse rapide

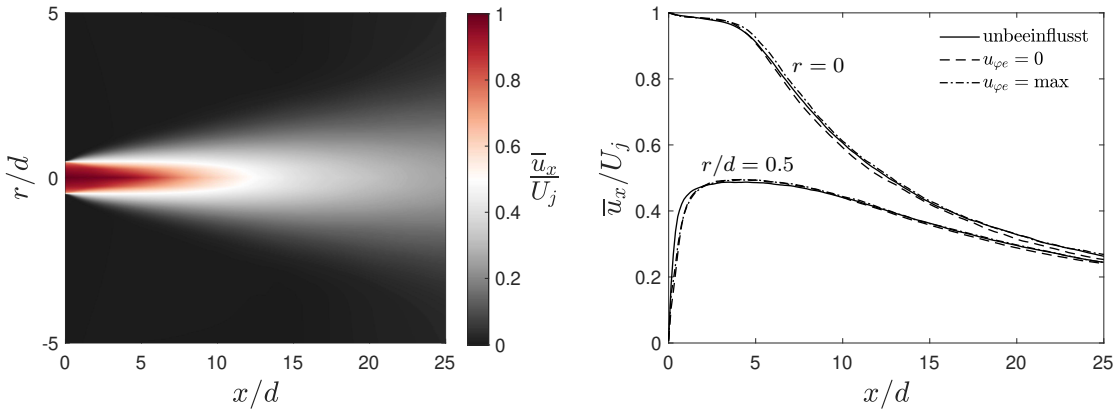


Abbildung 5.12: Mittlere axiale Geschwindigkeit. (a) 2D-Darstellung der unbeeinflussten Konfiguration über der axialen und radialen Richtung; (b) Axiale Profile auf der Achse und in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$.

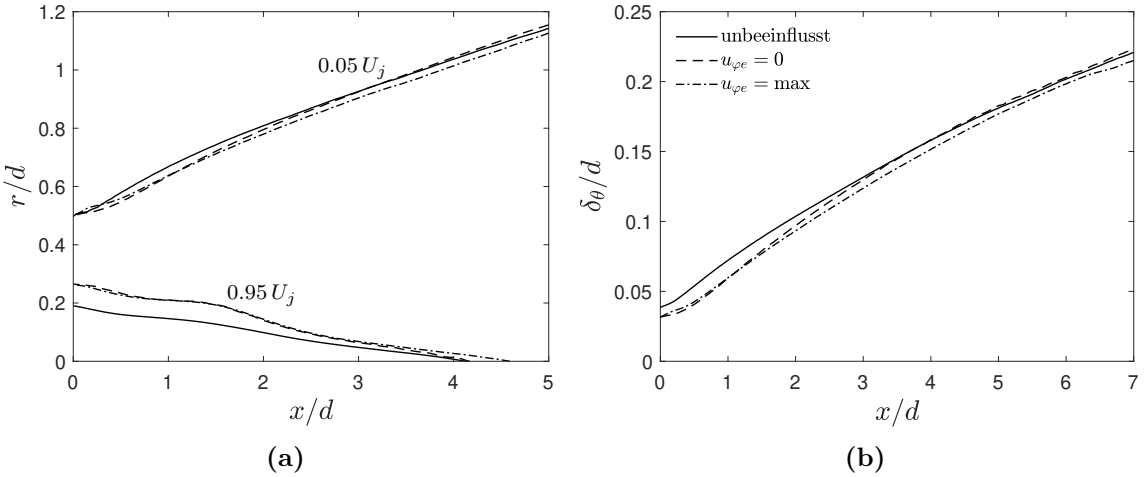


Abbildung 5.13: (a) Visualisierung des Potentialkerns und der Freistrahlweite mithilfe der Konturlinien konstanter Geschwindigkeit $\overline{u}_x$ von 0.95 und 0.05 der Rohraustrittsgeschwindigkeit U_j; (b) Impulsverlustdicke δ_θ.

zu ihrem asymptotisch fallenden Verhalten übergeht [132]. Die selbstähnliche Region bei $x/d \gtrsim 25$ [116] markiert den Bereich, in dem der Freistrahl vollständig durch ein selbstähnliches Geschwindigkeitsprofil und eine konstante Rate der Aufweitung und Geschwindigkeitsabnahme auf der Achse beschrieben werden kann [132]. Bei den beiden beeinflussten Konfigurationen ist der Geschwindigkeitsanstieg in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$ verlangsamt (Abbildung 5.12b). Die Geschwindigkeitsabnahme auf der Achse setzt im Fall $u_{\varphi e} = \max$ etwas später ein. Die Gestalt der Freistrahlen

unter Anwendung der verschiedenen Rohrwandgeschwindigkeiten unterscheidet sich vorwiegend in der Region der initialen Scherschicht im Bereich $0 \lesssim x/d \lesssim 5$. Der Potentialkern und die Freistrahlweite sind in Abbildung 5.13a anhand der Konturlinien konstanter Geschwindigkeiten $\overline{u}_x = 0.95\,U_j$ und $\overline{u}_x = 0.05\,U_j$ in diesem Bereich dargestellt. Der Potentialkern der beeinflussten Konfigurationen ist anfangs gegenüber dem unbeeinflussten Fall aufgedickt und dessen Länge ist im Fall $u_{\varphi e} = \max$ vergrößert. Die Impulsverlustdicke der Scherschicht ist in Abbildung 5.13b über der axialen Distanz aufgetragen. Die Größe wird ähnlich zu Brès et al. [26] abgeschätzt zu

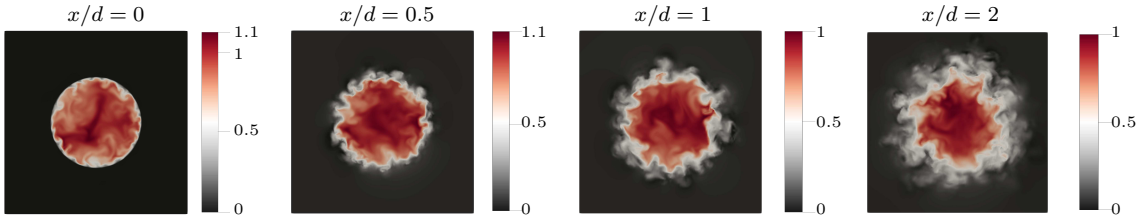
$$\delta_\theta = \int_0^{r_{0.01}} \frac{\overline{u}_x(x,r)}{\overline{u}_x(x,0)} \left(1 - \frac{\overline{u}_x(x,r)}{\overline{u}_x(x,0)}\right) dr\,. \tag{5.13}$$

Die radiale Integrationsgrenze $r_{0.01}$ entspricht der Distanz, bei der $\overline{u}(x,\, r_{0.01}) = 0.01\overline{u}(x,0)$ gilt. Während die Impulsverlustdicke der Konfiguration $u_{\varphi e} = 0$ im Bereich $x/d = [0.5\ 4]$ stark ansteigt und sich dem Verlauf des unbeeinflussten Falls annähert, wächst die Impulsverlustdicke der Konfiguration $u_{\varphi e} = \max$ bereits unmittelbar nach dem Rohraustritt gleichmäßig, nahezu linear an. Die instantane axiale Geschwindigkeit u_x/U_j in der $r-\varphi$-Ebene ist in Abbildung 5.14 für die verschiedenen Konfigurationen an einigen axialen Positionen in der initialen Scherschicht gezeigt. Auch hier ist bei den beeinflussten Fällen eine anfänglich geringere turbulente Intensität und eine spätere Vermischung zu sehen. Um die Eigenschaften der Turbulenz in azimutaler Richtung innerhalb der initialen ringförmigen Scherschicht zu untersuchen, werden die azimutalen Kreuzkorrelationen

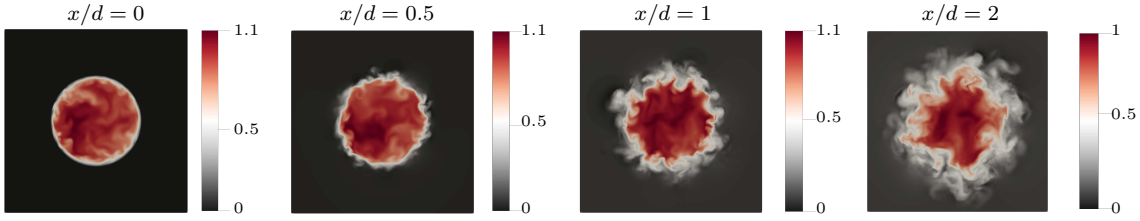
$$R_\varphi^{u'_x u'_x} = \frac{\overline{u'_x(x,r,\varphi=0)u'_x(x,r,\varphi)}}{\overline{u'^2_x(x,r,\varphi=0)}^{1/2}\,\overline{u'^2_x(x,r,\varphi)}^{1/2}} \tag{5.14}$$

in Anlehnung an Barré et al. [12] berechnet. Sie sind in Abbildung 5.15 für die drei Konfigurationen an den axialen Positionen $x = 0$, $x = d/2$, $x = d$ und $x = 2d$ über der azimutalen Richtung aufgetragen. Die Geschwindigkeitsfluktuationen in der ringförmigen Scherschicht sind im unbeeinflussten Fall bereits unmittelbar hinter dem Rohraustritt azimutal schwach korreliert (Abbildung 5.15a). Die niedrigeren turbulenten Intensitäten am Rohraustritt des Falls $u_{\varphi e} = 0$ machen sich in höheren Werten der Kreuzkorrelationsfunktion bemerkbar (Abbildung 5.15b). Die Korrelation fällt erst bei $\varphi \approx 60$ auf Null ab, gleicht sich aber mit zunehmender axialer Distanz sehr schnell den Verläufen der unbeeinflussten Konfiguration an. Der Fall $u_{\varphi e} = \max$ sorgt mit der nichtverschwindenden mittleren azimutalen Geschwindigkeit am Rohrauslass wiederum für ein sehr schnelles Abfallen der Kreuzkorrelationsfunktion (Abbildung 5.15c).

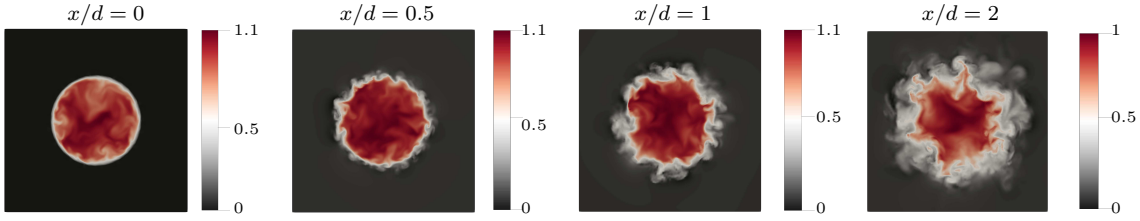
2D-Visualisierungen der RMS-Werte, sowie die zugehörigen Profile auf der Achse und in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$ sind in den Abbildungen 5.16 - 5.19 für die drei Komponenten der Geschwindigkeit und den Druck dargestellt. Deutlich sind in Abbildung 5.16 die höheren RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit der Rohrgrenzschicht



(a) unbeeinflusst



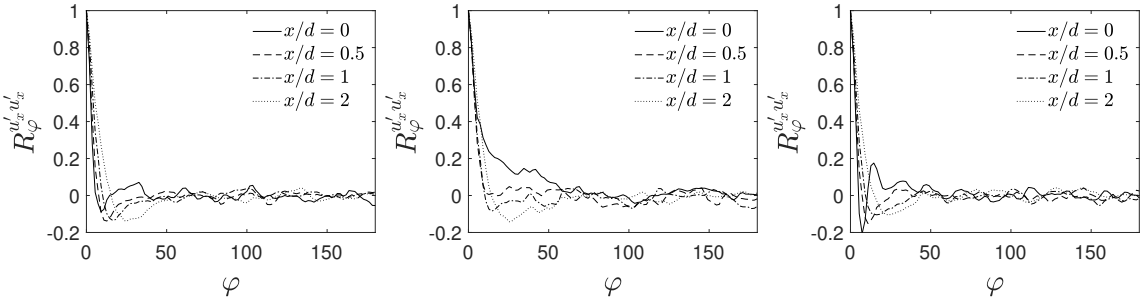
(b) $u_{\varphi e} = 0$



(c) $u_{\varphi e} = \max$

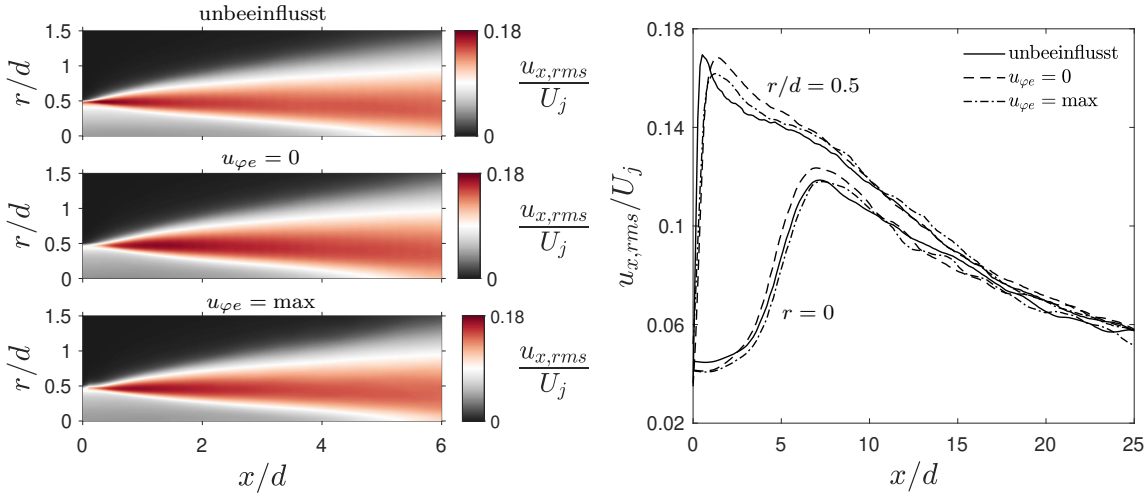
Abbildung 5.14: Instantane Schnitte der axialen Geschwindigkeit u_x/U_j an verschiedenen axialen Positionen $x/d = 0$, $x/d = 0.5$, $x/d = 1$ und $x/d = 2$ in der initialen Scherschicht für den unbeeinflussten Fall (a) und die beeinflussten Fälle $u_{\varphi e} = 0$ (b) und $u_{\varphi e} = \max$ (c).

im unbeeinflussten Fall unmittelbar am Rohraustritt erkennbar. Die qualitativen Verläufe auf der Achse und in der Scherschicht (Abbildung 5.16b) decken sich mit den Beobachtungen in Barré et al. [12] und Brès et al. [26] bei laminaren und turbulenten Düsenaustrittsbedingungen. Die Turbulenzlevel in der anfänglichen Scherschichtentwicklung sind bei ursprünglich turbulenten Freistrahlen höher als bei Freistrahlen mit laminaren Düsenaustrittsbedingungen [12]. Zwar sind die Rohraustrittsbedingungen hier in allen betrachteten Fällen voll-turbulent, durch die hohe Widerstandsreduktion bei Anwendung der Wandoszillationen nähert sich die Strömung jedoch dem laminaren Zustand an, was sich in einem geringeren Geschwindigkeitsgradienten an der Wand, einer aufgedickten viskosen Unterschicht und niedrigeren turbulenten Spannungen bemerkbar macht. Die anfängliche Entwicklung des Freistrahls scheint damit stark von den unterschiedlichen Turbulenzleveln am Rohraustritt beeinflusst zu sein. Der Anstieg auf der Achse und in der Scherschicht erfolgt mit angewandter Wandoszillation mit zunehmender Distanz vom Rohraustritt (Abbildung 5.16b). Die Maximalwerte der Konfiguration $u_{\varphi e} = \max$ fallen gegenüber dem Fall $u_{\varphi e} = 0$ geringer aus, wobei der Maximalwert in der Scherschicht gegenüber dem unbeeinflussten Fall verringert wird. Die 2D-Visualisierungen der radialen Geschwindigkeitsfluktuationen



(a) unbeeinflusst **(b)** $u_{\varphi e} = 0$ **(c)** $u_{\varphi e} = \max$

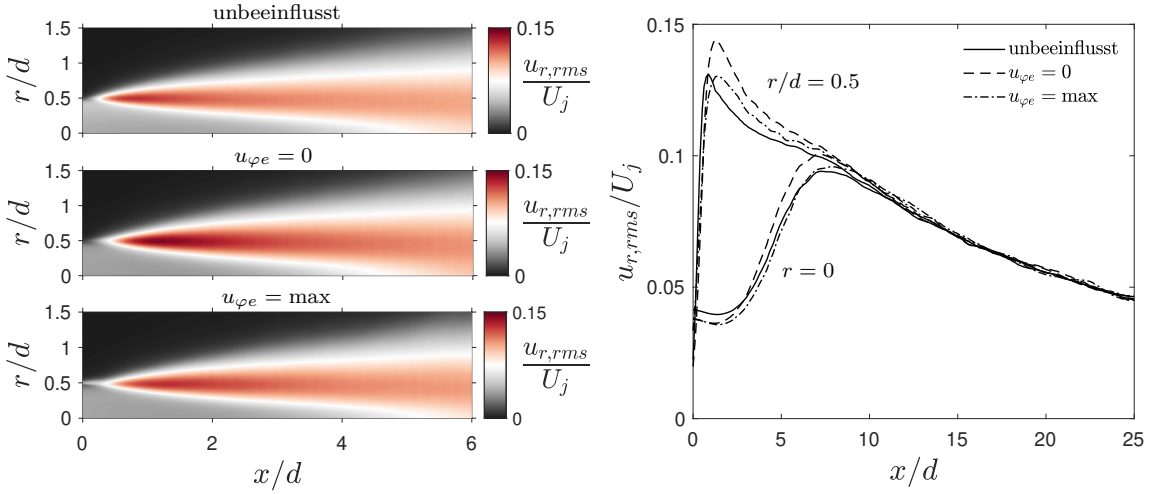
Abbildung 5.15: Azimutale Kreuzkorrelationsfunktion $R_\varphi^{u'_x u'_x}$ der axialen Geschwindigkeitsfluktuationen in der ringförmigen Scherschicht bei $r/d = 0.5$ an den axialen Positionen $x/d = 0$, $x/d = 0.5$, $x/d = 1$ und $x/d = 2$ ab dem Rohrauslass für die verschiedenen unbeeinflussten und beeinflussten Konfigurationen (a-c).



(a) **(b)**

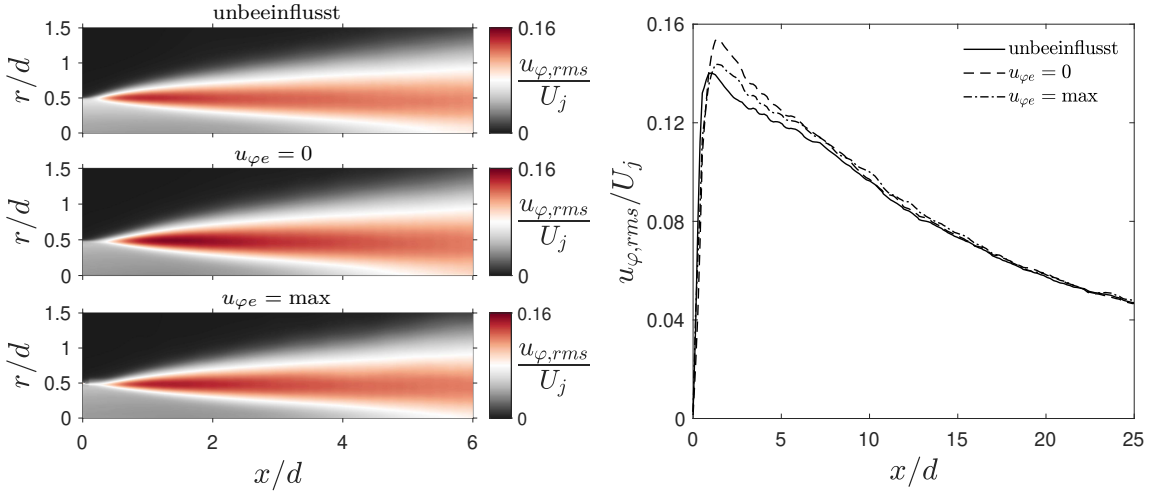
Abbildung 5.16: RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit, normiert mit der Geschwindigkeit am Rohraustritt; (a) 2D-Visualisierung über der axialen und radialen Koordinate; (b) Axiale Profile auf der Achse ($r = 0$) und in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$.

in Abbildung 5.17a lassen eine spätere Entwicklung mit höheren Werten im Fall $u_{\varphi e} = 0$ gegenüber dem unbeeinflussten Fall erkennen. Der Fall $u_{\varphi e} = \max$ startet bereits mit einem höheren Ausgangswert in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$ und kann das starke Überschwingen in der initialen Entwicklungsregion, wie bei der Konfiguration $u_{\varphi e} = 0$ gesehen, verringern. Ein qualitativ ähnlicher Verlauf wie bei den axialen Geschwindigkeits-RMS ergibt sich auf der Achse (Abbildung 5.17b). Nach späterem Anstieg der RMS-Werte der beeinflussten Konfigurationen in der Scherschicht ergeben sich leicht erhöhte RMS-Werte im Bereich bis $x/d \approx 10$. Auch hier kann mit maxi-



(a) (b)

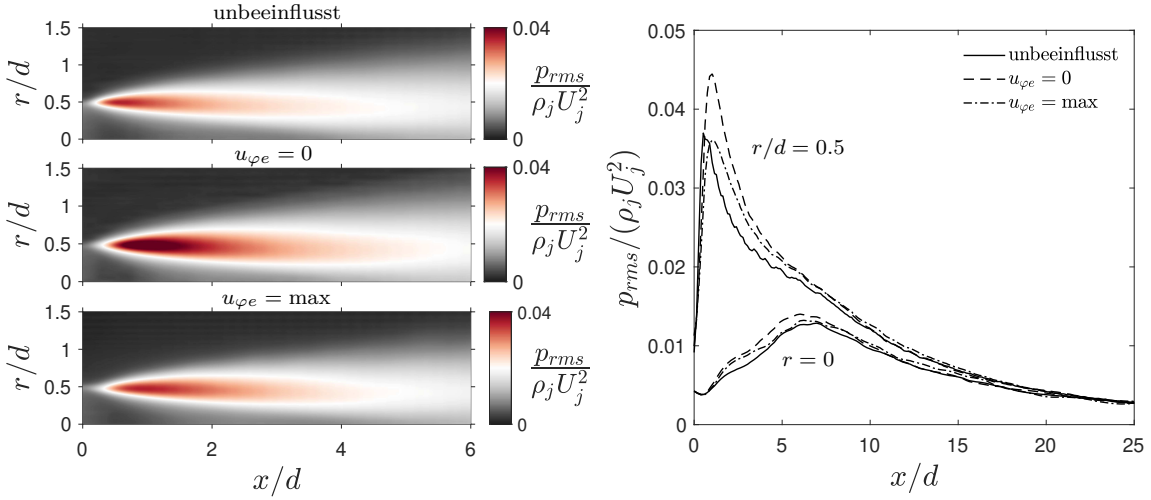
Abbildung 5.17: RMS-Werte der radialen Geschwindigkeit, normiert mit der Geschwindigkeit am Rohraustritt; (a) 2D-Visualisierung über der axialen und radialen Koordinate; (b) Axiale Profile auf der Achse ($r = 0$) und in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$.



(a) (b)

Abbildung 5.18: RMS-Werte der azimutalen Geschwindigkeit, normiert mit der Geschwindigkeit am Rohraustritt; (a) 2D-Visualisierung über der axialen und radialen Koordinate; (b) Axiale Profile in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$.

maler Umfangsgeschwindigkeit am Auslass ($u_{\varphi e} = \max$) der Maximalwert reduziert werden, auf den Wert des Maximums der unbeeinflussten Konfiguration. Auch der Anstieg der RMS-Werte der azimutalen Geschwindigkeit erfolgt für die beeinflussten Fälle bei größerer axialer Distanz vom Düsenaustritt (Abbildung 5.18). Das Maximum ist bei maximaler Umfangsgeschwindigkeit am Rohraustritt gegenüber $u_{\varphi e} = 0$



(a) (b)

Abbildung 5.19: RMS-Werte des Drucks, normiert mit der Geschwindigkeit am Rohraustritt; (a) 2D-Visualisierung über der axialen und radialen Koordinate; (b) Axiale Profile auf der Achse ($r = 0$) und in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$.

verringert, bezüglich dem unbeeinflussten Fall aber immer noch leicht erhöht. Die Beeinflussung mit verschwindender Wandgeschwindigkeit am Auslass ($u_{\varphi e} = 0$) führt zu deutlich erhöhten Druckfluktuationen in der initialen Entwicklungsregion (Abbildungen 5.19a und 5.19b). Der Effekt wird durch die maximale Wandgeschwindigkeit am Auslass verringert, sodass der Maximalwert der Konfiguration $u_{\varphi e} = \max$ in der Scherschicht bei $r/d = 0.5$ sogar geringfügig unterhalb des Maximums der unbeeinflussten Konfiguration liegt.

Die betrachteten Konfigurationen haben eine geringe Reynoldszahl $Re_d = 1.2 \cdot 10^4$ im Vergleich zu beispielsweise Barré et al. [12] ($Re_d = 5 \cdot 10^5$) und Brès et al. [26] ($Re_d = 1 \cdot 10^6$) und eine entsprechend große Impulsverlustdicke δ_θ am Rohrauslass, welche wiederum einen deutlichen Effekt auf die Wachstumsraten von Instabilitäten hat [103]. Sowohl der unbeeinflusste als auch die beeinflussten Freistrahlen zeigen Merkmale von anfänglich transitionalen Freistrahlen, worauf die auftretenden markanten Peaks der RMS-Werte der axialen Geschwindigkeit in der Scherschicht hindeuten (Abbildung 5.16b). In den experimentellen Ergebnissen von Husain und Hussain [75] fehlen diese jedoch. Auch Brès et al. [26] stellten ein Überschwingen dieser Größe bei dem Freistrahl mit einer hohen auf dem Durchmesser basierten Reynoldszahl von $1 \cdot 10^6$ und laminaren Bedingungen innerhalb der Düse fest. Das Überschwingen konnte allerdings durch eine verbesserte Behandlung der internen Düsendynamik mithilfe von adaptiver Gitterverfeinerung, synthetischer Turbulenz und Wandmodellierung innerhalb der Düse nahezu beseitigt werden. Dort wachsen die RMS-Werte auf einer kurzen Distanz im Bereich $0 \leq x/d \leq 0.1$ stark an und sind bis $x/d \approx 7$ nahezu konstant, bevor sie wieder abfallen.

5.4. SPOD

Um die Auswirkungen der Wandoszillationen auf den Freistrahl genauer zu analysieren und die Struktur der Turbulenz zu untersuchen, wird SPOD (Spectral Proper Orthogonal Decomposition) im Freistrahlbereich angewandt. Wie in Abbildung 5.20 anhand des instantanen Dichtefelds zu sehen, zeichnet sich der Freistrahl durch eine hohe Bandbreite an aktiven Längen- und Zeitskalen aus. Die SPOD Methode separiert diese verschiedenen Skalen systematisch, indem sie Energiespektren aus den Strömungsdaten extrahiert und die Strömung in kohärente Strukturen zerlegt. Die Moden sind orthogonal gemäß eines inneren Produkts in Raum und Zeit und drücken damit raumzeitliche Kohärenz in den Daten optimal aus [131]. Die Zerlegung wurde bereits bei den Kanalströmungen angewandt (Abschnitt 3.7.3), um die Wirkung der Wandoszillationen anschaulich darzustellen und wurde in Abschnitt 2.5 allgemein eingeführt. Der Zustandsvektor $\mathbf{q}$ in Gleichung 2.38 enthält im vorliegenden Fall die Druckfluktuationen und kann unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie des Freistrahls in azimutale Fourier-Moden $\hat{(\cdot)}_m$ mit azimutalen Wellenzahlen m, zeitliche Fourier-Moden $\hat{(\cdot)}_\omega$ mit Kreisfrequenz ω, oder kombinierte raumzeitliche Fourier-Moden $\hat{(\cdot)}_{m\omega}$ zerlegt werden gemäß

$$\mathbf{q}(x,r,\varphi,t) = \sum_m \hat{\mathbf{q}}_m(x,r,t)e^{im\varphi} = \sum_\omega \hat{\mathbf{q}}_\omega(x,r,\varphi)e^{i\omega t} = \sum_m \sum_\omega \hat{\mathbf{q}}_{m\omega}(x,r)e^{im\varphi}e^{i\omega t}\,. \tag{5.15}$$

Als Erstes erfolgt die Zerlegung aller instantaner Felder in azimutale Fourier-Moden, wobei $m = 0$ der achsensymmetrischen Mode entspricht. Aufgrund der statistischen Homogenität in φ sind gemittelte Größen gleich für beliebige $\pm m$, sodass nach Überprüfung der statistischen Konvergenz die Beiträge positiver und negativer azimutaler Wellenzahlen m summiert werden können [132]. Das weitere Vorgehen mit den in azimutaler Richtung Fourier-transformierten Druckfluktuationen entspricht der Beschreibung in Abschnitt 2.5. Für die SPOD werden die LES-Daten auf ein strukturiertes zylindrisches Gitter interpoliert im Bereich $x, r, \varphi \in [0,\, 20]d \times [-3,\, 3]d \times [0,\, 2\pi]$, welcher in Abbildung 5.20 markiert ist. Tabelle 5.2 listet das Speicherintervall $\Delta t c_\infty / d$ (in akustischen Einheiten), die Gitterpunkte n_x, n_r, n_φ in axialer, radialer und azimutaler Richtung und die Anzahl der verwendeten instantanen Felder n_t für die verschiedenen Konfigurationen. Im Gegensatz zur klassischen Welch Methode, bei der die Daten in mehrere überlappende Blöcke der Anzahl n_{blk} eingeteilt werden um die Cross-Spectral Density Matrix abzuschätzen, wird hier die Multitaper Variante [130] mit nur einem einzigen Block verwendet, bei der n_{win} DPSS (discrete prolate spheroidal sequences) als orthogonale Datenfenster zum Einsatz kommen. Ein Vorteil der Multitaper SPOD ist, dass gegenüber der Welch-Methode bei vergleichbarem Bias und vergleichbarer Varianz niedrigere Frequenzen aufgelöst werden [130]. Die Sampling-Strouhalzahl $St_s = f_s d / U_j$ beträgt für alle in Tabelle 5.2 gelisteten Fälle $St_s \approx 12.5$.

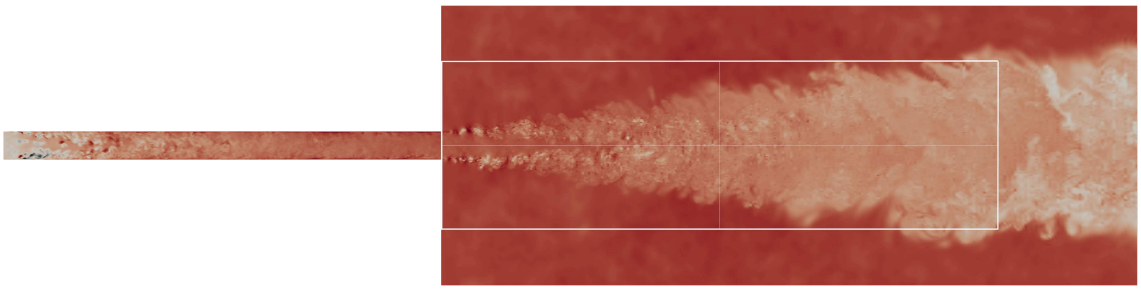


Abbildung 5.20: Bereich $x, r, \varphi \in [0,\ 20]d \times [-3,\ 3]d \times [0,\ 2\pi]$ der interpolierten Daten für die SPOD (weißer Kasten). Dargestellt ist das unbeeinflusste instantane Dichte-Feld in der $x-r$-Ebene durch den Ursprung im Rohr/Freistrahl-Gebiet ohne Dämpfungszonen.

	Interpolierte Daten					SPOD	
Case	$\Delta t c_\infty / d$	n_x	n_r	n_φ	n_t	n_{blk}	n_{win}
unbeeinflusst	0.250	189	39	72	6319	1	72
$u_{\varphi e} = 0$	0.256	189	39	72	8070	1	99
$u_{\varphi e} = \max$	0.250	189	39	72	3634	1	44

Tabelle 5.2: Parameter des strukturierten zylindrischen Gitters der interpolierten Daten und SPOD Parameter. $\Delta t c_\infty / d$ ist das Sampling Zeitintervall normiert mit dem Rohrdurchmesser und der Schallgeschwindigkeit bei Umgebungsbedingungen, n_x, n_r, n_φ sind die Anzahl der Punkte in den drei Raumrichtungen und n_t beschreibt die Gesamtanzahl der verwendeten instantanen Felder. n_{blk} und n_{win} bezeichnet die Anzahl der Blöcke und Fenster innerhalb des Multitaper-Welch SPOD Algorithmus.

Die SPOD Eigenwertespektren bei den azimutalen Wellenzahlen $m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$ des unbeeinflussten Falls sind in den Abbildungen 5.21 und 5.22 den Spektren der Konfiguration $u_{\varphi e} = 0$ bzw. $u_{\varphi e} = \max$ gegenübergestellt. Das SPOD Spektrum kann in ähnlicher Weise zur power spectral density (PSD) interpretiert werden, welche die Aufteilung der Leistung auf die verschiedenen Frequenzkomponenten eines Signals wiedergibt [132]. Für jede Frequenz, bzw. Strouhalzahl $St = fd/U_j$, repräsentiert das diskrete SPOD Spektrum die abnehmenden Energielevel der zugehörigen Reihe an Eigenfunktionen [132]. Der erste, dominante Eigenwert enthält die meiste Energie und ist rot markiert. Die dazugehörigen Moden haben die Form von Wellenpaketen. Mit zunehmender Frequenz ist deren Ursprung weiter stromaufwärts und deren Abmessungen abnehmend, wie in Abbildung 5.23 beispielhaft anhand der ersten, achsensymmetrischen Mode ($m = 0$) des unbeeinflussten Falls gezeigt. Für niedrige und hohe Frequenzen ist der qualitative Verlauf der Spektren in Abhängigkeit der Frequenz für alle Eigenwerte ähnlich, man spricht hier von nicht-rangniedrigem Verhalten. In diesem Fall enthält die Zerlegung keine Strömungsstrukturen, die durch nur eine einzige SPOD-Mode gut repräsentiert werden können. Die SPOD-Moden in diesen Bereichen

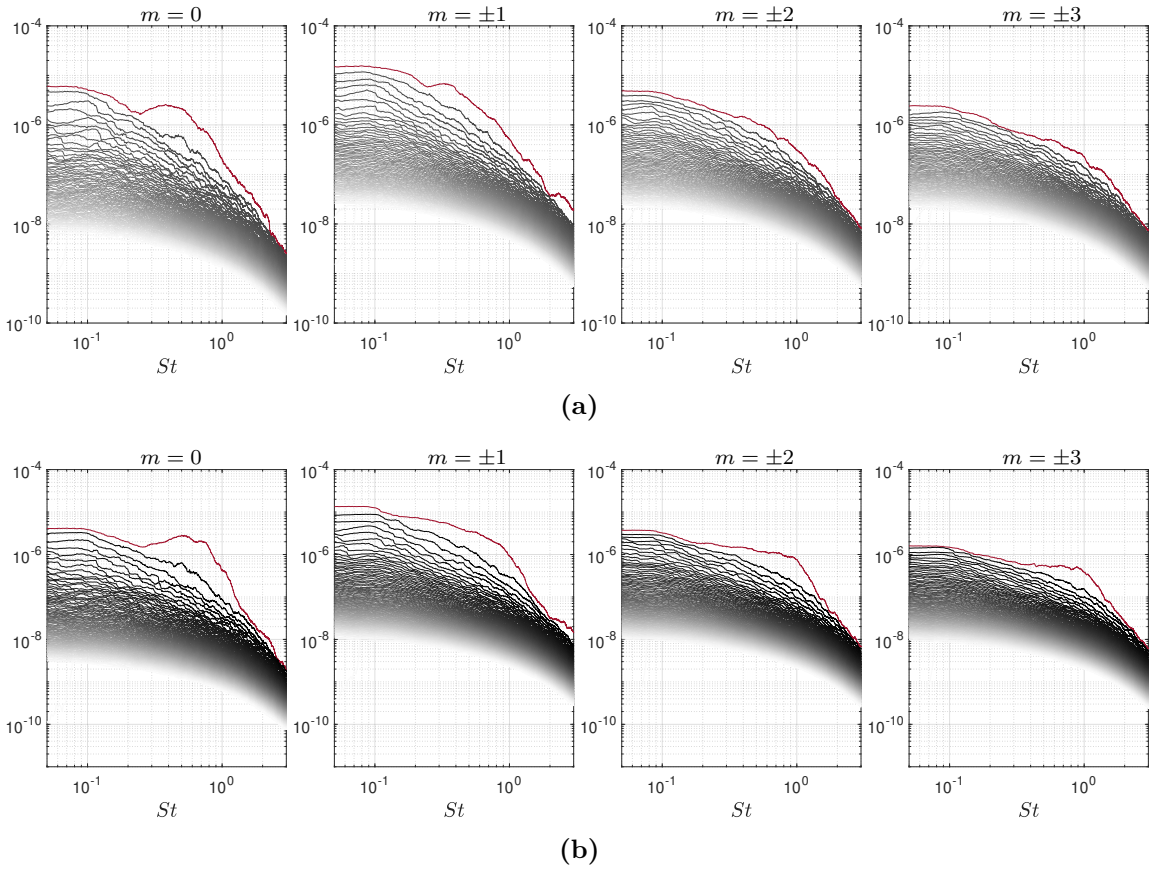
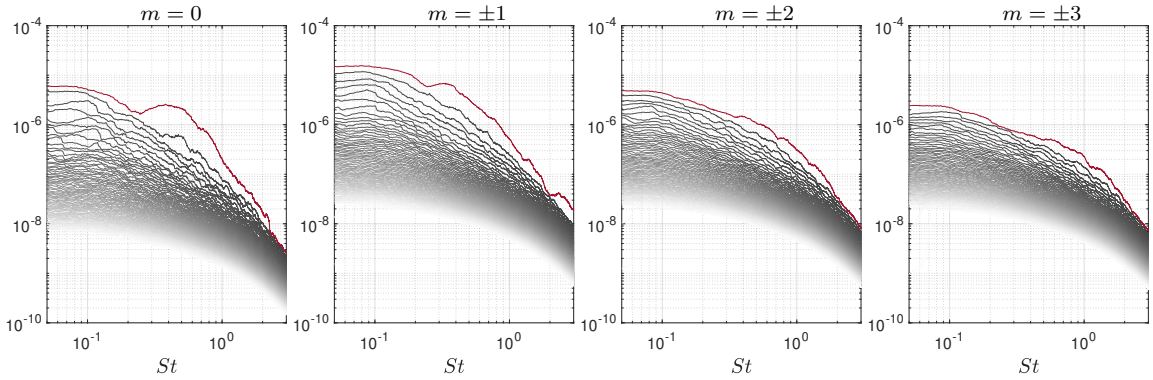
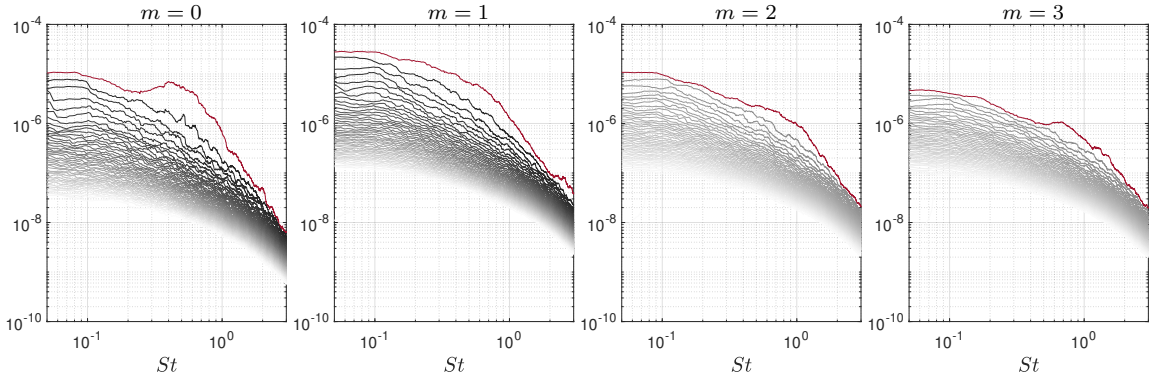


Abbildung 5.21: SPOD Eigenwertespektrum (■, λ_1; ■■■■■■, $\lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_N$) für die ersten vier azimutalen Wellenzahlen m. Vergleich von unbeeinflusster (a) und beeinflusster Konfiguration mit $u_{\varphi e} = 0$ (b). Für $m > 0$ wurden die Anteile der positiven und negativen azimutalen Wellenzahl summiert.

können aus mathematischer Sicht als ein Satz von Basisfunktionen gleicher Bedeutsamkeit interpretiert werden [132]. Ein guter Indikator für die Dominanz von einem bestimmten physikalischen Mechanismus, wie typischerweise hydrodynamischen Instabilitäten, ist eine große Separation zwischen den Eigenwerten der ersten und zweiten SPOD-Moden. Die Separation signalisiert, dass die dominante Mode erheblich energiereicher als die Darunterliegenden ist, d.h. die Strömung weist rangniedriges Verhalten auf. Solch ein Verhalten ist beispielsweise im Spektrum des unbeeinflussten Falls bei $m = 0$ in Abbildung 5.22a über dem Frequenzband $0 \leq St \leq 1$ mit Peak bei $St \approx 0.6$ zu sehen. Die zugehörigen ersten beiden Moden sind für alle (unbeeinflusste und beeinflusste) Konfigurationen bei den azimutalen Wellenzahlen 0 bis 3 und ausgewählten Frequenzen mit großer Separation im Eigenwertespektrum in Abbildung 5.24 dargestellt. Für alle dargestellten Konfigurationen, Frequenzen und azimutale Moden besteht der Hauptunterschied zwischen der dominanten (linke Spalte) und subdominanten Mode (rechte Spalte) darin, dass Letztere doppelte Wellenpakete aufweisen.

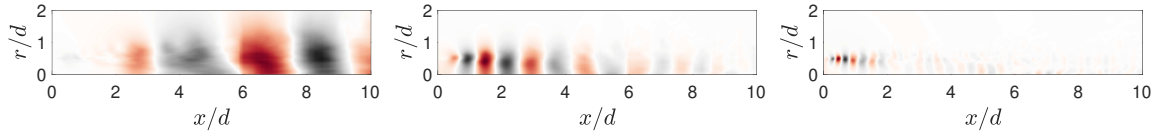


(a)



(b)

Abbildung 5.22: SPOD Eigenwertespektrum (, λ_1; , $\lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_N$) für die ersten vier azimutalen Wellenzahlen m. Vergleich von unbeeinflusster (a) und beeinflusster Konfiguration mit $u_{\varphi e} = \max$ (b). Für $m > 0$ wurden die Anteile der positiven und negativen azimutalen Wellenzahl summiert.



(a) $St = 0.12$ **(b)** $St = 0.46$ **(c)** $St = 1.03$

Abbildung 5.23: Erste SPOD-Mode des unbeeinflussten Freistrahls bei azimutaler Wellenzahl $m = 0$ und verschiedenen Strouhalzahlen $St = 0.12$ (a), $St = 0.46$ (b) und $St = 1.03$ (c). Dargestellt ist die normierte Druckmode (, $-1 < \phi_p/\|\phi\|_\infty < 1$) im Bereich $x, r \in [0\ 10] \times [0\ 2]$.

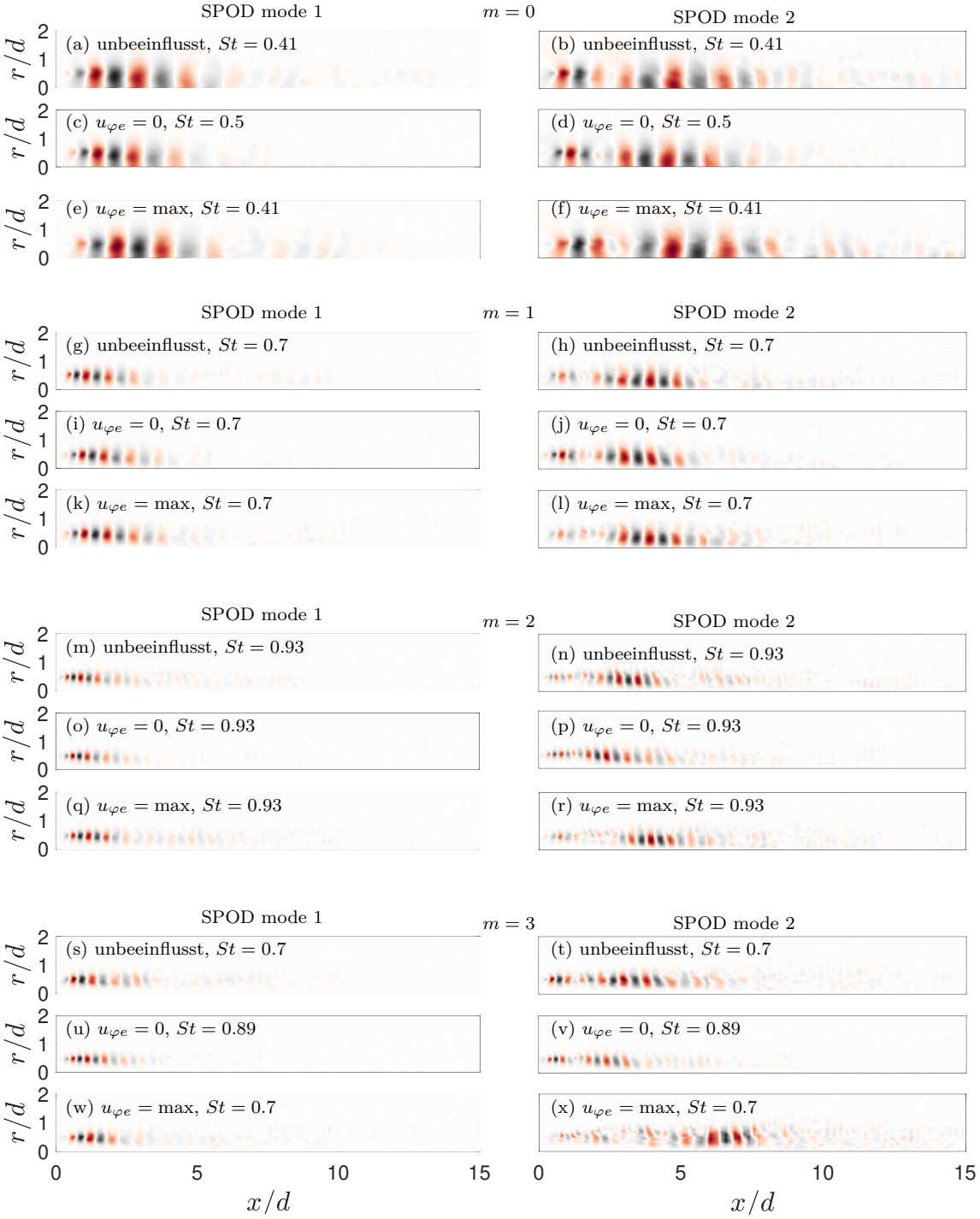


Abbildung 5.24: Vergleich der SPOD-Moden 1 (links) und 2 (rechts) der verschiedenen unbeeinflussten und beeinflussten Konfigurationen bei ausgewählten Frequenzen mit hoher Separation im Eigenwertespektrum. (a-f) $m = 0$; (g-l) $m = 1$; (m-r) $m = 2$; (s-x) $m = 3$. Dargestellt ist jeweils die normierte Druckmode (, $-1 < \phi_p/\|\phi\|_\infty < 1$) im Bereich $x, r \in [0\ 15] \times [0\ 2]$.

Wenn auch die physikalische Interpretation dieses Phänomens nicht offensichtlich ist, kann diese Strukturierung als mathematische Art zur Erzielung von Orthogonalität interpretiert werden [131]. Die auftretenden Strukturen können jedoch mit den bekannten und viel beobachteten Instabilitätsmechanismen in Verbindung gebracht werden. Die kompakten Wellenpakete der dominanten Mode im Bereich der initialen Scherschicht stehen in Verbindung mit der Kelvin-Helmholtz (KH) Instabilität der Scherschicht der mittleren Strömung [131]. Die Kelvin-Helmholtz Instabilität beschreibt allgemein die Welleninstabilität an einem Interface zwischen zwei horizontal parallelen Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeiten. Sie wird durch die destabilisierende Wirkung der Scherung verursacht, die den stabilisierenden Einfluss der Stratifikation (im Falle einer Dichteschichtung) überwiegt. Crighton und Gaster [39] argumentierten, dass die mittlere Strömung als eine äquivalente laminare Strömung betrachtet werden kann und fanden heraus, dass sie im Bereich der initialen Scherschicht konvektiv instabil ist [132]. Nach deren Interpretation dieser Strukturen als modale örtliche Instabilitätswellen werden sie als *KH-artige Wellenpakete* bezeichnet [132]. Sie enthalten einen beachtlichen Anteil der gesamten turbulenten Energie [132]. Die subdominanten Moden in der rechten Spalte von Abbildung 5.24 besitzen neben dem KH-artigen Wellenpaket stromaufwärts noch ein zweites Wellenpaket weiter stromabwärts. Die mittlere Strömung außerhalb des Potentialkerns ist konvektiv stabil und unterstützt kein örtliches modales Wachstum von Störungen [132]. Tissot et al. [137] erklärten das Auftreten großskaliger Strukturen in diesem Bereich deshalb durch nicht-modales Wachstum mithilfe des Orr-Mechanismus [132]. Die entsprechenden kohärenten Strukturen weiter stromabwärts werden daher als *Orr-artige Wellenpakete* bezeichnet.

Das rangniedrige Verhalten ist bei der unbeeinflussten Konfiguration für $m = 0$ und $m = 1$ am stärksten ausgeprägt (Abbildung 5.22a) und nimmt mit steigender azimutaler Wellenzahl ab. Der Vergleich mit dem Fall $u_{\varphi e} = 0$ in Abbildung 5.21 zeigt ein stärkeres rangniedriges Verhalten unter Anwendung der Rohrwandoszillationen, das bis zur azimutalen Wellenzahl $m = 3$ deutlich ausgeprägt ist. Aufgrund der niedrigeren turbulenten Intensitäten am Rohrausgang stellt sich gegenüber dem unbeeinflussten Fall ein ausgeprägteres transitionales Verhalten im Bereich der initialen Scherschicht mit stärkerem Wachstum von Störungen durch Kelvin-Helmholtz Instabilitäten ein. Die zusätzliche mittlere Umfangsgeschwindigkeit am Rohraustritt im Fall $u_{\varphi e} = \max$ ist in der Lage diesen Effekt zu minimieren, wie der Vergleich der SPOD-Spektren in Abbildung 5.22 zeigt. Die Spektren sind sehr ähnlich mit nur marginal stärker ausgeprägtem rangniedrigen Verhalten in den azimutalen Wellenzahlen $m = 2$ und $m = 3$. Die Spektren zeigen keine ausgeprägten tonalen Komponenten aufgrund der Oszillationen im Rohr. Diese wären bei der axialen Wellenlänge der Wandbewegungen oder deren halben Wellenlänge, mit der die Wandschubspannung oszilliert, zu erwarten. Setzt man eine Konvektionsgeschwindigkeit der wandnahen Strömung von $u_x^+ \approx 10$ voraus [146], ergeben sich mögliche charakteristische Frequenzen bei $St = u_x/\Lambda_x \, d/U_j \approx 0.37$ bzw. $St = u_x/(0.5\Lambda_x) \, d/U_j \approx 0.74$. Die Strouhalzah-

len liegen damit in dem Bereich, in dem die SPOD-Spektren rangniedriges Verhalten zeigen. Da einzelne Peaks für eine Vielzahl unterschiedlicher SPOD-Parameter (n_{blk}, n_{win}) nicht beobachtet wurden, ist davon auszugehen, dass die Oszillationen im Rohr keine Rolle mehr im Freistrahlgebiet spielen. Der rapide Abfall der mittleren Umfangsgeschwindigkeit im Freistrahlgebiet spricht darüber hinaus für diese Annahme.

5.5. Akustik

Die abgestrahlten Schallwellen der verschiedenen Rohr-Freistrahl-Kombinationen sind in den höherfrequenten SPOD-Moden sichtbar. Abbildung 5.25 zeigt die dominanten SPOD-Moden jeweils bei zwei diskreten Strouhalzahlen $St \approx 2.1$ und $St = 4.23$. Bei der Strouhalzahl $St \approx 2.1$ treten akustische Wellen auf, die aus dem Scherschichtbereich unmittelbar hinter dem Rohraustritt zu stammen scheinen und sich unter einem Winkel gegenüber der Achse von ungefähr $\theta \approx 45°$ ausbreiten. Bei rund doppelt so hoher Strouhalzahl $St \approx 4.2$ entspringen Schallwellen vom Rohrmittelpunkt am Ausgang, die sich unter einem größeren Winkel $\theta \approx 55°$ ausbreiten.

Um auch die Abhängigkeit von der azimutalen Richtung mit einzubeziehen, wurden die Druckfluktuationen durch zylindrische Anordnungen von 60 in azimutaler Richtung äquidistant verteilten Beobachterpunkten an jeweils drei Positionen im Freistrahlbereich aufgezeichnet. Die Anordnungen befinden sich an den Positionen $(x/d,\, r/d) = (7.24,\, 1.94)$, $(x/d,\, r/d) = (6.50,\, 3.75)$ und $(x/d,\, r/d) = (5.30,\, 5.30)$ jeweils mit Abstand $15R$ vom Rohrmittelpunkt am Auslass und den Winkeln $\theta = 15°$, $30°$, $45°$ gegenüber der Achse. Sie sind in Abbildung 5.26 markiert. Der Druck wurde über einen Zeitraum von $\Delta t\, U_j/R \approx 700$ aufgezeichnet. Ausschnitte des Drucksignals der drei Beobachter B1, B2 und B3 an jeweils einer azimutalen Position sind in Abbildung 5.27 dargestellt. Der Beobachter bei $\theta = 15°$ (B1) liegt sehr dicht an der Scherschicht des Freistrahls und ist teilweise noch durch aerodynamische Druckschwankungen beeinflusst. Das entsprechende Zeitsignal der Druckfluktuationen enthält insbesondere tieffrequente Anteile mit Strouhalzahl $St \approx 0.1$ und hoher Amplitude. An den Positionen B2 und B3 überwiegen höherfrequentere Schwingungen im Bereich $St \approx 1$, wobei im Signal bei B2 noch tieffrequente Schwingungen zu sehen sind, die in weiterer Entfernung von der Scherschicht bei B3 größtenteils abgeklungen sind. Abbildung 5.28 zeigt den totalen Schalldruckpegel über der azimutalen Richtung bei den drei Beobachterpositionen, der aus dem RMS-Wert des Drucks mithilfe der allgemeinen Formel

$$\mathrm{OASPL}(r,\varphi) = 10 \log\left(\frac{p_{\mathrm{rms}}^2(r,\varphi)}{p_{\mathrm{ref}}^2}\right) \mathrm{dB} \tag{5.16}$$

berechnet wurde [134], mit dem Referenzdruck $p_{\mathrm{ref}} = 20\,\mu\mathrm{Pa}$. Bei der Position B1 mit geringer Distanz zum Freistrahl treten hohe Schalldruckpegel bis zu 118 dB hervor. Mit zunehmendem Winkel $\theta = 30°$ (B2) und $\theta = 45°$ (B3) fallen die Schall-

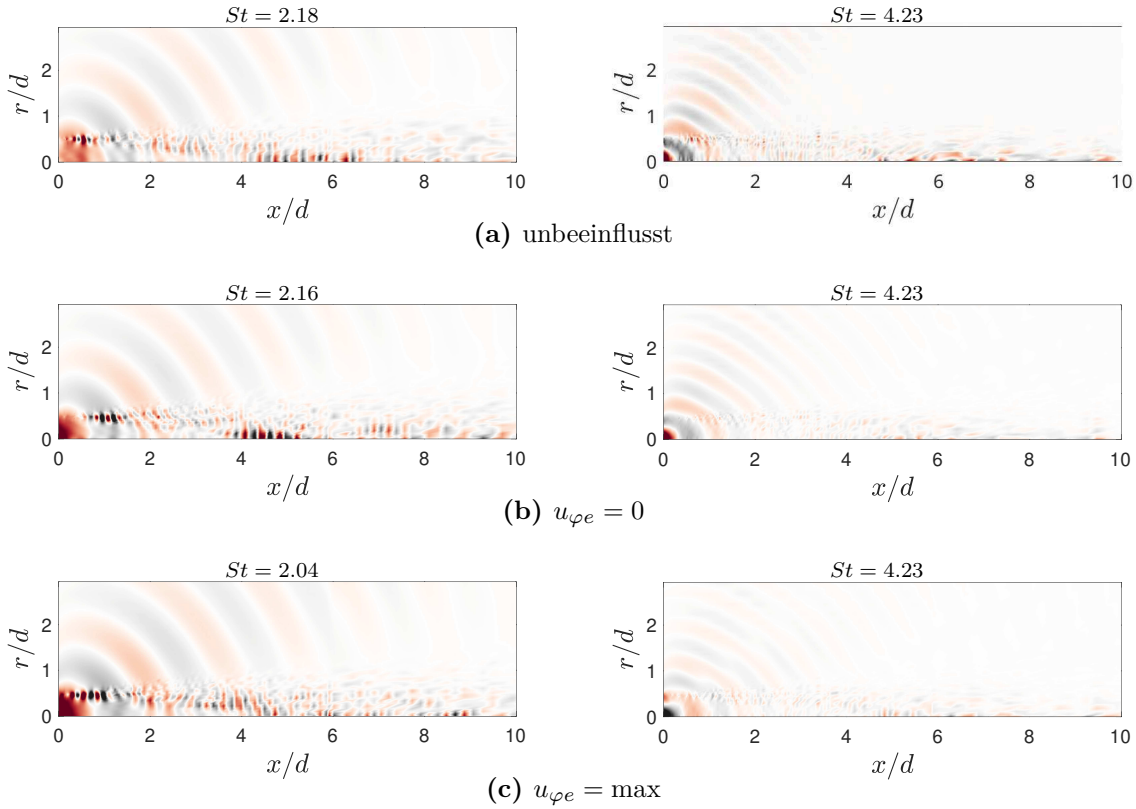


Abbildung 5.25: Visualisierung der Schallwellen mithilfe der dominanten SPOD-Moden bei zwei Strouhalzahlen $St \approx 2.1$ (links) und $St = 4.23$ (rechts) für den unbeeinflussten Fall (a) und die beeinflussten Fälle $u_{\varphi e} = 0$ (b) und $u_{\varphi e} = \max$ (c); , $-0.5 < \phi_p / \|\phi\|_\infty < 0.5$.

druckpegel in den Bereich von ca. 100 dB. Besonders bei der Position B2 werden die höheren Druckschwankungen der beeinflussten Konfiguration $u_{\varphi e} = 0$ über alle azimutalen Winkel φ deutlich. Mithilfe der zusätzlichen Umfangsgeschwindigkeit am Rohrauslass ($u_{\varphi e} = \max$) kann der Schalldruckpegel wiederum gesenkt werden, sodass sich kaum ein Unterschied zum unbeeinflussten Fall ergibt. Die Werte des totalen Schalldruckpegels entlang der axialen Richtung bei $r = 10R$ sind in Abbildung 5.29 aufgetragen. Während auch dort die Verläufe des unbeeinflussten und beeinflussten Falls $u_{\varphi e} = \max$ gut übereinstimmen, zeigt der beeinflusste Fall $u_{\varphi e} = 0$ ein leicht erhöhtes Maximum bei $x/R \approx 8$ und höhere Schalldruckpegel bei größeren axialen Entfernungen vom Rohrauslass. Die Ergebnisse der Akustik sind im Einklang mit den Beobachtungen in Bogey und Bailly [22], Barré et al. [12] und Brès et al. [26] bezüglich der starken Auswirkungen der Turbulenzlevel am Düsenausgang auf den abgestrahlten Schall. Im Extremfall des initial laminaren Freistrahls werden generell höhere Schalldruckpegel festgestellt, verbunden mit der verstärkten Schallabstrahlung durch die laminar-turbulente Transition der Scherschicht [26]. Der beeinflusste Fall

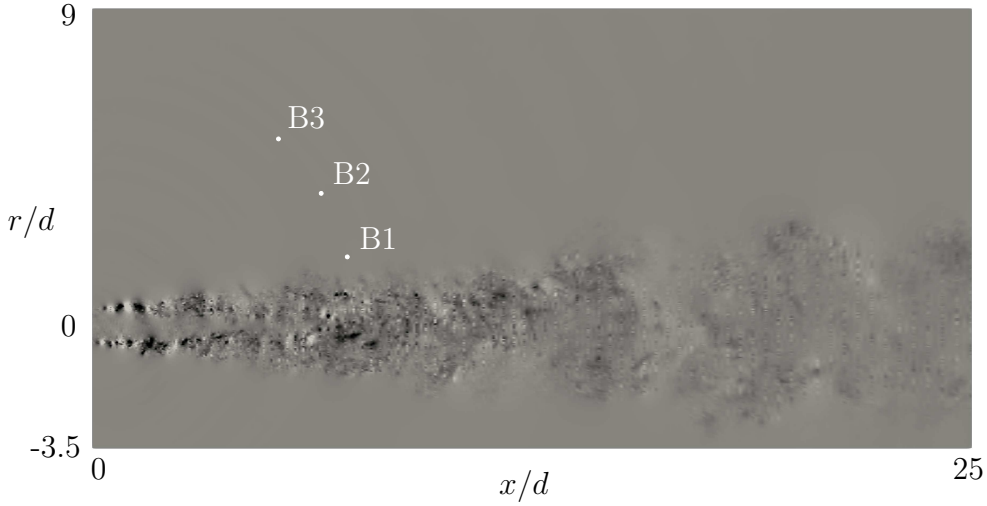
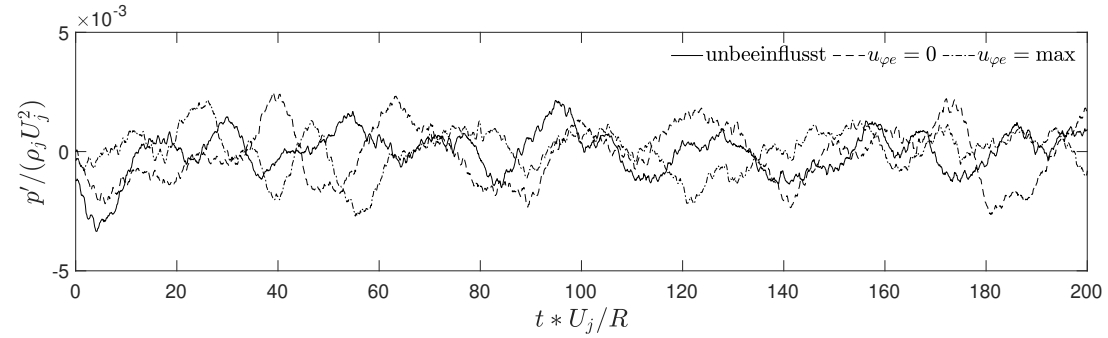
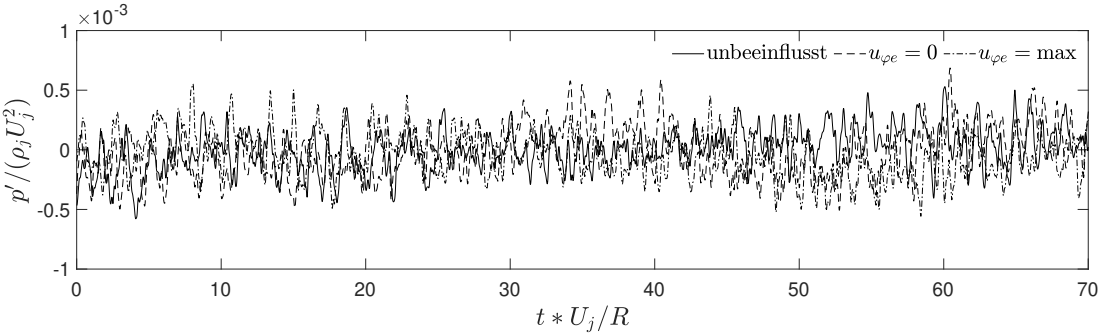


Abbildung 5.26: Normierter Druck p/p_j (, $0.99 < p/p_j < 1.005$) der unbeeinflussten Konfiguration und Positionen B1 - B3 der jeweils 60 zylindrisch angeordneten, in azimutaler Richtung gleich verteilten Beobachterpunkte in der $x-r$-Ebene des Freistrahls.

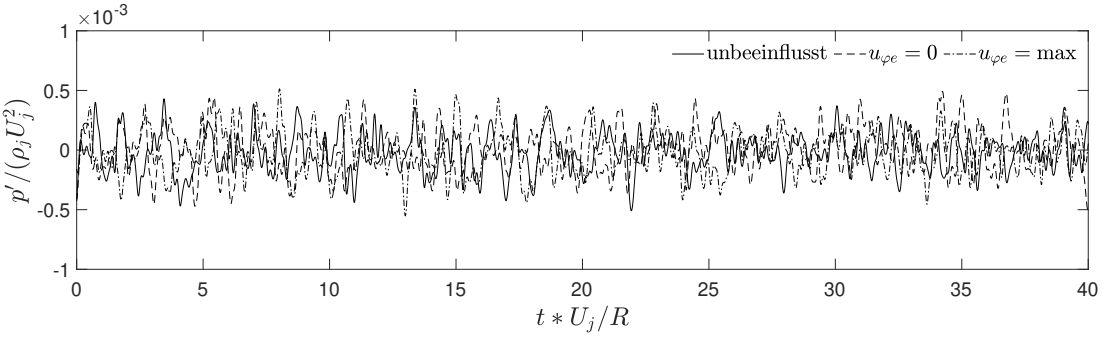
$u_{\varphi e} = 0$ besitzt durch die geringere turbulente Intensität am Rohraustritt gegenüber dem unbeeinflussten Fall "laminar-ähnlichere" Bedingungen. Damit sind auch alle damit verbundene Merkmale der Transition stärker ausgeprägt, die zu einer Erhöhung der Schalldruckpegel führen. Erneut bestätigt sich der positive Effekt der mittleren Rohrumfangsgeschwindigkeit am Auslass auf die Eigenschaften des Freistrahls. Das Mischungsverhalten in der Scherschicht verbessert sich durch die zusätzliche azimutale Scherschicht, sodass sich eine nahezu gleiche Schallabstrahlung wie im unbeeinflussten Fall ergibt, trotz deutlich niedriger Turbulenzintensität im Rohr und folglich geringerem Energieaufwand um die Strömung anzutreiben.



(a) B1

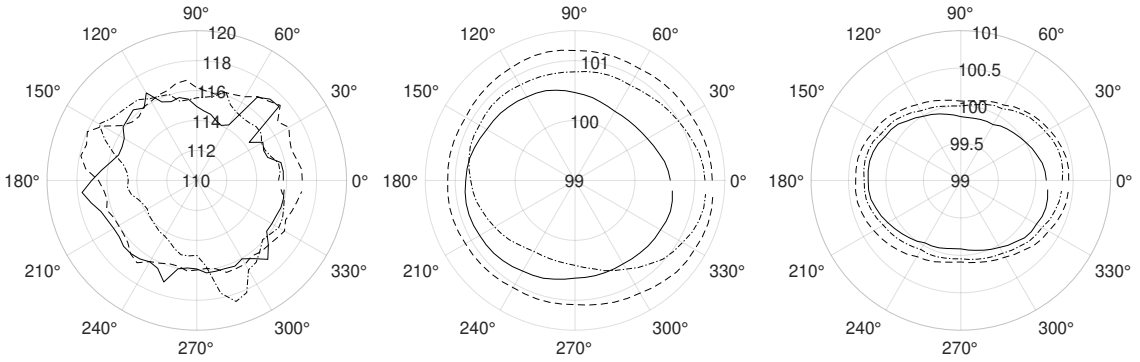


(b) B2



(c) B3

Abbildung 5.27: Ausschnitte des Zeitsignals der Druckfluktuationen für den unbeeinflussten Fall und die beeinflussten Fälle $u_{\varphi e} = 0$ und $u_{\varphi e} = \max$ jeweils an einer azimutalen Position der zylindrisch angeordneten Beobachter an den Positionen B1 (a), B2 (b) und B3 (c).



(a) B1 **(b)** B2 **(c)** B3

Abbildung 5.28: Totaler Schalldruckpegel OASPL (dB) bei den 60 zylindrisch angeordneten Beobachterpunkten an den Positionen B1 (a), B2 (b) und B3 (c). —— unbeeinflusst, − − − $u_{\varphi e} = 0$, − · −· $u_{\varphi e} = \max$.

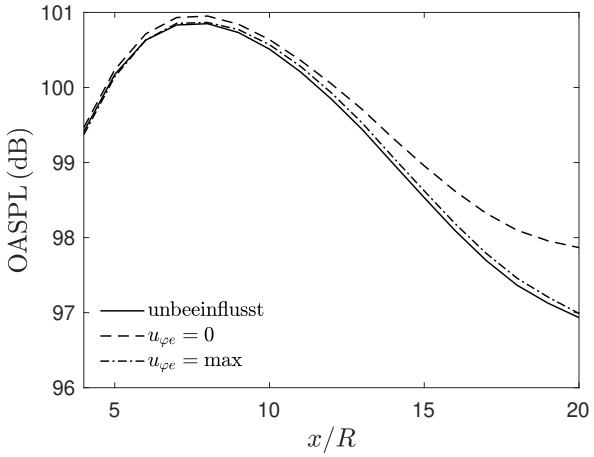


Abbildung 5.29: Totaler Schalldruckpegel OASPL (dB) entlang einer Linie parallel zur Freistrahlachse bei $r = 10R$ im Bereich $x/R = [4\ 20R]$.

5.6. Zusammenfassung

In dem Anwendungsbeispiel des Freistrahls aus einem rundem Rohr wurde untersucht, wie sich die Anwendung der Wandoszillationen auf den Freistrahlbereich auswirkt. Mit den gewählten Parametern der Beeinflussung ergibt sich eine Widerstandsreduktion von $\mathcal{DR} = 42\%$ der Rohrströmung, demnach sinkt bei konstantem Massenstrom die erforderliche Leistung um die Strömung gegen den viskosen Widerstand anzutreiben.
Die durch die Wandoszillationen generierte mittlere azimutale Geschwindigkeit fällt im Freistrahlbereich auf einer axialen Distanz von nur einem bis anderthalb Rohrdurchmessern auf einen vernachlässigbaren Wert ab. Somit ist die Ursache für eine geänderte Freistrahlentwicklung vor allem in der niedrigeren turbulenten Intensität am Rohraustritt, bedingt durch die drastisch reduzierte Wandschubspannung zu suchen. Eine hohe Sensitivität des Freistrahls gegenüber der Intensität der Geschwindigkeitsfluktuationen zeigte sich beispielsweise auch in Barré et al. [12] und Brès et al. [26] bei unterschiedlichen Düsenaustrittsbedingungen. Die gedämpfte Turbulenz im beeinflussten Fall bedingt höhere RMS-Werte der Geschwindigkeit auf der Achse in der entwickelnden Freistrahlregion. Höhere Druckfluktuationen in der Scherschicht in der initialen Entwicklungsregion des Freistrahls verbunden mit verstärkten Kelvin-Helmholtz Instabilitäten führen zudem zu höheren Schalldruckpegeln.
Positive Auswirkungen auf das Freistrahlverhalten konnten jedoch mit lokal am Rohrauslass erhöhter azimutaler Geschwindigkeit festgestellt werden. Dazu wurde die Geschwindigkeitsverteilung der Rohrwand um eine Viertelwellenlänge verschoben, sodass sich die maximale Umfangsgeschwindigkeit der sinusförmigen Verteilung unmittelbar am Auslass befindet. Der zusätzliche Drall reduziert die Peaks der Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen in den axialen Profilen sowie die Intensität der Kelvin-Helmholtz Instabilitäten. Mit gleichen Beeinflussungsparametern konnte auf diese Weise ein Freistrahl generiert werden, der sich (trotz geringerer turbulenter Intensität am Rohrauslass) sehr ähnlich zum unbeeinflussten Fall entwickelt, mit dem Vorteil einer stark reduzierten Antriebsleistung der Rohrströmung. Parallel zu dieser Beobachtung zeigt der Fall mit erhöhter azimutaler Geschwindigkeit auch Vorteile in der Schallabstrahlung gegenüber dem anderen beeinflussten Freistrahl. Beide Fälle zeigten eine Beeinflussung der Schallabstrahlung. Mit lokal am Rohrauslass erhöhter azimutaler Geschwindigkeit wurde ein minimal höherer Schalldruckpegel gemessen. Im Detail gab es unter Winkeln von ca. 90^o zur Achse am Ende des Potentialkerns keine großen Abweichungen zum unbeeinflussten Fall, während unter niedrigeren Winkeln eine minimal erhöhte Schallabstrahlung detektiert wurde. Dagegen zeigt der Fall mit verschwindender azimutaler Geschwindigkeit besonders unter niedrigen Winkeln deutlich erhöhte Schalldruckpegel, im Einklang mit den vorher erwähnten erhöhten RMS-Werten der Strömungsgrößen nach dem Düsenaustritt und erhöhter Energie in den SPOD-Moden.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Untersuchungen bezüglich einer aktiven Strömungsbeeinflussung zur Reduzierung des turbulenten Reibungswiderstandes wurden mithilfe direkter numerischer Simulationen und Large-Eddy Simulationen wandgebundener Strömungen durchgeführt. Die Methode stört den selbsterhaltenden Turbulenzkreislauf durch eine transversale Wandgeschwindigkeit, die in Stromrichtung sinusförmig moduliert. Bei fester Amplitude existiert eine optimale Wellenlänge, verbunden mit dem Zeitmaß der statistisch bedeutendsten turbulenten Strukturen, die eine hohe Widerstandsreduktion liefert. Die zugrundeliegenden Mechanismen der Widerstandsreduktion in inkompressibler Strömung sind bereits in vielerlei Hinsicht in der Literatur untersucht worden. Besonderes Augenmerk liegt deswegen hier auf dem Einfluss kompressibler Strömungsbedingungen auf die Effizienz der Strömungsbeeinflussung.

Im ersten Teil wurden dazu Kanalströmungen mit isothermen Wänden bei jeweils drei verschiedenen Mach- und Reynoldszahlen betrachtet, um den Effekt der Variation dieser beiden dimensionslosen Kennzahlen unabhängig voneinander zuverlässig beschreiben zu können. Die Variation der Machzahl ($Ma_b = [0.3,\ 1.5,\ 3]$) wird bei gleichbleibender lokaler Reynoldszahl in der Kanalmitte $Re^*_{\tau c}$ durchgeführt. Auf diese Weise wird eine gute Übereinstimmung der turbulenten Spannungen erzielt, wenn diese in innerer dichte-gewichteten Skalierung über der semilokalen Wandkoordinate aufgetragen werden. Der Vergleich unterschiedlicher Reynoldszahlen ($Re^*_{\tau c} = [150,\ 400,\ 800]$) erfolgt bei konstanter Machzahl Ma_b basierend auf der volumengemittelten Geschwindigkeit und der Wandtemperatur. Hierbei fallen die Profile der Dichte- und Temperaturverläufe annähernd aufeinander. Eine gute Übereinstimmung des Trettel & Larsson transformierten mittleren Geschwindigkeitsprofils konnte zudem für alle unbeeinflussten Fälle gezeigt werden. Zum Vergleich unbeeinflusster/beeinflusster Strömungen wird eine konstanter Massenstrom vorausgesetzt. Die supersonischen Kanalströmungen sind durch starke Gradienten der mittleren Dichte, Temperatur und Viskosität aufgrund des hohen Wärmeübergangs der Wandkühlung charakterisiert, gegenüber deren Effekten intrinsische Kompressibilitätseffekte in diesem Machzahlbereich üblicherweise als vernachlässigbar angenommen werden. Gegenüber inkompressibler Strömung zeigt sich eine erhöhte Anisotropie der Reynoldsspannungen.

Die Stromabkomponente nimmt zu, die wandnormale und Spannweitenkomponente nimmt ab, begleitet durch eine Abnahme der Druckscherkorrelation, Dissipation und der turbulenten und viskosen Transportterme in Wandnähe, wie auch in der Literatur festgestellt [51]. Durch die gedämpfte Umverteilung turbulenter kinetischer Energie von der Stromabkomponente in die beiden anderen Richtungen ist eine gesteigerte Kohärenz und Stabilität der Streaks, der dominanten Strukturen in wandnaher Turbulenz feststellbar. Als Folge ergibt sich für die supersonischen Kanalströmungen gegenüber inkompressibler Strömung mit gleicher lokaler Reynoldszahl in Kanalmitte ein geringerer Reibungskoeffizient. Insbesondere in der viskosen Unterschicht sind die Energiespektren der Geschwindigkeitsfluktuationen im Fourierraum zu größeren semilokalen Wellenlängen verschoben. Das Scheitern der semilokalen Skalierung in Wandnähe ist bekannt [51, 112] und wird beispielsweise auf nichtlokale Effekte durch die starke Variation der Dichte zurückgeführt. Die Effekte der variablen Fluideigenschaften sind insbesondere auch in den beeinflussten Strömungen nach wie vor vertreten und begünstigen dort die Wirkung der Beeinflussungsmethode. In Relation zu den vergleichbaren inkompressiblen Fällen wird eine höhere Widerstandsreduktion erzielt, die optimale Beeinflussungswellenlänge ist größer und der Verlauf der Widerstandsreduktionskurve über der Beeinflussungswellenlänge flacher. Das Verfahren ist weniger sensibel bezüglich eines exakt definierten Zeitmaßes der Turbulenz, was sich in sehr hoher Widerstandsreduktion im Bereich des optimalen Wertes in einem großen Bereich von Beeinflussungswellenlängen manifestiert. In der Leistungsbilanzierung spiegeln sich Wandkühlungseffekte in einer stark verringerten benötigten Leistung zur Aufrechterhaltung der Wandbewegungen wider. Unabhängig von der Reynoldszahl im untersuchten Bereich muss die Beeinflussung weniger viskose Arbeit in Spannweitenrichtung leisten. Sämtliche beschriebene Effekte verstärken sich mit zunehmender Machzahl Ma_b, durch eine unmittelbare Verstärkung der Kompressibilitätseffekte. Eine Erhöhung der Reynoldszahl bei gleichbleibender Machzahl Ma_b mildert die Auswirkungen der Kompressibilität. Der Reibungskoeffizient sinkt und durch den direkten Zusammenhang auch der Wandwärmeübergangskoeffizient. Die Bedeutung der Wandregion für den turbulenten Impuls- und Wärmeaustausch nimmt ab. Die turbulente Widerstandsgenerierung konzentriert sich verstärkt auf den äußeren Bereich und die turbulente Machzahl als Maß für intrinsische Kompressibilitätseffekte sinkt in Wandnähe. Die Auswirkungen einer veränderten Mach- und Reynoldszahl auf die Ergebnisse und Parameter der Strömungsbeeinflussung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- $Ma_b \uparrow$: $\mathcal{DR} \uparrow$, $\Lambda_x \uparrow$, $P_{\mathrm{req}} \downarrow$
- $Re \uparrow$: $\mathcal{DR} \downarrow$, $\Lambda_x \downarrow$

Die Effekte der steigenden Reynoldszahl werden gleichermaßen für alle betrachteten Machzahlen beobachtet. In den supersonischen Strömungen wirken sich Reynoldszahleffekte allerdings verhältnismäßig stärker aus. Während im Inkompressiblen die

zunehmende Bedeutung der äußeren Strukturen die erzielbare Widerstandsreduktion eindämmt, kommt im Kompressiblen zusätzlich der Rückgang positiver Auswirkungen durch intrinsische Kompressibilitäts- und Kühlungseffekte in Wandnähe dazu. Die großen äußeren Strukturen (very large anisotropic scales) wurden in zusätzlichen Simulationen der unbeeinflussten und beeinflussten Strömungen mit vergrößertem Rechengebiet bei den Machzahlen 0.3 und 1.5 mit einbezogen. Ein direkter Einfluss der Kompressibilität auf diese Strukturen konnte nicht nachgewiesen werden. Die Energiespektren der beeinflussten Strömungen zeigen einen hohen Beitrag in den dazugehörigen Wellenzahlen bereits in Wandnähe, welcher im supersonischen Fall aufgrund der höheren Beeinflussungswellenlänge und Widerstandsreduktion noch größer ist.

Die starke Variation der thermodynamischen Größen in Wandnähe und daraus folgend die lokale Änderung von Mach- und Reynoldszahl macht einen Vergleich mit inkompressiblen Strömungen schwierig. Parallel dazu ist der wechselseitige Einfluss von intrinsischen Kompressibilitätseffekten und solchem aufgrund von starken Variationen in Dichte oder Temperatur aufgrund der Wandkühlung schwierig zu separieren. Im zweiten Teil der Arbeit wurden deswegen in Anlehnung an Yu et al. [157], Gattere et al. [58] und Hasan et al. [72] Kühlterme zur Energiegleichung der kompressiblen Kanalströmungen, exemplarisch für eine Machzahl von $Ma_b = 1.5$, basierend auf der volumengemittelten Dichte und Geschwindigkeit, hinzugefügt. Durch einen räumlich konstanten Term (Konfiguration *bc*) wird ein mittleres Temperaturprofil ähnlich zu Grenzschichtströmungen erzielt. In unmittelbarer Wandnähe ergibt sich eine nahezu konstante Temperatur, die mit zunehmendem Wandabstand auf ca. 70 % der Wandtemperatur abfällt. Ein anderer Kühlterm in Form der mittleren Dissipation (Konfiguration *dc*) eliminiert die Variationen der mittleren Fluideigenschaften dagegen fast vollständig und erlaubt daher die isolierte Betrachtung intrinsischer Kompressibilitätseffekte. Ein Kühlterm von Null (Konfiguration *zc*) entspricht der Kanalkonfiguration aus dem ersten Teil, wo die Temperatur in der Kanalmitte ungehindert ansteigt bis sich die Wärme der Strömung mit dem Wandwärmefluss im Gleichgewicht befindet. Die Reynoldszahl Re_τ basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit wurde für die verschiedenen Konfigurationen auf einen Wert von 510 fixiert und mit einer inkompressiblen Strömung der gleichen Reynoldszahl verglichen. Die Simulation ohne Kühlterm wurde zusätzlich bei einer höheren Reynoldszahl durchgeführt (Konfiguration *zc2*), sodass die lokale Reynoldszahl in der Kanalmitte mit Re_τ der inkompressiblen Strömung übereinstimmt, analog zur Vergleichsstrategie im ersten Teil dieser Arbeit.
Die Analyse der verschiedenen Kühlkonfigurationen bestätigt noch einmal die starken Effekte der variablen Fluideigenschaften, die für erhebliche Abweichungen in den Ergebnissen der Widerstandsreduktion gegenüber inkompressibler Strömung sorgen. Daneben spielen aber auch intrinsische Kompressibilitätseffekte und der Wandwärmestrom eine große Rolle. Die höchste Widerstandsreduktion aller betrachteter Fälle wird für den Fall *zc1* ohne Kühlterm und fixierter Wand-Reynoldszahl erreicht mit

$\mathcal{DR} = 48\,\%$ gegenüber $40\,\%$ im unbeeinflussten Fall. Sowohl der Wandwärmestrom, als auch die Effekte variabler Fluideigenschaften sind dort groß, da durch die fehlende Außenkühlung die entstehende Wärme komplett über die Wand abgeführt werden muss. Entsprechend groß sind die wandnahen Kompressibilitätseffekte, was sich in einer stark erhöhten Effizienz der Widerstandsreduktion und einer erheblichen Verschiebung der optimalen Beeinflussungswellenlänge zu größeren Werten äußert, aufgrund der im ersten Teil gezeigten Phänomene. Letztere gehen stark zurück, wenn der Vergleich auf Basis der gleichen Reynoldszahl der unbeeinflussten Fälle in der Kanalmitte $Re^*_{\tau c}$ erfolgt (Fall *zc2*, $\mathcal{DR} = 42\,\%$), wie bei kompressiblen Kanalströmungen ohne Beeinflussung und Kühlterm sonst üblich. Ein direkter Vergleich mit den anderen Kühlstrategien ist hier sehr schwierig aufgrund der stark variierenden lokalen Reynoldszahl. Eine vergleichbare Reynoldszahl Re_τ an der Wand ist im Sinne der Strömungsbeeinflussung sicherlich von großem Vorteil, da sich deren Einfluss stark auf den wandnahen Bereich konzentriert. Die starke Variation der lokalen Reynoldszahl in der Übergangsschicht und darüber hinaus verändert die Dynamik in der wandnahen Schicht allerdings in einem solchen Maße, dass deren Einfluss nicht vernachlässigt werden kann und über eine angepasste Reynoldszahl wie im Fall *zc2* berücksichtigt werden muss. Auf diese Weise ändert sich das Bild und die maximale Widerstandsreduktion des Falls *dc* ($\mathcal{DR} = 44\,\%$) übertrifft die der Konfiguration ohne Kühlterm *zc2* ($\mathcal{DR} = 42\,\%$). In diesem hypothetischen Fall wird die mittlere Dissipation über den Kühlterm vollständig entfernt, womit Effekte der variablen Fluideigenschaften und der Wandkühlung eliminiert und intrinsische Kompressibilitätseffekte isoliert werden. Der Einfluss intrinsischer Effekte macht sich in den Statistiken der unbeeinflussten und beeinflussten Fälle, wie auch in den Ergebnissen der Widerstandsreduktion deutlich bemerkbar. Der Energietransfer von der Stromabkomponente zu den anderen beiden Komponenten ist gegenüber der inkompressiblen Strömung gehemmt, was zu einer Aufwärtsverschiebung im logarithmischen Geschwindigkeitsprofil führt. Die optimale Beeinflussungswellenlänge verschiebt sich zu einem höheren Wert und die Widerstandsreduktion nimmt zu. Die Konfiguration *bc* nutzt einen räumlich konstanten Kühlterm, der sich im zentralen Bereich des Kanals, wo Trägheitseffekte dominieren, relativ stark auswirkt. Die Folge ist ein mittleres Geschwindigkeitsprofil ähnlich zu Plattengrenzschichtströmungen, wo zusätzlich die Kühlleistung der freien Außenströmung zur Verfügung steht. Der Wert des diabatischen Parameters Θ, auch dimensionslose Temperatur genannt, der die Wandtemperatureffekte in nicht-adiabaten Strömungen charakterisiert, beträgt hier 0.58. Somit sind Effekte der Wandkühlung im Gegensatz zur Konfiguration *dc* zu berücksichtigen. Die Höhe der Widerstandsreduktion ($\mathcal{DR} = 41\,\%$) verhält sich in dem Fall sehr ähnlich zum inkompressiblen Fall ($\mathcal{DR} = 40\,\%$) und lässt auf den ersten Blick vermuten, dass Kompressibilitätseffekte keine Rolle spielen, nachdem die Effekte der variablen Fluideigenschaften in Wandnähe nahezu eliminiert und der diabatische Parameter für unbeeinflusste und beeinflusste Strömungen fixiert wurde. Eine eingehende Analyse der mittleren thermodynamischen Größen und deren Fluktuationen, der turbulenten Spannungen und

deren Bilanzen, sowie der integralen Beiträge zum Wandwärmestrom offenbarte jedoch einen anderen Grund für die nur marginal bessere Performance im Vergleich zum Inkompressiblen. Die zusätzliche, stark lokal eingebrachte Wärme durch die Wandoszillationen sorgt für einen erhöhten Wandwärmeübergang, der durch den Kühlterm zur Fixierung des diabatischen Parameters Θ kaum kompensiert wird. Die Strömung reagiert auf den geänderten Zustand mit einer Erhöhung des Reibungswiderstandes an der Wand. Somit sind Effekte der Kompressibilität auch bei der Konfiguration mit räumlich konstantem Kühlterm stark vertreten, werden jedoch nach Anwendung der Strömungsbeeinflussung von deren negativen thermischen Auswirkungen nahezu vollständig überschattet. Unabhängig von der gewählten Kühlstrategie zeigte sich jeweils ein ähnliches Bild. Die Anisotropie der turbulenten Spannungen nimmt mehr oder weniger stark zu, die viskose und turbulente Spannung erfährt eine Dämpfung und Verschiebung zu größeren Wandabständen, was wiederum den Achsenabschnitt des logarithmischen Gesetztes in den transformierten Geschwindigkeitsprofilen erhöht. In den beeinflussten Strömungen sind die gleichen Effekte zu beobachten. Die Widerstandsreduktion bei optimaler Beeinflussungswellenlänge wird erhöht, wobei letztere zu größeren Werten verschoben wird. Effekte der variablen Fluideigenschaften und intrinsische Kompressibilitätseffekte äußern sich damit in ähnlicher Weise. Gleiches gilt auch für die Intensität der Wandkühlung bei den grenzschichtähnlichen Temperaturprofilen. Teilweise wird von einer direkten Verstärkung der intrinsischen Kompressibilitätseffekte durch Wandkühlung gesprochen [10, 152]. Daneben existieren Effekte der Stratifizierung aufgrund des erhöhten Peaks der mittleren Temperatur in Wandnähe [35]. Vor dem Hintergrund der gewonnenen Erkenntnisse im zweiten Teil der Arbeit muss die Annahme der Vernachlässigbarkeit intrinsischer Kompressibilitätseffekte gegenüber Effekten der variablen Fluideigenschaften in supersonischen Kanalströmungen relativiert werden. Gerade die Erhöhung der turbulenten Intensität in Stromabrichtung gegenüber der inkompressiblen Strömung war trotz deutlicher Reduzierung der mittleren Temperaturvariation weiterhin deutlich ausgeprägt. Dieser Effekt ist bislang allein als Resultat der variablen Fluideigenschaften betrachtet worden [72].

Im dritten Teil der Arbeit wurde erprobt, inwiefern die betrachtete Beeinflussungsmethode geeignet ist, einen Freistrahl in ruhende Umgebung zu beeinflussen. Als Düse wurde ein rundes Rohr mit einer Länge von ca. 16 Rohrdurchmessern in das Rechengebiet einbezogen, auf dem die transversalen Wandbewegungen angewandt wurden. Large-Eddy Simulationen wurden bei einer Reynoldszahl von $Re_\tau = 365$ im Rohr, einer Reynoldszahl des Freistrahls basierend auf Größen am Rohraustritt von $Re_d = 12000$ und einer Machzahl am Rohraustritt von 0.3 durchgeführt. Synthetische Turbulenzgenerierung am Rohreinlass gewährleistet nahezu vollständig ausgebildete Profile der mittleren und fluktuierenden Geschwindigkeit am Auslass und damit physikalische turbulente Anfangsbedingungen für den Freistrahl. Der Vergleich zum unbeeinflussten Fall erfolgte basierend auf einem konstanten Massenfluss im Rohr, was sich in einer Reduktion des Wandreibungskoeffizienten von 42 % auswirkt. Die

sinusförmige Variation der transversalen Umfangsgeschwindigkeit in Stromrichtung wurde auf zwei verschiedene Arten auf die Rohrwand aufgeprägt, sodass sich unterschiedliche Umfangsgeschwindigkeiten am Rohrauslass ergeben. Im ersten Fall ist die Umfangsgeschwindigkeit analog zur unbeeinflussten Rohrströmung Null, im zweiten Fall ist sie maximal mit dem Wert der Amplitude $12u_\tau$. Die zusätzliche Umfangsgeschwindigkeit sorgt für eine zusätzliche azimutale Scherschicht im Freistrahlbereich. Sie fällt allerdings bereits nach einer Distanz von ungefähr einem Rohrdurchmesser auf einen vernachlässigbaren Wert ab, weshalb sich deren Einfluss auf einen sehr kleinen Bereich in der initialen Entwicklungsregion des Freistrahls beschränkt. Die beeinflussten Freistrahlen starten mit einer geringeren Impulsverlustdicke und weiten verglichen mit dem unbeeinflussten Fall etwas später auf. Bei der beeinflussten Konfiguration mit einer Umfangsgeschwindigkeit von Null am Auslass zeigen die RMS-Werte der Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen in radialer und azimutaler Richtung in der Scherschicht, sowie auf der Achse höhere Maximalwerte. Das Verhalten wird in viel stärker ausgeprägter Form auch bei Freistrahlen mit laminaren Düsenaustrittsbedingungen beobachtet, bei denen die Transition zur Turbulenz erst im Freistrahlgebiet erfolgt. Die spektrale Orthogonalbasiszerlegung (SPOD) offenbart eine größere Dominanz von Wellenpaketen, die mit Kelvin-Helmholtz Instabilitäten in Verbindung gebracht werden in den ersten vier azimutalen Fouriermoden. Das stärkere Auftreten dieser kohärenten Strukturen verstärkt wiederum die Schallabstrahlung. Da kein direkter Zusammenhang der räumlich oszillierenden transversalen Geschwindigkeitsverteilung durch die Beeinflussung im Rohr und der veränderten Freistrahlentwicklung festgestellt werden konnte, ist davon auszugehen, dass allein die veränderte Rohraustrittsbedingung mit einer geringeren Turbulenzintensität entscheidend ist. Alle beschriebene Aspekte, die ein stärker transitionales Verhalten des Freistrahls charakterisieren, können eliminiert werden durch die zusätzliche Umfangsgeschwindigkeit direkt am Auslass. Die SPOD-Eigenwertespektren, die Verläufe der Dichte- und Geschwindigkeits-RMS und Schalldruckpegel gleichen sich denen der unbeeinflussten Konfiguration an. Lediglich der maximale RMS-Wert der azimutalen Geschwindigkeitsfluktuationen in der Scherschicht bleibt gegenüber dem unbeeinflussten Fall minimal erhöht, das Maximum der axialen Komponente wird dagegen sogar verringert. Die Ergebnisse zeigen, dass eine verringerte Turbulenzintensität am Düsenauslass grundsätzlich kontraproduktiv hinsichtlich einer schnellen, gleichmäßigen Freistrahlentwicklung mit geringer Schallabstrahlung ist. Unter Nutzung des Dralls durch Platzierung der maximalen Umfangsgeschwindigkeit unmittelbar am Rohrauslass ist es jedoch gelungen, einen zum unbeeinflussten Zustand ähnlichen Freistrahl ohne die negativen Effekte der verringerten Turbulenzintensität zu generieren. Der Vorteil besteht in der deutlich reduzierten Wandschubspannung der Rohrströmung, verbunden mit einer geringeren Antriebsleistung der Strömung.

Einschränkungen, praktische Überlegungen und Ausblick

Die untersuchten Reynoldszahlen der kompressiblen Kanalströmungen liegen in einem Bereich, wo der Reibungskoeffizient noch stark mit der Reynoldszahl variiert.

Bei sehr hohen Reynoldszahlen existiert dagegen nur eine schwache Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Reynoldszahl. Somit ist eine Extrapolation der Daten schwierig und es kann nur der Trend einer steigenden Reynoldszahl erfasst werden. Inwieweit sich die Kompressibilitätseffekte noch bei realitätsnahen Reynoldszahlen auswirken bleibt offen. In der Literatur werden größtenteils hohe Amplituden der Wandoszillationen verwendet, bei der die Effekte der Widerstandsreduktion deutlich hervortreten und deren Analyse erleichtert ist. Ein gängiger Wert von $A = 12u_\tau$ wurde in dieser Arbeit übernommen, um einen Vergleich mit Ergebnissen anderer Arbeiten zu ermöglichen. Nach drei Jahrzehnten Forschungsaufwand mit wichtigen Fortschritten im Bereich der Wandoszillationen sollten sich die Untersuchungen zukünftig auf geringere Amplituden fokussieren. Eine Amplitude von $12u_\tau$, was Wandgeschwindigkeiten von 30 bis 60 Prozent der mittleren Geschwindigkeit in der Kanalmitte bedeutet, sind wenig realistisch, gerade im Hinblick auf supersonische Strömungen und die oft in Aussicht gestellte Möglichkeit, das Verfahren durch passive Methoden zu replizieren. Die höchste Nettoersparnis tritt im Inkompressiblen bei Werten der Amplitude von $A^+ \approx 6$ auf [63]. Experimente haben bereits große Probleme die numerisch untersuchten Fälle bei üblicherweise niedrigen Reynoldszahlen nachzubilden, durch Limitierungen der Betriebsfrequenz und Amplitude in der Versuchseinrichtung [128]. Selbst wenn man davon ausgeht, dass die optimale Oszillationsperiode universell bei einem Wert von $T^+_{\text{opt}} = 120$ bleibt, entspräche das einer Frequenz von 15 kHz bei der Tragflügelumströmung eines Verkehrsflugzeugs mit einer Geschwindigkeit von 225 m/s in 10 km über dem Meeresspiegel [120]. Aus Sicht der Vergleichbarkeit hätte eine geringere Amplitude den Vorteil, dass unter konstantem Massenfluss die Reynoldszahl gegenüber dem unbeeinflussten Fall weniger stark absinkt. Auch würden die Kompressibilitätseffekte in den supersonischen beeinflussten Strömungen relativ stärker zum Tragen kommen, durch eine geringere Reduktion der turbulenten Machzahl und Schubspannungsmachzahl und des Wandwärmestroms durch die Beeinflussung. Wegen der geringeren benötigten Energie bei großen Beeinflussungswellenlängen und den praktischen Restriktionen erscheint eine großskalige Beeinflussung als der einzige Weg zu energieeffizienter Widerstandsreduktion bei hohen Reynoldszahlen. Äußerst vielversprechend sind in dieser Hinsicht die Experimente von Marusic et al. [102], die relativ niederfrequente in Strömungsrichtung wandernde Wellen transversaler Geschwindigkeit beinhalten um die großen äußeren Skalen zu beeinflussen. Demnach ist es (*erst*) bei sehr hohen Reynoldszahlen möglich, durch Beeinflussung der großen äußeren Skalen auf effiziente Weise indirekt die für die Widerstandsgenerierung hauptverantwortlichen inneren Skalen zu beeinflussen. Möglich wird dies durch eine verstärkte Kopplung zwischen den inneren und äußeren Skalen mit steigender Reynoldszahl, wodurch die Effizienz dieser Beeinflussungsstrategie wahrscheinlich sogar mit der Reynoldszahl weiter zunehmen wird. Numerische Simulationen bei derart hohen Reynoldszahlen sind in absehbarer Zeit nicht möglich.

Die Anwendung verschiedener Kühlterme in den Kanalströmungen offenbarte eine hohe Bedeutung intrinsischer Kompressibilitätseffekte für die Effizienz der Widerstands-

reduktion. Fraglich bleibt, inwieweit diese Effekte in realistischen äußeren Strömungen im supersonischen Bereich vorkommen. Der Fall mit eliminierter mittleren Dissipation ist rein hypothetisch. In einer verwandten Arbeit (Hasan et al. [72]) zeigten sich bei der untersuchten Machzahl von 4 intrinsische Kompressibilitätseffekte in ähnlicher Größenordnung wie in der hypersonischen Grenzschicht mit $Ma_\infty = 14$ von Zhang et al. [159]. Durch die Eliminierung der üblicherweise starken Variation der Temperatur kommt es zu deutlichen Diskrepanzen in der Machzahl, was dazu führt, dass intrinsische Kompressibilitätseffekte stark überschätzt werden. Der räumlich konstante Kühlterm hat ein grenzschichtähnliches Temperaturprofil zur Folge. Der Fall ist damit realistischer, kann aber bestenfalls eine Annäherung an reale Grenzschichtströmungen sein. Abweichungen der unbeeinflussten Strömung vom inkompressiblen Verhalten sind in dieser Arbeit beispielsweise beim van-Driest transformierten Geschwindigkeitsprofil zu sehen, wo Grenzschichten in der Regel sehr gute Überlappung zeigen. Besonders bei der Kanalströmung mit grenzschichtähnlichem Temperaturprofil zeigte sich die hohe Amplitude der Wandbewegungen kontraproduktiv, indem die generierte Wärme der Beeinflussung einen zusätzlichen, vorher nicht vorhandenen Beitrag zum Reibungswiderstand lieferte. Die Strategie müsste in diesem Fall sein, durch eine geringe Amplitude den Wärmeeintrag zu minimieren und die (vorteilhaften) intrinsischen Kompressibilitätseffekte bestmöglich zu erhalten.
Hinsichtlich des numerischen Gitters wäre eine verbesserte Auflösung des unmittelbaren Wandbereichs zu überlegen, da sich die Effekte der Beeinflussung und Wandkühlung speziell auf diese Region konzentrieren. Baranwal et al. [9] konnten dadurch ein verändertes asymptotisches wandnahes Verhalten der turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse, sowie verstärkte Dilatationseffekte an der Wand bei variierender Machzahl nachweisen.
Um die Effekte der Wandoszillationen auf die Entwicklung eines Freistrahls allgemeingültiger zu untermauern, wären weitere Beeinflussungsparameter und höhere Reynolds- und Machzahlen wünschenswert. Runde Freistrahlen werden in Experimenten gewöhnlicherweise erst ab einer Reynoldszahl von $Re_d \geq 5 \cdot 10^5$ als initial turbulent betrachtet [158]. Die damit verbundene geringe Dicke der Düsengrenzschicht stellt jedoch enorme Anforderungen an die Rechenkapazitäten. Interessant wäre auch ein Vergleich der unbeeinflussten/beeinflussten Fälle unter gleichbleibender Eingangsleistung (*constant power input* [55]), bei der die kombinierte Leistung um die Strömung und die Wand anzutreiben konstant bleibt. In diesem Fall profitiert das System aus Düse und Freistrahl sowohl von einer geringeren Wandschubspannung als auch von einer höheren Schubkraft.

A. Validierung Kanal

Um die Genauigkeit des verwendeten Strömungslösers bezüglich der turbulenten Kanalströmungen zu überprüfen, werden die Profile der mittleren Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen der Konfiguration M03R150 mit den Daten aus einer inkompressiblen DNS von Modesti und Pirozzoli [104] bei $Re_\tau = 180$ verglichen. Modesti und Pirozzoli [104] diskretisierten die nichtlinearen und viskosen Terme der Navier-Stokes Gleichungen mithilfe von Verfahren sechster Ordnung und nutzten ein explizites Runge-Kutta Verfahren für die zeitliche Entwicklung. Eine gute Übereinstimmung ist in Abbildung A.1 mit den Daten aus dieser Arbeit zu sehen. Das verwendete numerische Verfahren ist ebenso in der Lage, supersonische Kanalströmungen mit hoher Genauigkeit zu beschreiben, wie der Vergleich des Falls M15R150 mit den DNS-Daten aus Foysi et al. [52] in Abbildung A.2 zeigt. Foysi et al. [52] verwendeten das kompakte upwind Schema von Adams und Shariff [3] für die Diskretisierung der hyperbolischen Terme und das kompakte Schema sechster Ordnung von Lele [95] für die molekularen Terme, sowie ein Runge-Kutta Zeitintegrationsverfahren dritter Ordnung. Exzellente Übereinstimmung ist in den Verläufen der van-Driest transformierten Geschwindigkeit, der Dichte und Viskosität, sowie den Reynoldsspannungen über der wandnormalen Koordinate zu sehen.

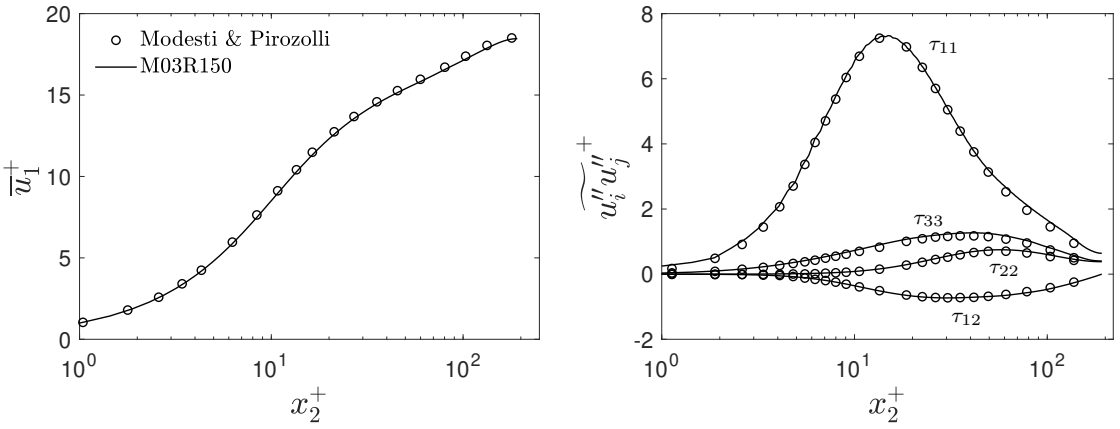
Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen u_1' in den beiden homogenen Richtungen

$$R_{x_1}^{u_1'u_1'} = \frac{\overline{u_1'(x_1 = 0)u_1'(x_1)}}{\overline{u_1'(x_1 = 0)u_1'(x_1 = 0)}} \tag{A.1}$$

und

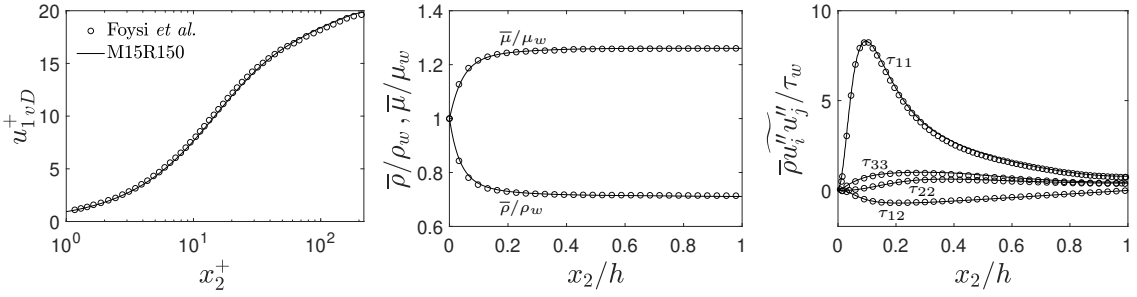
$$R_{x_3}^{u_1'u_1'}(x_3) = \frac{\overline{u_1'(x_3 = 0)u_1'(x_3)}}{\overline{u_1'(x_3 = 0)u_1'(x_3 = 0)}} \tag{A.2}$$

sind in Abbildung A.3 für ausgewählte Konfigurationen bei den Wandabständen $x_2^* = 20$ und $x_2 = h/2$ gezeigt. Das Abfallen auf Null innerhalb der betrachteten Intervalle $x_1 = [0\ L_{x_1}/2]$ und $x_3 = [0\ L_{x_3}/2]$ ist ein Hinweis darauf, dass der Großteil



(a) **(b)**

Abbildung A.1: Mittlere Geschwindigkeit (a) und turbulente Spannungen (b) für den Fall M03R150 mit Strömungsparametern $Ma_b = 0.3$ und $Re_\tau = 192$ im Vergleich zu den DNS-Daten von Modesti und Pirozzoli [104] (inkompressibel, $Re_\tau = 180$).



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung A.2: Verläufe der van-Driest transformierten Geschwindigkeit (a), der normierten mittleren Viskosität und Dichte (b) und turbulenten Spannungen (c) für den Fall M15R150 mit Strömungsparametern $Ma_b = 1.5$ und $Re_\tau = 218$ im Vergleich zu den DNS-Daten von Foysi [51] ($Ma_b = 1.5$, $Re_\tau = 221$).

der Gesamtenergie in Strukturen steckt, die in das Rechengebiet passen. Hohe Werte der Korrelationen treten dagegen im Fall M15R800 mit der regulären Rechengebietsgröße $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [2\pi, \pi]h$ unter Beeinflussung bei $x_2 = h/2$ auf (Abbildung A.4a). Bei diesem Wandabstand haben die VLAS ihre maximale Intensität [42]. Durch die Dominanz dieser Strukturen in der beeinflussten Strömung, deren Größe nicht annähernd in das Rechengebiet passt, fallen die Korrelationen weniger stark ab, besonders für die Beeinflussungswellenlängen, die eine hohe Widerstandsreduktion hervorrufen. In unbeeinflusster Strömung ist es wegen der energetischen Dominanz der kleineren Wirbelstrukturen möglich, dass die Zweipunktkorrelationen auf Null abfallen und trotzdem noch viel Energie (bis 30 % der Gesamtenergie) in Strukturen steckt, die nicht in das Rechengebiet passen [51, 42]. Abbildung A.4b zeigt die Zweipunktkorre-

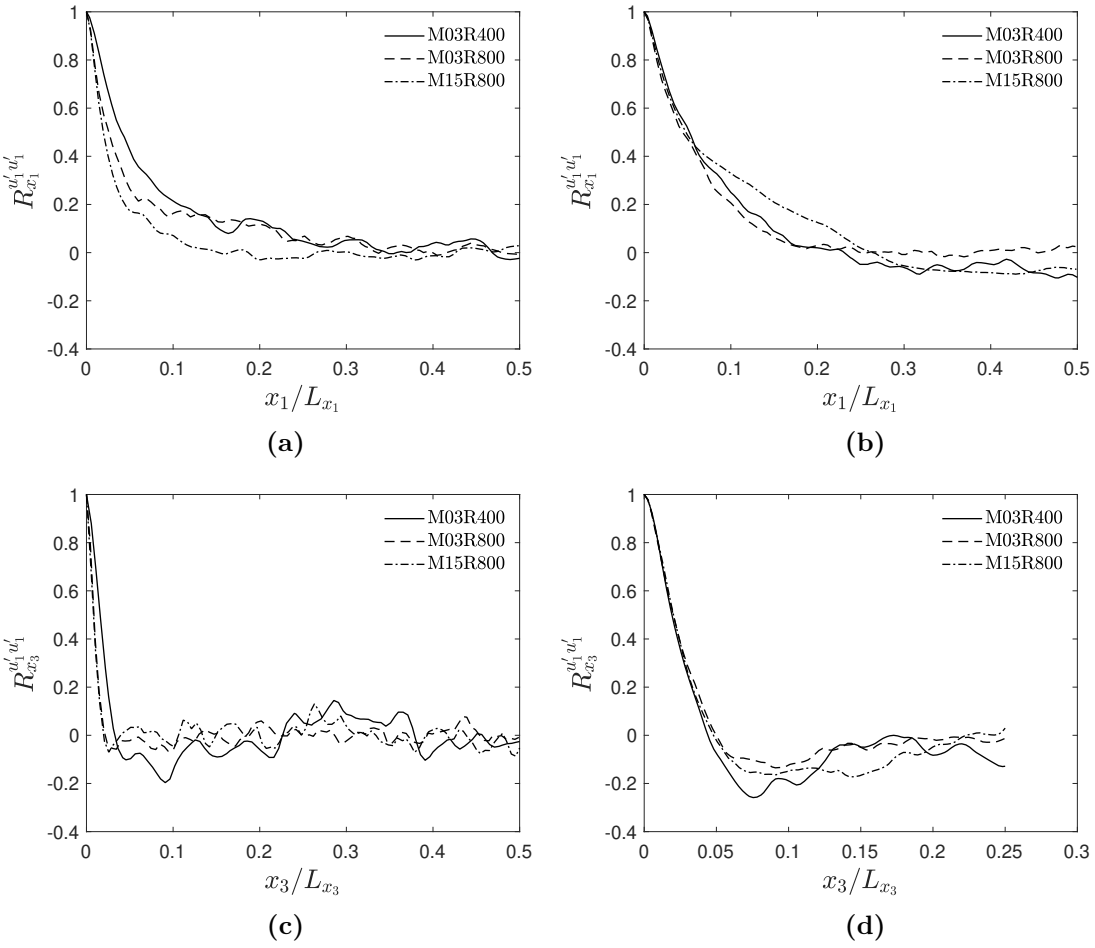
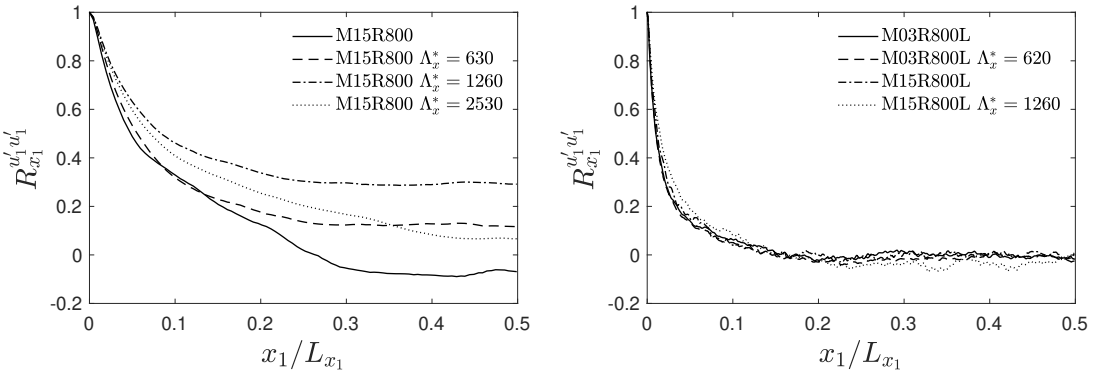


Abbildung A.3: Zweipunktkorrelationen $R^{u_1'u_1'}_{x_1}$ (a,b) und $R^{u_1'u_1'}_{x_3}$ (c,d) bei $x_2^* = 20$ (a,c) und $x_2 = h/2$ (b,d).

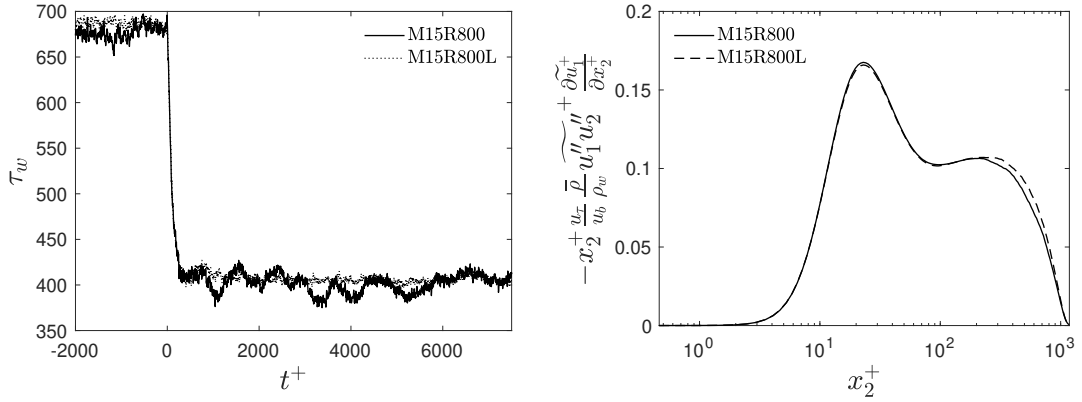
lationen für die Simulationen mit vergrößertem Rechengebiet zur Untersuchung der VLAS in Abschnitt 3.10. Ein Abfallen auf Null ist für die unbeeinflussten und beeinflussten Fälle gleichermaßen bereits ab $x_1 \approx L_{x_1}/4$ zu beobachten. Trotz der nicht abfallenden Zweipunktkorrelationen im beeinflussten Fall M15R800 bei optimaler Beeinflussungswellenlänge wird die Wandschubspannung korrekt wiedergegeben, wie der Vergleich mit dem vergrößerten Rechengebiet in Abbildung A.5a zeigt. Der Anteil des turbulenten Reibungswiderstands aufgrund der VLAS wird in dem kleinen Rechengebiet nur geringfügig unterschätzt, was an den Werten der gewichteten Integranden des turbulenten Anteils am Reibungswiderstand C_{f2}/C_f gemäß der kompressiblen Renard & Deck Zerlegung aus Abschnitt 3.5.1 bei großem Wandabstand x_2^+ sichtbar ist (Abbildung A.5b). Die Simulationen des unbeeinflussten Falls M15R800 und des beeinflussten Falls M15R800 mit Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$ wurden zudem jeweils mit einer erhöhten Anzahl an Gitterpunkten $N_{x_1} \times N_{x_2} \times N_{x_3} = 660 \times 560 \times 660$ ausgehend



(a) **(b)**

Abbildung A.4: Zweipunktkorrelationen $R_{x_1}^{u_1' u_1'}$ bei $x_2 = h/2$. (a) Unbeeinflusste und beeinflusste Konfigurationen M15R800 mit Rechengebietsgröße $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [2\pi, \pi]h$; (b) Unbeeinflusste und beeinflusste Konfigurationen M03R800L und M15R800L mit vergrößertem Rechengebiet $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [12\pi, 4\pi]h$ bzw. $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [10\pi, 3\pi]h$.

von der Lösung mit Originalauflösung $N_{x_1} \times N_{x_2} \times N_{x_3} = 396 \times 336 \times 396$ für ein kurzes Zeitintervall von $\Delta t^+ = 1000$ fortgesetzt. Damit ergibt sich eine verbesserte Auflösung von $\Delta x_1^+ \times \Delta x_2^+ \times \Delta x_3^+ = 11.3 \times 0.28 - 10.8 \times 5.6$ in viskosen Wandeinheiten gegenüber der ursprünglichen Auflösung von $18.8 \times 0.46 - 18.0 \times 9.4$ im Fall der unbeeinflussten Strömung. Der Verlauf der Wandschubspannung in Abbildung A.6 zeigt keinen veränderlichen Trend aufgrund der erhöhten Auflösung, die ab $t^+ = 0$ angewandt wurde. Sowohl die Größe des Rechengebiets, als auch die Gitterauflösung sind damit angemessen gewählt.



(a) **(b)**

Abbildung A.5: Vergleich der Rechengebietsgrößen $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [2\pi, \pi]h$ (M15R800) und $[L_{x_1}, L_{x_3}] = [10\pi, 3\pi]h$ (M15R800L). (a) Zeitlicher Verlauf der Wandschubspannung der unbeeinflussten ($t^+ = t\rho_w u_\tau^2/\mu_w < 0$) und beeinflussten Strömung ($t^+ \geq 0$) mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$; (b) Gewichtete Integranden des turbulenten Anteils am Reibungswiderstand C_{f2}/C_f gemäß der kompressiblen Renard & Deck Zerlegung für die unbeeinflusste Strömung.

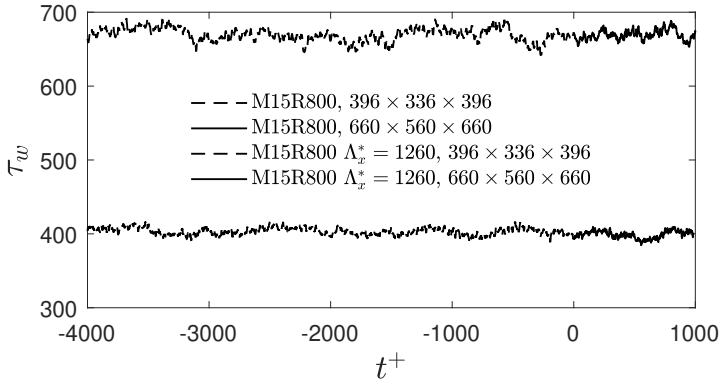


Abbildung A.6: Zeitlicher Verlauf der Wandschubspannung für den Fall M15R800 (unbeeinflusst und mit optimaler Wellenlänge $\Lambda_x^* = 1260$). Vergleich der Originalauflösung $N_{x_1} \times N_{x_2} \times N_{x_3} = 396 \times 336 \times 396$ ($t^+ < 0$) jeweils mit erhöhter Gitterauflösung $N_{x_1} \times N_{x_2} \times N_{x_3} = 660 \times 560 \times 660$ ($t^+ \geq 0$).

B. Validierung Freistrahl

B.1. Rohströmung

Jeweils eine DNS und eine ILES der turbulenten Rohrströmung wurde durchgeführt, um diese mit Ergebnissen aus der Literatur zu validieren und den Einfluss der reduzierten Auflösung im Fall der ILES zu bewerten. Zusätzlich werden die Resultate der DNS für die synthetische Turbulenzgenerierung bei den Freistrahlsimulationen genutzt. Der Simulationsbereich besteht in beiden Fällen aus dem runden Rohr mit Radius R und Länge $4\pi R$ entlang der x-Koordinate. Die Strömung wird analog zu den periodischen Kanalströmungen durch eine Volumenkraft angetrieben, die durch einen Regler zeitlich variiert wird, um einen konstanten Massenstrom zu erreichen. Die Reynoldszahlen sind $Re_b = \rho_b u_b d/\mu_w = 11700$ und $Re_\tau = \rho_w u_\tau R/\mu_w = 365$, die Machzahl beträgt $Ma_b = u_b/\sqrt{\gamma R T_w} = 0.3$. Weitere Simulationsparameter sind in Tabelle B.1 aufgeführt. Die Auflösung ist im Fall der ILES gegenüber der DNS bei ansonsten gleichbleibenden Parametern reduziert und entspricht der verwendeten Auflösung bei den Freistrahlsimulationen. Abbildung B.1 zeigt die Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer Richtung

$$R_x^{u_i' u_i'}(x) = \frac{\overline{u_i'(x=0) u_i'(x)}}{\overline{u_i'(x=0) u_i'(x=0)}} \tag{B.1}$$

Case	Ma_b	Re_b	Re_τ	L_x	C_f ($\times 10^{-3}$)	N	Δx^+	Δr^+	$\Delta r\varphi^+$
DNS	0.3	11700	365	$4\pi R$	7.65	$17.55 \cdot 10^6$	11.5	$0.41 - 6.75$	$5.31 - 7.96$
ILES	0.3	11700	368	$4\pi R$	7.76	$2.51 \cdot 10^6$	30.2	$1.3 - 10.2$	$7.96 - 11.93$

Tabelle B.1: Parameter der periodischen Rohrströmungen. $Re_\tau = \rho_w u_\tau R/\mu_w$ und $Re_b = \rho_b u_b d/\mu_w$ sind die Reynoldszahlen mit Rohrradius und -durchmesser R und d und L_x ist die axiale Rohrlänge. $C_f = 2\tau_w/(\rho_b u_b^2)$ bezeichnet den Reibungskoeffizienten, N ist die Anzahl der Gitterpunkte und Δx, Δr, $\Delta r\varphi$ sind die Gitterweiten in axialer, radialer und azimutaler Richtung.

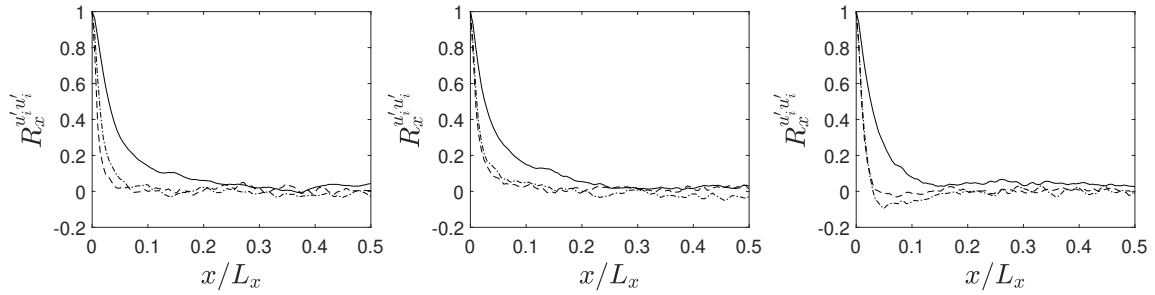


Abbildung B.1: Zweipunktkorrelationen der Rohr-DNS bei den Wandabständen $(R - r)^+ = 5$ (a), $(R - r)^+ = 20$ (b) und $(r - R) = R/2$ (c). ——— $R_x^{u_x'u_x'}$; − − − $R_x^{u_r'u_r'}$; − · − · − $R_x^{u_\varphi'u_\varphi'}$.

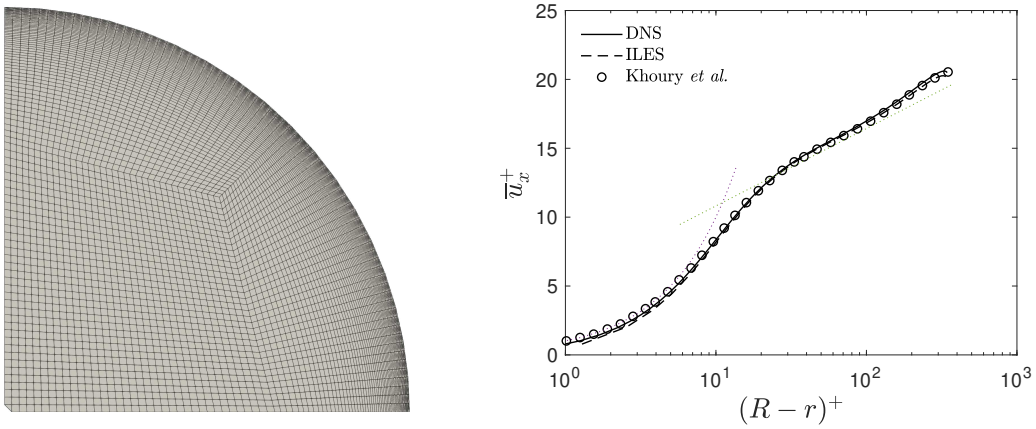


Abbildung B.2: (a) Ein Viertel des numerischen Gitters der Rohr-DNS in der $r - \varphi$-Ebene; (b) Vergleich des mittleren Geschwindigkeitsprofils von DNS, ILES und der DNS von El Khoury et al. [50]. ····· $u_x^+ = (R - r)^+$ und $u_x^+ = 1/0.41 \ln((R - r)^+) + 5.2$.

der DNS bei verschiedenen Wandabständen. Ein allgemein akzeptiertes Kriterium für die notwendige Größe der numerischen Box ist das Abfallen der Zweipunktkorrelationen innerhalb der Hälfte der betrachteten Richtung auf Null [51]. Dies ist für alle Geschwindigkeitskomponenten bei den betrachteten Wandabständen erfüllt, sodass die Gebietslänge in axialer Richtung hinreichend groß gewählt wurde. Ein Ausschnitt des numerischen Gitters der DNS in der $r-\varphi$-Ebene ist in Abbildung B.2a dargestellt. Der Vergleich der beiden Simulationen mit der DNS von El Khoury et al. [50] (gleiche Reynoldszahl, Rohrlänge $25R$) in Abbildung B.2b zeigt gute Übereinstimmung. Auch die Profile der Turbulenzintensitäten $u_{i,rms}^+$ und der Reynoldsscherspannung $\overline{u_x'u_r'}$ in Abbildung B.3 decken sich gut mit den Ergebnissen von El Khoury et al. [50]. Leichte

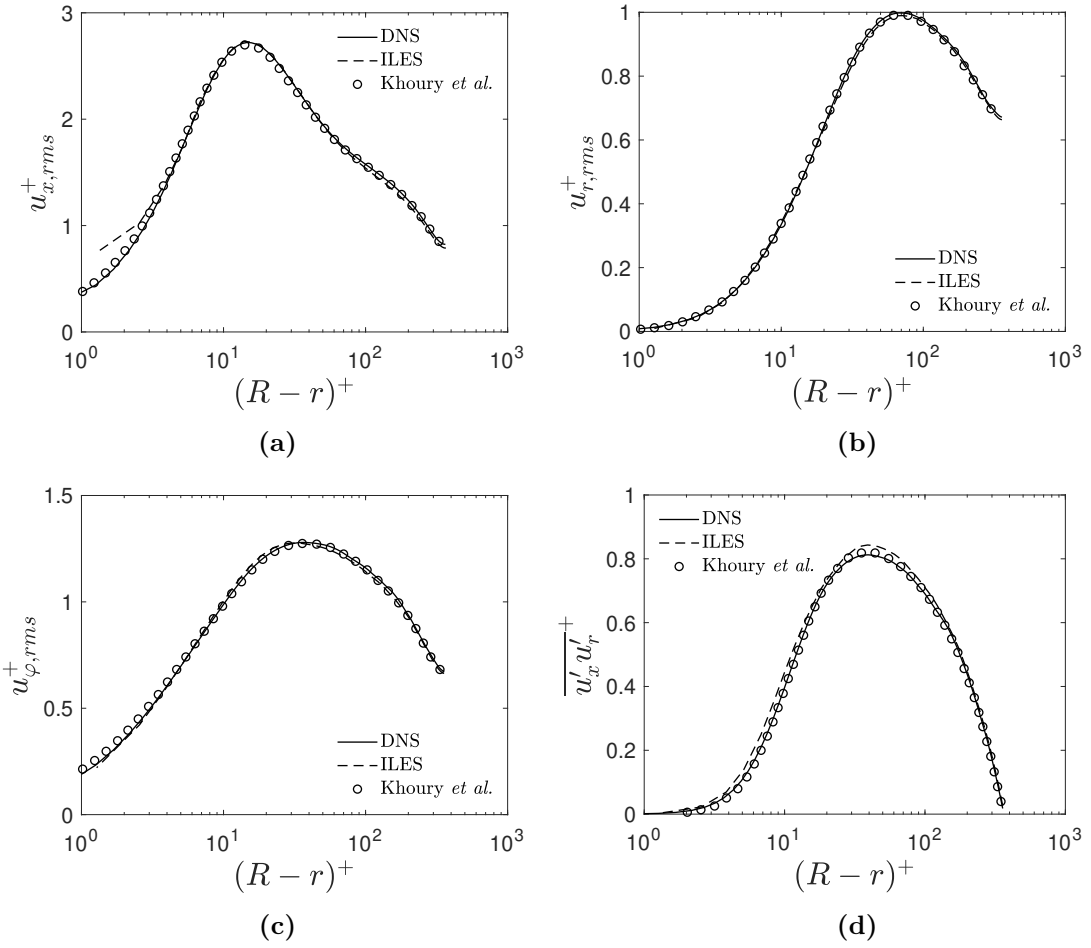


Abbildung B.3: RMS-Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer (a), radialer (b), azimutaler Richtung (c) und Reynoldsscherspannung (d) als Funktion des Wandabstands $(R-r)^+$.

Abweichungen der ILES mit reduzierter Auflösung ergeben sich in der turbulenten Intensität der axialen Geschwindigkeit im Wandbereich (Abbildung B.3a) und bei der Reynoldsscherspannung (Abbildung B.3d), was zu einem leicht erhöhten Widerstandskoeffizienten C_f gegenüber der DNS führt (siehe Tabelle B.1). Die Unterschiede sind jedoch gering gegenüber der hohen Widerstandsreduktion, die durch die Strömungsbeeinflussung hervorgerufen wird. Der Verlauf der Wandschubspannung ist in Abbildung B.4 für die DNS und ILES dargestellt, wobei die Wand ab der Zeit $t^+ = 0$ jeweils mit der Wellenlänge $\Lambda_x^+ = 1145$ und der Amplitude $A^+ = 12$ beeinflusst wurde. Die gleichen Parameter werden auch zur Beeinflussung des Freistrahls verwendet. Die Wandschubspannungen der DNS und ILES unterscheiden sich im beeinflussten Zustand aufgrund der herabgesetzten Reynoldszahl kaum noch. In der Widerstandsreduktion $\mathcal{DR} = 1 - C_f/C_{f0}$ macht sich der Fehler aufgrund der geringeren Auflösung der ILES mit $\mathcal{DR} = 42.5\,\%$ gegenüber $42.1\,\%$ (DNS) kaum bemerkbar. Die gezeigten

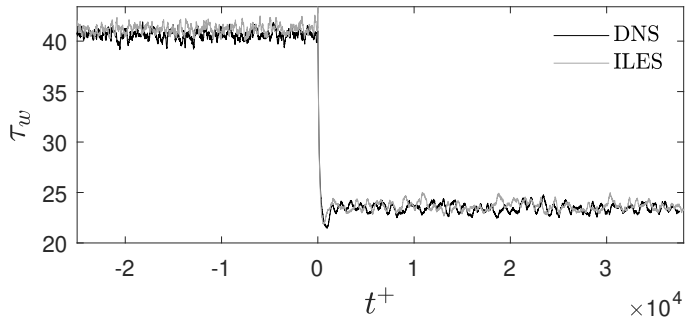


Abbildung B.4: Verlauf der Wandschubspannung über t^+ für die unbeeinflussten Strömungen ($t^+ \leq 0$) und unter Anwendung der Wandoszillationen mit Wellenlänge $\Lambda_x^+ = 1145$ ($t^+ > 0$).

Vergleiche bestätigen, dass die Auflösung der ILES geeignet ist, die Turbulenz der Rohrströmung und die Effekte durch die Wandoszillationen exakt zu beschreiben. Sämtliche Parameter werden daher auch für die Simulationen der Rohr/Freistrahl-Kombination in Kapitel 5 verwendet.

B.2. Synthetische Turbulenzgenerierung

Zur Generierung von Turbulenz im Einlassbereich der Rohrströmung wird eine Quelltermformulierung der Synthtetic-Eddy Methode [65] benutzt. Im Gegensatz zu Recycling Methoden, die ganze Strömungsfelder aus vorangegangenen Simulationen nutzen, generieren synthetische Methoden ein fluktuierendes Geschwindigkeitsfeld basierend auf analytischen Formulierungen. Die Synthetic-Eddy Methode gehört zur letztgenannten Klasse der Turbulenzgenerierung. Die Methode definiert fiktive kohärente Wirbel. Diese Wirbel werden am Einlass des Strömungsgebiets zufällig verteilt und sind durch vorgegebene Funktionen mit kompaktem Support charakterisiert, die eine bestimmte Normierungsbedingung erfüllen [65]. Durch Konvektion dieser Wirbel durch das Strömungsgebiet wird die Lösung beeinflusst. Konkret wird ein stochastisches Signal $\hat{u}_j(x_i, t)$ in Abhängigkeit der Raumrichtungen x_i und der Zeit t generiert, das folgende Bedingungen erfüllt:

$$\overline{\hat{u}_j} = 0 \tag{B.2}$$

$$\overline{\hat{u}_j^2} = 1 \tag{B.3}$$

$$\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} = 0\,, \quad i \neq j \quad . \tag{B.4}$$

Das instantane Geschwindigkeitsfeld u_k an der Position $\mathbf{x}$ und zur Zeit t setzt sich aus der vorgegebenen mittleren Geschwindigkeit U_k und dem Signal $\hat{u}_j$ zusammen

gemäß

$$u_k(\mathbf{x},t) = U_k(\mathbf{x}) + u'_k(\mathbf{x},t) = U_k(\mathbf{x}) + \sum_j A_{kj}(\mathbf{x})\hat{u}_j(\mathbf{x},t) \quad . \tag{B.5}$$

Die untere Dreiecksmatrix A ergibt sich aus der Choleski-Zerlegung der vorgegebenen Reynoldsspannungen $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ zu

$$A = \begin{bmatrix} R_{11}^{1/2} & 0 & 0 \\ R_{21}/A_{11} & (R_{22} - A_{21}^2)^{1/2} & 0 \\ R_{31}/A_{11} & (R_{32} - A_{21}A_{31}/A_{22} & (R_{33} - A_{31}^2 - A_{32}^2)^{1/2} \end{bmatrix} \quad . \tag{B.6}$$

Damit bewirkt die Bedingung B.2, dass der Mittelwert des Geschwindigkeitsfelds u_k die vorgegebene mittlere Geschwindigkeit U_k ist, und der Mittelwert der Fluktuationen die vorgegebenen Reynoldsspannungen liefert, d.h. $\overline{u'_k u'_m} = R_{km}$ [65]. Das Signal $\hat{u}_j$ wird zudem derart gebildet, dass es im Ort gemäß vorgegebener Längenskalen l_{ij} variiert, die sich aus den Korrelationen der Geschwindigkeit ergeben als

$$l_{ij} = \int_0^\infty \mathcal{R}_{ij}(\xi)d\xi, \qquad i = x_i, \quad j = \hat{u}_j \quad . \tag{B.7}$$

Die verwendete Quelltermformulierung von Giangaspero et al. [65] erlaubt die Vorgabe von neun unabhängigen Längenskalen, die im vorliegenden Fall des Freistrahls gemäß Gleichung B.7 durch Integration der Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen aus der Rohrströmungssimulation in Abschnitt B.1 bestimmt werden.

Die Methode wurde anhand einer Rohrströmung mit Länge $L_x = 20\pi R$ und charakteristischen Randbedingungen basierend auf den Riemann-Invarianten in axialer Richtung getestet. Als Referenz dient die ILES aus Tabelle B.1 mit periodischen Randbedingungen und gleicher räumlicher Auflösung. Dieselbe Auflösung und dieselben Parameter der Turbulenzgenerierung (Längenskalen und Reynoldsspannungen) wurden auch im Rohrbereich der Freistrahlsimulationen verwendet. Der axiale Verlauf der Wandschubspannung in der Strömung mit synthetischer Turbulenzgenerierung ist in Abbildung B.5 jeweils für den unbeeinflussten und beeinflussten Fall auf den mittleren Wert der periodischen Strömung bezogen. Schon ab ca. $x = 10R$ ist der Wandwiderstand jeweils eingeschwungen. Die Entwicklung der Profile der mittleren Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen in axialer Richtung ist in den Abbildungen B.6 - B.10 für die unbeeinflusste Strömung mit synthetischer Turbulenzgenerierung bezüglich der periodischen Referenzströmung gezeigt. Die Profile werden jeweils an drei axialen Positionen $x/R = 10$, $x/R = 30$ und $x/R = 50$ betrachtet, wobei die Position $x/R = 30$ ungefähr dem Auslass des Rohrs in der Freistrahlsimulation entspricht. Sehr gute Überlappung mit den Profilen der periodischen Referenzströmung ist bei der mittleren Geschwindigkeit schon ab $x/R = 10$ zu sehen mit leichten Abweichungen im Mittenbereich (Abbildung B.6). Bei den Profilen der Reynoldsspannungen

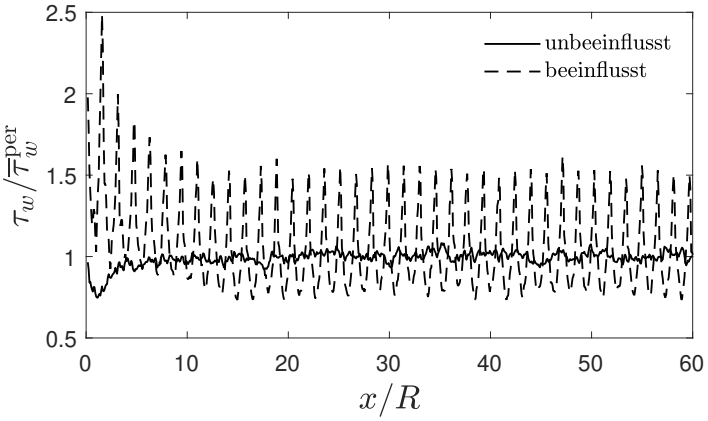
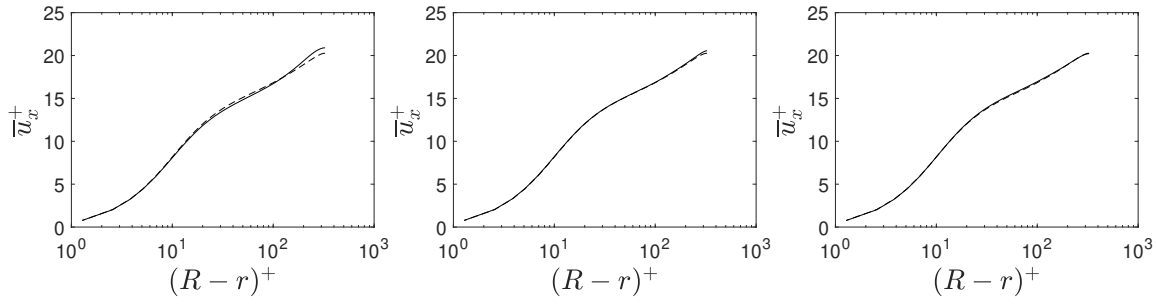


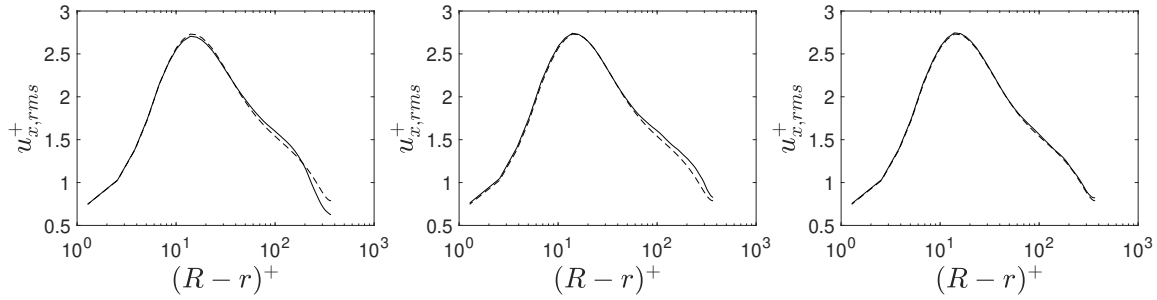
Abbildung B.5: Entwicklung der Wandschubspannung τ_w der Rohrströmung mit synthetischer Turbulenzgenerierung in axialer Richtung bezogen auf den mittleren Wert der periodischen Rohrströmung $\overline{\tau}_w^{\mathrm{per}}$.

ist eine gute Übereinstimmung im Wandbereich schon ab $x/R = 10$ erkennbar (Abbildungen B.7-B.10). Die turbulenten Spannungen sind im Mittenbereich zunächst bei $x/R = 10$ zu niedrig, übertreffen bei $x/R = 30$ die Referenzlösung und gleichen sich bei $x/R = 50$ der Referenzlösung im gesamten radialen Bereich an. Ein ähnliches Verhalten ist auch bei den beeinflussten Strömungen unter Anwendung der Wandoszillationen mit $\Lambda_x = \pi R$ bzw. $\Lambda_x^+ = 1145$ in den Abbildung B.11 - B.14 zu sehen. Hier wurde jeweils zusätzlich in axialer Richtung über eine Beeinflussungswellenlänge Λ_x gemittelt. Während die turbulente Intensität in axialer Richtung im Bereich des Freistrahlaustritts bei $x/R = [10\ 11]\pi$ schon gut mit der Referenzlösung übereinstimmt, kommt es dort bei den restlichen Komponenten zu einem leichten Überschreiten, das sich erst im Bereich $x/R = [16\ 17]\pi$ relativiert. Die Ergebnisse zeigen, dass die Lösung unter Verwendung der synthetischen Turbulenzgenerierung bereits bei $x/R = 30$ bzw. im Bereich $x/R = [10\ 11]\pi$ gut entwickelt ist. Die Profile zeigen noch leichte Abweichungen gegenüber der Referenzlösung mit periodischen Randbedingungen, die jedoch im Hinblick auf die großen Unterschiede zwischen dem beeinflussten und unbeeinflussten Fall tolerierbar sind. Als Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenaufwand wird die Rohrlänge in den Freistrahlsimulationen daher zu $10\pi R$ gewählt.



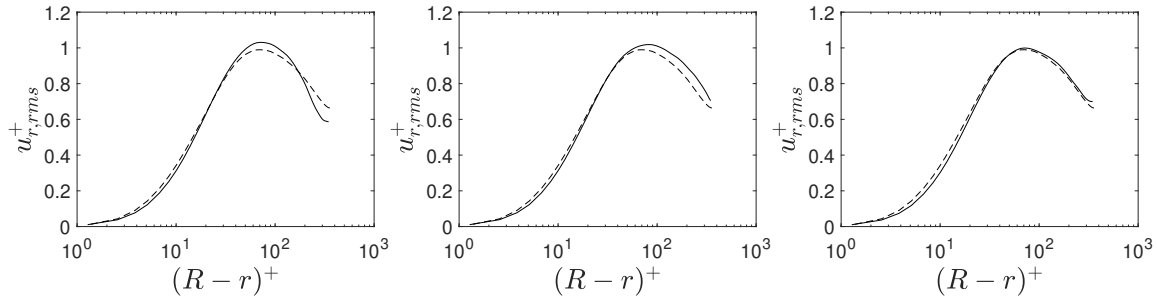
(a) $x/R = 10$ **(b)** $x/R = 30$ **(c)** $x/R = 50$

Abbildung B.6: Unbeeinflusste Profile der axialen Geschwindigkeit u_x über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit und in azimutaler Richtung. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; – – – periodische ILES.



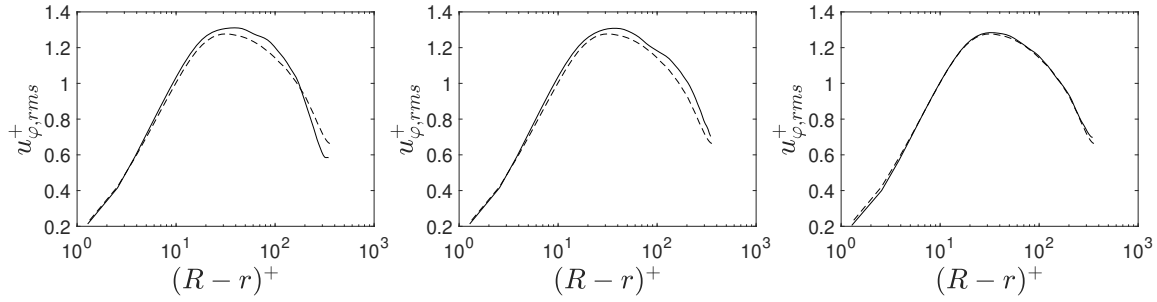
(a) $x/R = 10$ **(b)** $x/R = 30$ **(c)** $x/R = 50$

Abbildung B.7: Unbeeinflusste Profile $u_{x,rms}^+ = \overline{u_x' u_x'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit und in azimutaler Richtung. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; – – – periodische ILES.



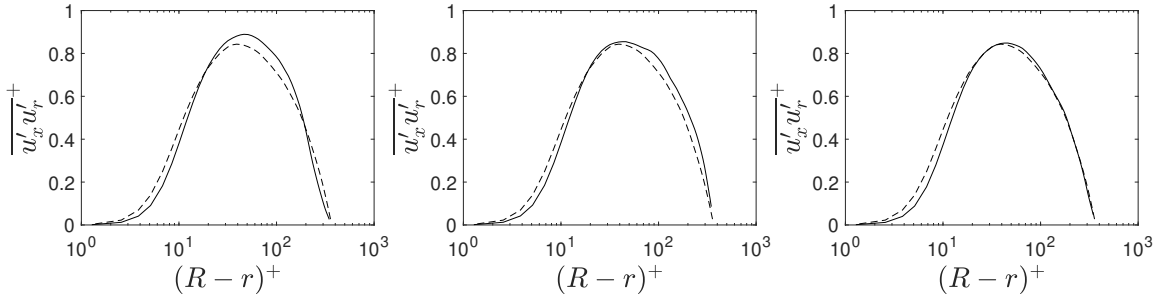
(a) $x/R = 10$ **(b)** $x/R = 30$ **(c)** $x/R = 50$

Abbildung B.8: Unbeeinflusste Profile $u_{r,rms}^+ = \overline{u_r' u_r'}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit und in azimutaler Richtung. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; – – – periodische ILES.



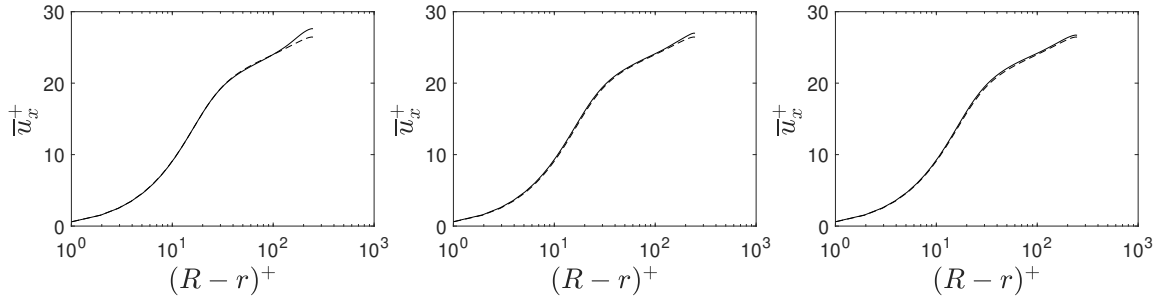
(a) $x/R = 10$ **(b)** $x/R = 30$ **(c)** $x/R = 50$

Abbildung B.9: Unbeeinflusste Profile $u^+_{\varphi,rms} = \overline{u'_\varphi u'_\varphi}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit und in azimutaler Richtung. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.



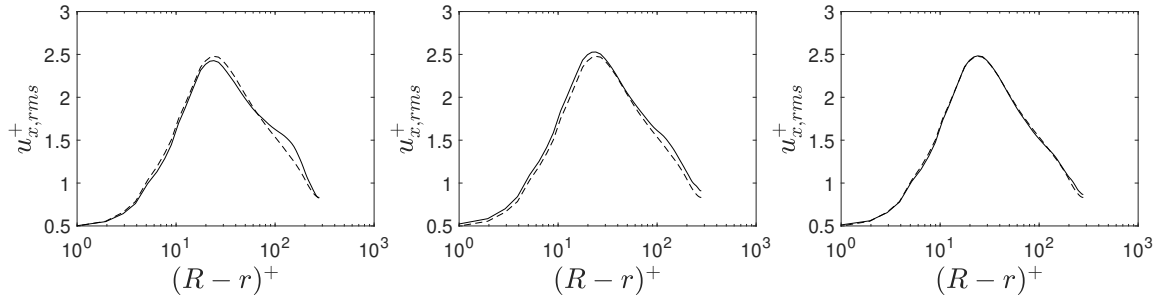
(a) $x/R = 10$ **(b)** $x/R = 30$ **(c)** $x/R = 50$

Abbildung B.10: Unbeeinflusste Profile $= \overline{u'_x u'_r}/u^2_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit und in azimutaler Richtung. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.



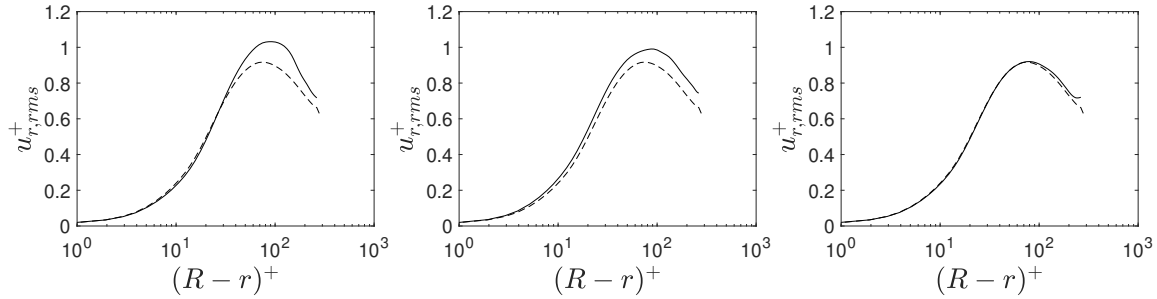
(a) $x/R = [4\ 5]\pi$ **(b)** $x/R = [10\ 11]\pi$ **(c)** $x/R = [16\ 17]\pi$

Abbildung B.11: Beeinflusste Profile der axialen Geschwindigkeit u_x über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit, in azimutaler Richtung und über eine Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x = \pi R$. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.



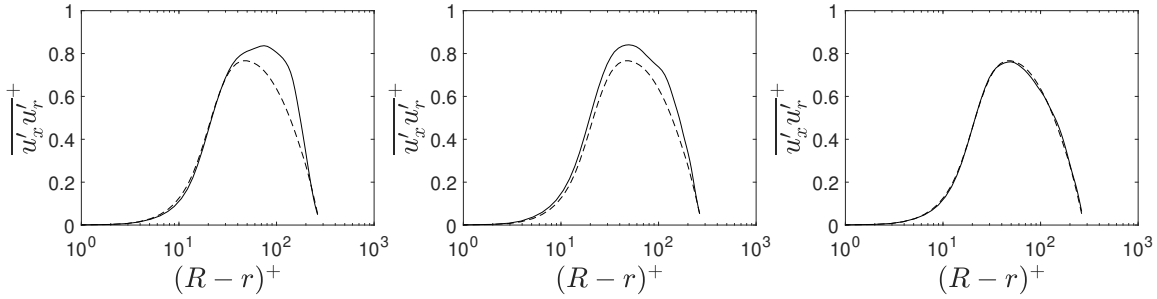
(a) $x/R = [4\ 5]\pi$ **(b)** $x/R = [10\ 11]\pi$ **(c)** $x/R = [16\ 17]\pi$

Abbildung B.12: Beeinflusste Profile $u^+_{x,rms} = \overline{u'_x u'_x}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit, in azimutaler Richtung und über eine Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x = \pi R$. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.



(a) $x/R = [4\ 5]\pi$ **(b)** $x/R = [10\ 11]\pi$ **(c)** $x/R = [16\ 17]\pi$

Abbildung B.13: Beeinflusste Profile $u^+_{r,rms} = \overline{u'_r u'_r}^{1/2}/u_\tau$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit, in azimutaler Richtung und über eine Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x = \pi R$. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.



(a) $x/R = [4\ 5]\pi$ **(b)** $x/R = [10\ 11]\pi$ **(c)** $x/R = [16\ 17]\pi$

Abbildung B.14: Beeinflusste Profile $= \overline{u'_x u'_r}/u_\tau^2$ über dem Wandabstand $(R-r)^+$ an verschiedenen axialen Positionen x/R ab dem Einlass, gemittelt in der Zeit, in azimutaler Richtung und über eine Beeinflussungswellenlänge $\Lambda_x = \pi R$. ——— synthetische Turbulenzgenerierung; − − − periodische ILES.

B.3. Fernfeldrandbedingungen Freistrahl

Um die gewählten Randbedingungen im Freistrahlbereich hinsichtlich der Druckreflexionen zu überprüfen, wird der Testfall eines dreidimensionalen akustischen Impulses in uniformer Strömung mit Geschwindigkeit $\overline{\mathbf{u}} = (Ma, 0, 0)$, konstanter Dichte $\overline{\rho} = 1$ und konstantem Druck $\overline{p} = 1/\gamma$ betrachtet. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ enthalten eine Druck- und Dichtestörung in der Form eines Gaußimpulses

$$\begin{aligned} p' &= \rho' = \epsilon \exp\left[-\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right], \\ u_i' &= 0 \end{aligned} \tag{B.8}$$

mit $\alpha = (\ln 2)/b^2$. Die Machzahl der Strömung ist $Ma = 0.5$, die Halbwertsbreite des Gaußimpulses ist b=3 und die Amplitude ist $\epsilon = 10^{-3}$. Die analytische Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon}{\beta} \int_0^\infty \xi^2 \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a}\right] \cos(t\xi)\, j_0(\xi\eta)\, d\xi\,, \tag{B.9}$$

mit

$$\eta = \left((x_1 - Ma\, t)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}\,, \tag{B.10}$$

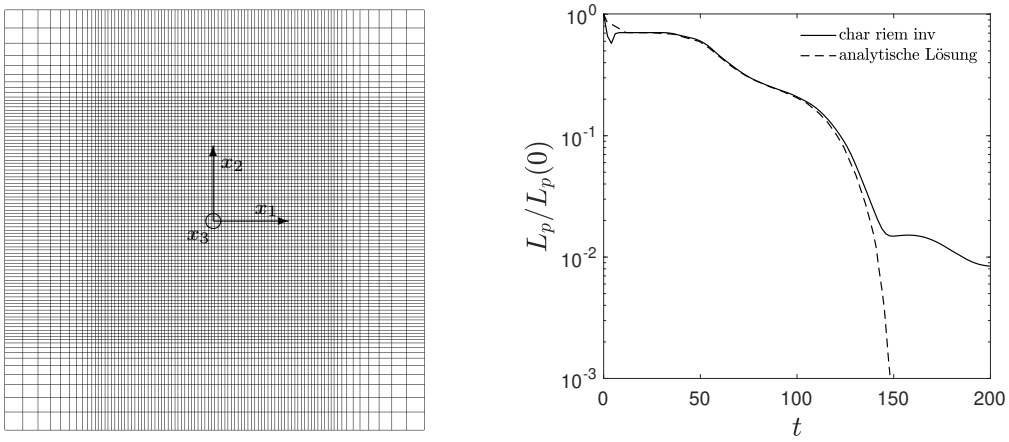
und $\beta = 2\alpha\sqrt{\pi\alpha}$. Die sphärische Besselfunktion erster Art und Ordnung Null j_0 ist gegeben durch $j_0(\xi\eta) = \sin(\xi\eta)/(\xi\eta)$.

Das Rechengebiet umfasst einen Würfel mit $-50 \leq x_1,\, x_2,\, x_3 \leq 50$ und zusätzlicher Dämpfungszone in den äußeren Bereichen $-90 \leq x_1,\, x_2,\, x_3 \leq -50$ und $50 \leq x_1,\, x_2,\, x_3 \leq 90$. Ein quadratischer Dämpfungsterm

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{\max}\left[\left(\frac{x_1 - x_{\min}}{l_{\text{sp}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_{\min}}{l_{\text{sp}}}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_{\min}}{l_{\text{sp}}}\right)^2\right]\,, \tag{B.11}$$

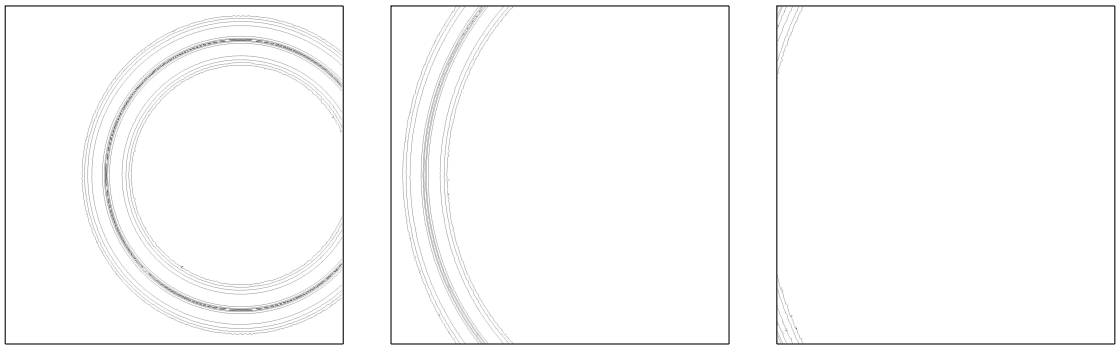
der in der Dämpfungszone ab $x_{\min}$ auf einer Länge von l_{sp} auf den Dämpfungskoeffizienten $\sigma = 0.25$ anwächst, forciert die Lösung gemäß Gleichung 5.10 auf die Referenzlösung $\rho = 1$, $\mathbf{u} = (Ma, 0, 0)$. Abbildung B.15a zeigt das verwendete uniforme Gitter mit $70 \times 70 \times 70$ Zellen im physikalischen Gebiet und Gitterstreckung im Bereich der äußeren Dämpfungszone. Die Simulation wurde mit einer Polynomordnung von 4, doppelter Genauigkeit und einem konstanten Zeitschritt von 0.04 durchgeführt. Die Druckfelder $|p'/\epsilon|$ in der x_1-x_2- und in der x_2-x_3-Ebene zu verschiedenen Zeiten $t = 40$, 80 und 120 bzw. $t = 40$ und 80 sind in den Abbildungen B.16 und B.17 dargestellt. Die akustische Welle, die durch den Anfangsimpuls generiert wird, breitet sich aus und erreicht sukzessive die Ränder des Gebietes mit Amplituden von $|p'/\epsilon| \geq 10^{-2}$ [19]. Die zeitliche Entwicklung des verbleibenden Drucks, basierend auf der ℓ^2-Norm

$$L_p = \left[\frac{1}{N^3}\sum_{i,j,k}^{N} {p'}_{i,j,k}^2\right]^{1/2}\,, \tag{B.12}$$



(a) **(b)**

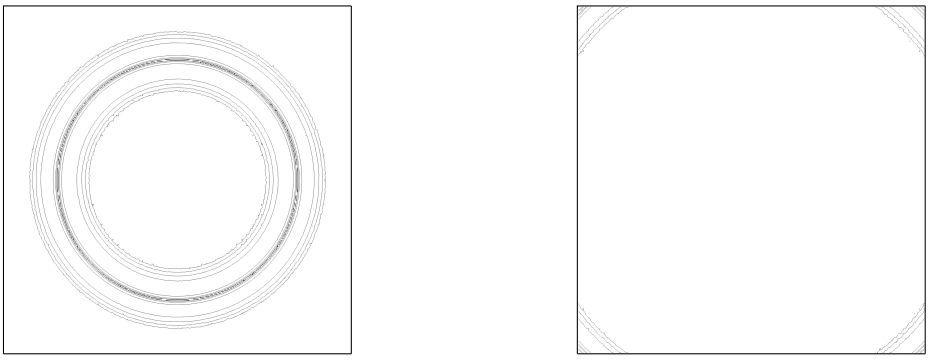
Abbildung B.15: Dreidimensionaler akustischer Impuls. (a) Gitter in der x_1-x_2 Ebene. (b) Zeitliche Entwicklung von $L_p/L_p(0)$ im Vergleich mit der analytischen Lösung.



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung B.16: Dreidimensionaler akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ in der x_1-x_2 Ebene bei $x_3 = 0$ zur Zeit $t = 40$ (a), $t = 80$ (b) und $t = 120$ (c). Darstellung von 4 Isokonturen definiert mit einem Verhältnis von 2 von $1.5 \cdot 10^{-3}$ bis $1.2 \cdot 10^{-2}$.

ist in Abbildung B.15b im physikalischen Gebiet dargestellt. Der Verlauf des Restdrucks unter Verwendung der charakteristischen Randbedingungen basierend auf den Riemann-Invarianten mit Dämpfungsschicht stimmt gut mit der analytischen Lösung überein, solange sich die akustische Welle des Anfangsimpulses im Rechengebiet befindet. Für $t \gtrsim 150$ setzt sich L_p nur noch aus reflektierten Wellen oder numerischen



(a) **(b)**

Abbildung B.17: Dreidimensionaler akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ in der x_2-x_3 Ebene bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t = 40$ (a) und $t = 80$ (b). Darstellung von 4 Isokonturen definiert in Abbildung B.16.

Oszillationen zusammen [19]. Die Werte sind in diesem Bereich sehr klein, ungefähr zwei Größenordnungen kleiner als der Anfangswert. Die gewählten Randbedingungen inklusive Dämpfungsschicht sind damit sehr gut für aeroakustische Untersuchungen geeignet.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abbassi, W. Baars, N. Hutchins, und I. Marusic. Skin-friction drag reduction in a high-Reynolds-number turbulent boundary layer via real-time control of large-scale structures. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 67:30–41, 2017.

[2] H. Abe und R. A. Antonia. Relationship between the energy dissipation function and the skin friction law in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 798:140–164, 2016.

[3] N. Adams und K. Shariff. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 127 (1):27–51, 1996.

[4] M. Ahmad, M. F. Baig, und S. F. Anwer. Turbulent drag reduction in compressible flows using streamwise traveling waves. *Physics of Fluids*, 36(3):035135, 2024.

[5] A. Andreolli, M. Singh, und D. Gatti. Skin friction reduction via suppression of large scales in turbulent couette flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 108:109444, 2024.

[6] R. A. Antonia, M. Teitel, J. Kim, und L. W. B. Browne. Low-Reynolds-number effects in a fully developed turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 236:579–605, 1992.

[7] V. H. Arakeri, A. Krothapalli, V. Siddavaram, M. B. Alkislar, und L. M. Lourenco. On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 490:75–98, 2003.

[8] F. Auteri, A. Baron, M. Belan, G. Campanardi, und M. Quadrio. Experimental assessment of drag reduction by traveling waves in a turbulent pipe flow. *Physics of Fluids*, 22(11):115103, 2010.

[9] A. Baranwal, D. A. Donzis, und R. D. Bowersox. Asymptotic behaviour at the wall in compressible turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 933:A28, 2022.

[10] A. Baranwal, D. Donzis, und R. Bowersox. Mach number and wall thermal boundary condition effects on near-wall compressible turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1008, 2025.

[11] A. Baron und M. Quadrio. Turbulent drag reduction by spanwise wall oscillations. *Applied Scientific Research*, 55:311–326, 1995.

[12] S. Barré, C. Bogey, und C. Bailly. Computation of the noise radiated by jets with laminar/turbulent nozzle-exit conditions. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference 8-10 May 2006, Cambridge, Massachusetts*, 2006.

[13] P. Behrouzi, T. Feng, und J. Mcguirk. Active flow control of jet mixing using steady and pulsed fluid tabs. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I Journal of Systems and Control Engineering*, 222, 2008.

[14] T. W. Berger, J. Kim, C. Lee, und J. Lim. Turbulent boundary layer control utilizing the lorentz force. *Physics of Fluids*, 12(3):631–649, 2000.

[15] N. Berizzi, D. Gatti, G. Soldati, S. Pirozzoli, und M. Quadrio. Aerodynamic performance of a transonic airfoil with spanwise forcing. *Journal of Fluid Mechanics*, 1010:A18, 2025.

[16] M. Bernardini, D. Modesti, F. Salvadore, und S. Pirozzoli. Streams: A high-fidelity accelerated solver for direct numerical simulation of compressible turbulent flows. *Computer Physics Communications*, 263:107906, 2021.

[17] J. Bird, M. Santer, und J. Morrison. Compliant kagome lattice structures for generating in-plane waveforms. *International Journal of Solids and Structures*, 141-142:86–101, 2018.

[18] D. Bodony und S. Lele. Current status of jet noise predictions using large-eddy simulation. *AIAA Journal*, 46, 2008.

[19] C. Bogey und C. Bailly. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: Far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acustica*, 88:463 – 471, 2002.

[20] C. Bogey und C. Bailly. Effects of inflow conditions and forcing on subsonic jet flows and noise. *AIAA Journal*, 43(5):1000–1007, 2005.

[21] C. Bogey und C. Bailly. Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27(4):603–610, 2006.

[22] C. Bogey und C. Bailly. Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. *Computers & Fluids*, 35(10):1344–1358, 2006.

[23] C. Bogey, C. Bailly, und D. Juvé. Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal*, 38:2210–2218, 2000.

[24] P. Bradshaw. Compressible turbulent shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9:33–52, 1977.

[25] C. Brun, M. Petrovan Boiarciuc, M. Haberkorn, und P. Comte. Large eddy simulation of compressible channel flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22(3-4):189–212, 2008.

[26] G. A. Brès, P. Jordan, V. Jaunet, M. Le Rallic, A. V. G. Cavalieri, A. Towne, S. K. Lele, T. Colonius, und O. T. Schmidt. Importance of the nozzle-exit boundary-layer state in subsonic turbulent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 851:83–124, 2018.

[27] D. Chandran, A. Zampiron, A. Rouhi, M. Fu, D. Wine, B. Holloway, A. Smits, und I. Marusic. Turbulent drag reduction by spanwise wall forcing. Part 2. High-Reynolds-number experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 968:A7, 2023.

[28] P. Chassaing, R. Antonia, F. Anselmet, L. Joly, und S. Sarkar. *Variable Density Fluid Turbulence*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[29] X. Cheng, C. Wong, F. Hussain, W. Schröder, und Y. Zhou. Flat plate drag reduction using plasma-generated streamwise vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 918:A24, 2021.

[30] K.-S. Choi. Near-wall structure of turbulent boundary layer with spanwise-wall oscillation. *Physics of Fluids*, 14(7):2530–2542, 2002.

[31] K.-S. Choi und M. Graham. Drag reduction of turbulent pipe flows by circular-wall oscillation. *Physics of Fluids*, 10(1):7–9, 1998. ISSN 1070-6631.

[32] A. Cimarelli, B. Frohnapfel, Y. Hasegawa, E. De Angelis, und M. Quadrio. Prediction of turbulence control for arbitrary periodic spanwise wall movement. *Physics of Fluids*, 25, 2013.

[33] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, und C.-W. Shu. The development of discontinuous Galerkin methods. In *Discontinuous Galerkin Methods*, S. 3–50. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[34] M. Cogo, F. Salvadore, F. Picano, und M. Bernardini. Direct numerical simulation of supersonic and hypersonic turbulent boundary layers at moderate-high Reynolds numbers and isothermal wall condition. *Journal of Fluid Mechanics*, 945:A30, 2022.

[35] M. Cogo, U. Baù, M. Chinappi, M. Bernardini, und F. Picano. Assessment of heat transfer and Mach number effects on high-speed turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 974:A10, 2023.

[36] G. N. Coleman, J. Kim, und R. D. Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 305:159–183, 1995.

[37] T. Colonius, S. K. Lele, und P. Moin. Sound generation in a mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 330:375–409, 1997.

[38] D. Coxe, Y. Peet, und R. Adrian. Reynolds number effect on drag reduction in pipe flows by a transverse wall oscillation, 2024.

[39] D. G. Crighton und M. Gaster. Stability of slowly diverging jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(2):397–413, 1976.

[40] P. Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2nd edition, 2015.

[41] F. De Vanna, F. Avanzi, M. Cogo, S. Sandrin, M. Bettencourt, F. Picano, und E. Benini. URANOS: A GPU accelerated Navier-Stokes solver for compressible wall-bounded flows. *Computer Physics Communications*, 287:108717, 2023.

[42] J. C. del Álamo und J. Jiménez. Direct numerical simulation of the very large anisotropic scales in a turbulent channel, 2013.

[43] R. Deshpande, A. G. Kidanemariam, und I. Marusic. Pressure drag reduction via imposition of spanwise wall oscillations on a rough wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 979:A21, 2024.

[44] R. Deshpande, R. Vinuesa, J. Klewicki, und I. Marusic. Active and inactive contributions to the wall pressure and wall-shear stress in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 1003:A24, 2025.

[45] L. Ding, L. Sabidussi, B. Holloway, M. Hultmark, und A. Smits. Acceleration is the key to drag reduction in turbulent flow. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 121(43):e2403968121, 2024.

[46] C. M. Douglas, B. L. Emerson, und T. C. Lieuwen. Nonlinear dynamics of fully developed swirling jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 924:A14, 2021.

[47] Y. Du und G. E. Karniadakis. Suppressing wall turbulence by means of a transverse traveling wave. *Science*, 288(5469):1230–1234, 2000.

[48] Y. Du, V. Symeonidis, und G. E. Karniadakis. Drag reduction in wall-bounded turbulence via a transverse travelling wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 457: 1–34, 2002.

[49] L. Duan, I. Beekman, und M. P. Martín. Direct numerical simulation of hypersonic turbulent boundary layers. Part 2. Effect of wall temperature. *Journal of Fluid Mechanics*, 655:419–445, 2010.

[50] G. K. El Khoury, P. Schlatter, A. Noorani, P. F. Fischer, G. Brethouwer, und A. V. Johansson. Direct numerical simulation of turbulent pipe flow at moderately high Reynolds numbers. *Flow, Turbulence and Combustion*, 91:475–495, 2013.

[51] H. Foysi. *Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz*. PhD Dissertation, TU München, 2004.

[52] H. Foysi, S. Sarkar, und R. Friedrich. Compressibility effects and turbulence scalings in supersonic channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 509:207–216, 2004.

[53] H. Foysi, J. P. Mellado, und S. Sarkar. Large-eddy simulation of variable-density round and plane jets. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31 (3):307–314, 2010.

[54] R. Friedrich und F. Bertolotti. Compressibility effects due to turbulent fluctuations. *Applied Scientific Research*, 57:165–194, 1997.

[55] B. Frohnapfel, Y. Hasegawa, und M. Quadrio. Money versus time: Evaluation of flow control in terms of energy consumption and convenience. *Journal of Fluid Mechanics*, 700:406–418, 2012.

[56] E. Gallorini und M. Quadrio. Spatial discretization effects in spanwise forcing for turbulent drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics*, 982:A11, 2024.

[57] T. B. Gatski und J.-P. Bonnet. *Compressibility, Turbulence and High Speed Flow*. Academic Press, 2013.

[58] F. Gattere, M. Zanolini, D. Gatti, M. Bernardini, und M. Quadrio. Turbulent drag reduction with streamwise-travelling waves in the compressible regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 987:A30, 2024.

[59] D. Gatti und M. Quadrio. Performance losses of drag-reducing spanwise forcing at moderate values of the Reynolds number. *Physics of Fluids*, 25(12):125109, 2013.

[60] D. Gatti und M. Quadrio. Reynolds-number dependence of turbulent skin-friction drag reduction induced by spanwise forcing. *Journal of Fluid Mechanics*, 802:553–582, 2016.

[61] D. Gatti, A. Guttler, B. Frohnapfel, und C. Tropea. Experimental assessment of spanwise oscillating dielectric electroactive surfaces for turbulent drag reduction in an air channel flow. *Experiments in Fluids*, 56(5):Art.Nr. 110, 2015.

[62] D. Gatti, A. Cimarelli, Y. Hasegawa, B. Frohnapfel, und M. Quadrio. Global energy fluxes in turbulent channels with flow control. *Journal of Fluid Mechanics*, 857:345–373, 2018.

[63] D. Gatti, M. Quadrio, A. Chiarini, F. Gattere, und S. Pirozzoli. Turbulent skin-friction drag reduction via spanwise forcing at high Reynolds number, 2024.

[64] S. Ghosal, T. S. Lund, P. Moin, und K. Akselvoll. A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 286: 229–255, 1995.

[65] G. Giangaspero, F. Witherden, und P. Vincent. Synthetic turbulence generation for high-order scale-resolving simulations on unstructured grids. *AIAA Journal*, 60(2):1032–1051, 2022.

[66] T. Gibis, L. Sciacovelli, M. Kloker, und C. Wenzel. Heat-transfer effects in compressible turbulent boundary layers – a regime diagram. *Journal of Fluid Mechanics*, 995, 2024.

[67] T. Gomez, V. Flutet, und P. Sagaut. Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in compressible turbulent channel flows. *Physical review E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 79:035301, 2009.

[68] K. P. Griffin, L. Fu, und P. Moin. Velocity transformation for compressible wall-bounded turbulent flows with and without heat transfer. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(34):e2111144118, 2021.

[69] F. Grinstein, L. Margolin, und W. Rider. *Implicit Large Eddy Simulation: Computing Turbulent Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2007.

[70] J. Gullbrand. Grid-independent large-eddy simulation in turbulent channel flow using three-dimensional explicit filtering. In *Annual Research Briefs*, S. 331–342, Stanford University/NASA, California, 2003. Center for Turbulence Research.

[71] A. Hadjadj, O. Ben-Nasr, M. Shadloo, und A. Chaudhuri. Effect of wall temperature in supersonic turbulent boundary layers: A numerical study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 81:426–438, 2015.

[72] A. Hasan, P. Costa, J. Larsson, S. Pirozzoli, und R. Pecnik. Intrinsic compressibility effects in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1006, 2025.

[73] A. M. Hasan, J. Larsson, S. Pirozzoli, und R. Pecnik. Incorporating intrinsic compressibility effects in velocity transformations for wall-bounded turbulent flows. *Phys. Rev. Fluids*, 8:L112601, 2023.

[74] P. G. Huang, G. N. Coleman, und P. Bradshaw. Compressible turbulent channel flows: DNS results and modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 305:185–218, 1995.

[75] Z. D. Husain und A. Hussain. Axisymmetric mixing layer: Influence of the initial and boundary conditions. *AIAA Journal*, 17(1):48–55, 1979.

[76] J. Hussein, S. Capp, und W. George. Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 258:31 – 75, 1994.

[77] H. T. Huynh. A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous galerkin methods. In *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2007.

[78] J. Hwang und H. J. Sung. Influence of large-scale motions on the frictional drag in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 829:751–779, 2017.

[79] V. Ioannou und S. Laizet. Numerical investigation of plasma-controlled turbulent jets for mixing enhancement. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 70:193–205, 2018.

[80] N. Jansson, M. Karp, A. Podobas, S. Markidis, und P. Schlatter. Neko: A modern, portable, and scalable framework for high-fidelity computational fluid dynamics. *Computers & Fluids*, 275:106243, 2024.

[81] J. Jiménez und A. Pinelli. The autonomous cycle of near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 389:335 – 359, 1999.

[82] J. Jiménez. The largest structures in turbulent wall flows. *CTR Ann. Res. Briefs*, S. 943–945, 1998.

[83] W. J. Jung, N. Mangiavacchi, und R. Akhavan. Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(8):1605–1607, 1992.

[84] N. Kasagi, K. Fukagata, und Y. Suzuki. Adaptive control of wall-turbulence for skin friction drag reduction and some consideration for high Reynolds number flows. In 2nd *International Symposium on Seawater Drag Reduction*, 2005.

[85] N. Kasagi, Y. Hasegawa, und K. Fukagata. Toward cost-effective control of wall turbulence for skin friction drag reduction. In B. Eckhardt (Hrsg.), *Advances in Turbulence XII*, S. 189–200. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[86] J. M. Kendall. The turbulent boundary layer over a wall with progressive surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):259–281, 1970.

[87] J. Kim und F. Hussain. Propagation velocity of perturbations in turbulent channel flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(3):695–706, 1993.

[88] J. Kim, P. Moin, und R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.

[89] K. C. Kim und R. J. Adrian. Very large-scale motion in the outer layer. *Physics of Fluids*, 11(2):417–422, 1999.

[90] D. A. Kopriva und J. H. Kolias. A conservative staggered-grid Chebyshev multidomain method for compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 125(1):244–261, 1996.

[91] L. S. G. Kovasznay. Turbulence in supersonic flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(10):657–674, 1953.

[92] L. Laguarda, S. Hickel, F. Schrijer, und B. van Oudheusden. Assessment of Reynolds number effects in supersonic turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 105:109234, 2024.

[93] M. Lee und R. D. Moser. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $\mathrm{Re}_\tau \approx 5200$. *Journal of Fluid Mechanics*, 774:395–415, 2015.

[94] M. J. Lee, J. Kim, und P. Moin. Structure of turbulence at high shear rate. *Journal of Fluid Mechanics*, 216:561–583, 1990.

[95] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42, 1992.

[96] E. Lenormand, P. Sagaut, und L. T. Phuoc. Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32:369–406, 2000.

[97] W. Li, Y. T. Fan, D. Modesti, und C. Cheng. Decomposition of the mean skin-friction drag in compressible turbulent channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 875, 06 2019.

[98] D. Livescu. Turbulence with large thermal and compositional density variations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 52:309–341, 2020.

[99] N. Loppi, F. Witherden, A. Jameson, und P. Vincent. A high-order cross-platform incompressible Navier–Stokes solver via artificial compressibility with application to a turbulent jet. *Computer Physics Communications*, 233:193–205, 2018.

[100] A. Mani. Analysis and optimization of numerical sponge layers as a nonreflective boundary treatment. *Journal of Computational Physics*, 231(2):704–716, 2012.

[101] I. Marusic, R. Mathis, und N. Hutchins. Predictive model for wall-bounded turbulent flow. *Science*, 329(5988):193–196, 2010.

[102] I. Marusic, D. Chandran, A. Rouhi, M. K. Fu, D. Wine, B. Holloway, D. Chung, und A. J. Smits. An energy-efficient pathway to turbulent drag reduction. *Nature Communications*, 12(5805):1–8, 2021.

[103] A. Michalke. Survey on jet instability theory. *Progress in Aerospace Sciences*, 21:159–199, 1984.

[104] D. Modesti und S. Pirozzoli. Reynolds and Mach number effects in compressible turbulent channel flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 59:33–49, 2016.

[105] Y. Morinishi, S. Tamano, und K. Nakabayashi. A DNS algorithm using B-spline collocation method for compressible turbulent channel flow. *Computers & Fluids*, 32:751–776, 2003.

[106] Y. Morinishi, S. Tamano, und K. Nakabayashi. Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flow between adiabatic and isothermal walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 502:273–308, 2004.

[107] M. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. *Mécanique de la Turbulence*, 367(380):26, 1962.

[108] W. Ni, L. Lu, C. Ribault, und J. Fang. Direct numerical simulation of supersonic turbulent boundary layer with spanwise wall oscillation. *Energies*, 9:154, 2015.

[109] N. R. Panchapakesan und J. L. Lumley. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 246: 197–223, 1993.

[110] J. S. Park, F. D. Witherden, und P. E. Vincent. High-order implicit large-eddy simulations of flow over a NACA0021 aerofoil. *AIAA Journal*, 55(7):2186–2197, 2017.

[111] A. Patel, J. W. R. Peeters, B. J. Boersma, und R. Pecnik. Semi-local scaling and turbulence modulation in variable property turbulent channel flows. *Physics of Fluids*, 27(9):095101, 2015.

[112] A. Patel, B. J. Boersma, und R. Pecnik. The influence of near-wall density and viscosity gradients on turbulence in channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 809:793–820, 2016.

[113] Y. Peet, P. Sagaut, und Y. Charron. Pressure loss reduction in hydrogen pipelines by surface restructuring. *International Journal of Hydrogen Energy*, 34 (21):8964–8973, 2009.

[114] J. Pei, J. Chen, Z. She, und F. Hussain. Mach number dependence of near wall structure in compressible channel flows. *AIP Conference Proceedings*, 1376, 2011.

[115] S. Pirozzoli und M. Bernardini. Turbulence in supersonic boundary layers at moderate Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 688:120–168, 12 2011.

[116] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.

[117] M. Quadrio und P. Ricco. The laminar generalized Stokes layer and turbulent drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics*, 667, 2010.

[118] M. Quadrio, P. Ricco, und C. Viotti. Streamwise-travelling waves of spanwise wall velocity for turbulent drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics*, 627: 161–178, 2009.

[119] N. Renard und S. Deck. A theoretical decomposition of mean skin friction generation into physical phenomena across the boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 790:339–367, 2016.

[120] P. Ricco und S. Hahn. Turbulent drag reduction through rotating discs. *Journal of Fluid Mechanics*, 722:267–290, 2013.

[121] P. Ricco, M. Skote, und M. Leschziner. A review of turbulent skin-friction drag reduction by near-wall transverse forcing. *Progress in Aerospace Sciences*, 123: 100713, 2021.

[122] D. Roggenkamp, W. Jessen, W. Li, und W. Schröder. Experimental investigation of turbulent boundary layers over transversal moving surfaces. *CEAS Aeronautical Journal*, 6:471–484, 2015.

[123] J. Romero, J. Crabill, J. Watkins, F. Witherden, und A. Jameson. ZEFR: A GPU-accelerated high-order solver for compressible viscous flows using the flux reconstruction method. *Computer Physics Communications*, 250:107169, 2020.

[124] A. Rouhi, M. Fu, D. Chandran, A. Zampiron, A. Smits, und I. Marusic. Turbulent drag reduction by spanwise wall forcing. Part 1. Large-eddy simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 968:A6, 2023.

[125] A. Rouhi, M. Hultmark, und A. J. Smits. Spanwise wall forcing can reduce turbulent heat transfer more than drag. *Journal of Fluid Mechanics*, 1010:A59, 2025.

[126] M. Ruby und H. Foysi. Active control of compressible channel flow up to $\mathrm{Ma_b} = 3$ using direct numerical simulations with spanwise velocity modulation at the walls. *GAMM Mitteilungen*, 45, 2022.

[127] M. Ruby und H. Foysi. Effects by oscillation control and compressibility in supersonic turbulent channel flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 114:109820, 2025.

[128] L. F. Sabidussi, L. Ding, M. Hultmark, und A. J. Smits. Reducing drag in turbulent pipe flow by azimuthal wall oscillation. In *13th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP13) Montreal, Canada*, 2024.

[129] S. Sathyanarayana, M. Bernardini, D. Modesti, S. Pirozzoli, und F. Salvadore. High-speed turbulent flows towards the exascale: STREAmS-2 porting and performance. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 196:104993, 2024.

[130] O. T. Schmidt. Spectral proper orthogonal decomposition using multitaper estimates. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 36:741–754, 2022.

[131] O. T. Schmidt und T. Colonius. Guide to spectral proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, 58(3):1023–1033, 2020.

[132] O. T. Schmidt, A. Towne, G. Rigas, T. Colonius, und G. A. Brès. Spectral analysis of jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 855:953–982, 2018.

[133] W. Schoppa und F. Hussain. Coherent structure generation in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 453:57–108, 2002.

[134] D. Schütz. *Numerische Simulation des aerodynamischen und akustischen Feldes einer Düse-Flügel-Klappen Konfiguration*. PhD Dissertation, Universität Siegen, 2023.

[135] M. Skote. Comparison between spatial and temporal wall oscillations in turbulent boundary layer flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 730:273–294, 2013.

[136] A. Smits und J. Dussauge. *Turbulent shear layers in supersonic flow*. Springer New York, 2006.

[137] G. Tissot, M. Zhang, F. C. Lajús, A. V. G. Cavalieri, und P. Jordan. Sensitivity of wavepackets in jets to nonlinear effects: The role of the critical layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 811:95–137, 2017.

[138] E. F. Toro. *The HLL and HLLC Riemann Solvers*, S. 293–311. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[139] E. Touber und M. A. Leschziner. Near-wall streak modification by spanwise oscillatory wall motion and drag-reduction mechanisms. *Journal of Fluid Mechanics*, 693:150–200, 2012.

[140] A. Towne, O. T. Schmidt, und T. Colonius. Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 847:821–867, 2018.

[141] A. A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1976.

[142] A. Trettel und J. Larsson. Mean velocity scaling for compressible wall turbulence with heat transfer. *Physics of Fluids*, 28(2):026102, 2016.

[143] E. R. Van Driest. Turbulent boundary layer in compressible fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 18(3):145–160, 1951.

[144] B. C. Vermeire, S. Nadarajah, und P. G. Tucker. Implicit large eddy simulation using the high-order correction procedure via reconstruction scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 82(5):231–260, 2016.

[145] P. Vincent, P. Castonguay, und A. Jameson. Insights from von Neumann analysis of high-order flux reconstruction schemes. *Journal of Computational Physics*, 230(22):8134–8154, 2011.

[146] C. Viotti, M. Quadrio, und P. Luchini. Streamwise oscillation of spanwise velocity at the wall of a channel for turbulent drag reduction. *Physics of Fluids*, 21(11):115109, 2009.

[147] P. Volpiani, P. S. Iyer, S. Pirozzoli, und J. Larsson. Data-driven compressibility transformation for turbulent wall layers. *Physical Review Fluids*, 5, 2020.

[148] C. Wenzel, T. Gibis, und M. Kloker. About the influences of compressibility, heat transfer and pressure gradients in compressible turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 930:1–37, 2022.

[149] F. Witherden, A. Farrington, und P. Vincent. PyFR: An open source framework for solving advection–diffusion type problems on streaming architectures using the flux reconstruction approach. *Computer Physics Communications*, 185(11): 3028 – 3040, 2014.

[150] F. Witherden, B. Vermeire, und P. Vincent. Heterogeneous computing on mixed unstructured grids with PyFR. *Computers & Fluids*, 120:173–186, 2015.

[151] M. Xiao, A. Ceci, P. Orlandi, und S. Pirozzoli. Direct numerical simulation of drag reduction in rotating pipe flow up to $\mathrm{Re}_\tau \approx 3000$. *Journal of Fluid Mechanics*, 996, 2024.

[152] D. Xu, J. Wang, M. Wan, C. Yu, X. Li, und S. Chen. Effect of wall temperature on the kinetic energy transfer in a hypersonic turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 929:A33, 2021.

[153] J. Yang, A. Stroh, S. Lee, S. Bagheri, B. Frohnapfel, und P. Forooghi. Assessment of roughness characterization methods for data-driven predictions. *Flow, Turbulence and Combustion*, 113, 2024.

[154] J. Yao und F. Hussain. Supersonic turbulent boundary layer drag control using spanwise wall oscillation. *Journal of Fluid Mechanics*, 880:388–429, 2019.

[155] J. Yao und F. Hussain. Turbulence statistics and coherent structures in compressible channel flow. *Phys. Rev. Fluids*, 5:084603, 2020.

[156] J. Yao, X. Chen, und F. Hussain. Reynolds number effect on drag control via spanwise wall oscillation in turbulent channel flows. *Physics of Fluids*, 31(8): 085108, 2019.

[157] M. Yu, C.-X. Xu, und S. Pirozzoli. Genuine compressibility effects in wall-bounded turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, 4:123402, 2019.

[158] K. B. M. Q. Zaman. Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 152:83–111, 1985.

[159] C. Zhang, L. Duan, und M. M. Choudhari. Direct numerical simulation database for supersonic and hypersonic turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 56(11):4297–4311, 2018.

[160] P.-J.-Y. Zhang, Z.-H. Wan, N.-S. Liu, D.-J. Sun, und X.-Y. Lu. Wall-cooling effects on pressure fluctuations in compressible turbulent boundary layers from subsonic to hypersonic regimes. *Journal of Fluid Mechanics*, 946:A14, 2022.

[161] Y.-S. Zhang, W.-T. Bi, F. Hussain, und Z.-S. She. A generalized Reynolds analogy for compressible wall-bounded turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 739:392–420, 2014.

[162] Y. Zhou, D. Fan, B. Zhang, R. Li, und B. R. Noack. Artificial intelligence control of a turbulent jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 897:A27, 2020.